

Elektrodynamik

Technische Universität Carolo Wilhelmina, Braunschweig

SS 1996

W. Lücke

Vorwort

Die elektromagnetische Wechselwirkung ist wohl die wichtigste aller fundamentalen Wechselwirkungen, die – neben der Gravitation und Trägheit – den Aufbau aller Makromaterie bestimmt. Entsprechend vielfältig sind die Anwendungsbereiche ihrer klassischen Theorie, der *Elektrodynamik*.

Damit ist klar daß sich die Vorlesung auf die wesentliche Struktur der Theorie beschränken muß. Um diese möglichst klar herauszuarbeiten, wird in Kapitel 1 nur kurz auf die *mikroskopische* Elektrostatik eingegangen, d.h. (hypothetisch) exakte Kenntnis der Ladungsverteilung vorausgesetzt. Als Materialien werden zunächst nur ideale Leiter betrachtet. Die Behandlung allgemeinerer Materialien wird allerdings durch Abhandlung der allgemeinen Multipolentwicklung vorbereitet. In Kapitel 2 wird dann sofort die mikroskopische **Maxwellsche** Theorie der Strom-Ladungsverteilungen und ihrer Felder im Vakuum vorgestellt, die die eigentliche Grundlage der gesamten klassischen wie auch der quantisierten Elektrodynamik bildet. Wie sich die mikroskopische Theorie der Magnetostatik in diesen Rahmen einfügt, wird in Kapitel 3 gezeigt. In Kapitel 4 wird dann untersucht, wie sich die *makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen* elektrisierbarer und magnetisierbarer Materie aus den mikroskopischen Gleichungen mithilfe geeigneter Materialgrößen als Näherungsgleichungen ergeben. Kapitel 5 schließlich befaßt sich ganz kurz mit elektromagnetischen Wellen. Die Übungsaufgaben sind als ergänzender Teil dieser Vorlesung anzusehen.

Um den Vergleich mit Darstellungen in verschiedenen Bereichen zu erleichtern, wird die gesamte Theorie im Skript¹ mithilfe von drei nicht spezifizierten Maßsystemkonstanten ϵ'_0, μ'_0, c' dargestellt. Die Formeln für das jeweils gewünschte Maßsystem folgen dann einfach durch Einsetzen der systemspezifischen Werte dieser Parameter, wie im Anhang angegeben.

Die Vorlesung setzt u.a. Resultate der Vektoranalysis voraus, die im Anhang zusammengestellt sind. Eine ausführliche Abhandlung dazu ist z.B. in ([Lücke, ein](#)) gegeben.

Warnung: Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium gedacht.

Literaturempfehlungen: ([Becker und Sauter, 1969](#); [Jackson, 2001](#); [Landau und Lifschitz, 1966](#); [Schwartz, 1972](#))

Version vom 26. März 2009

¹In der Vorlesung und den Übungen wird jedoch durchweg das MKSA-System benutzt, d.h. es wird $\epsilon'_0 = \hat{\epsilon}_0 = \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ampere} \cdot \text{Sekunden}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2}$, $\mu'_0 = \hat{\mu}_0 = \mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon_0 c c'}$ und $c' = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ gesetzt. Ich danke Herrn G. GERLICH für die Anregung dazu.

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik	9
1.1	Grundlagen	9
1.1.1	Grundgleichungen	9
1.1.2	Idealisierte Ladungsverteilungen	11
1.2	Grundproblem der Elektrostatik idealer Leiter	11
1.2.1	Mathematisches Modell für ideale Leiter	11
1.2.2	Das Grundproblem	13
1.2.3	Methode der Scheinladungen	15
1.2.4	Allgemeine Theorie der Kapazität	16
1.3	Allgemeinere Randwertprobleme	20
1.3.1	Dirichletsche und Neumannsche Randbedingungen	20
1.3.2	Formale Lösung der Randwertprobleme	21
1.3.3	Äußeres Dirichlet-Problem der Kugel	23
1.4	Reihenentwicklungen	23
1.4.1	Entwicklung in Kugelkoordinaten	23
1.4.2	Multipolentwicklung	27
1.4.3	Abschließende Bemerkungen	29
2	Maxwellsche Gleichungen für das Vakuum	31
2.1	Die magnetische Kraftflußdichte	31
2.1.1	Festlegung des B-Feldes	31
2.1.2	Lorentz-Kraft aus nichtrelativistischer Sicht	32
2.1.3	Relativistischer Ursprung von des B-Feldes	32
2.2	Aufstellung der Gleichungen	34
2.2.1	Grundgleichungen in Lorentz-invarianter Form	34
2.2.2	Grundgleichungen in üblicher Form	36
2.3	Anwendung des Satzes von Stokes	38
2.3.1	Faradaysches Induktionsgesetz	38
2.3.2	Elektromagnetische Potentiale	39
2.4	Zusammenfassung	43

3	Magnetostatik	45
3.1	Grundlagen	45
3.1.1	Biot-Savartsches Gesetz	45
3.1.2	Das Magnetische Feld	48
3.1.3	Amperesches Gesetz	49
3.2	Stationäre Stromverteilungen	51
3.2.1	Die Dipol-Näherung	51
3.2.2	Feldwirkung auf magnetische Dipole	53
4	Maxwellsche Gleichungen für Materie	57
4.1	Makroskopische Näherungen	57
4.1.1	Retardierte Potentiale	57
4.1.2	Retardierte Dipol-Näherung	60
4.1.3	Makroskopische Mittelung	61
4.2	Die makroskopischen Felder	63
4.2.1	Definition und Grundgleichungen	63
4.2.2	Materialkonstanten	64
4.2.3	Einfachste Randwertprobleme	67
4.2.4	Kompliziertere Materialien	69
4.3	Zusammenfassung	71
5	Elektromagnetische Wellen	73
5.1	Grundlegendes	73
5.1.1	Qualitative Betrachtungen	73
5.1.2	Energiedichte des elektromagnetischen Feldes	74
5.1.3	Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes	76
5.1.4	Hertzscher Dipol	78
A		81
A.1	Hilfsmittel aus der Vektoranalysis	81
A.1.1	Integrale auf Mannigfaltigkeiten	81
A.1.2	Mittelwertsätze	83
A.1.3	Reduktion der Dimension	83
A.1.4	Wichtige Äquivalenzen	85
A.1.5	Der Nabla-Operator	85
A.1.6	Weitere Resultate	86
A.2	Exkurs über Spezielle Relativitätstheorie	87
A.3	Verschiedene Maßsysteme	91
A.3.1	Allgemeines	91
A.3.2	Das Gaußsche Maßsystem	91
A.3.3	Das MKSA-System	92
A.3.4	Weitere Maßsysteme	92
A.4	Übungsaufgaben	93

Literaturverzeichnis

107

Index

109

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Grundlagen

1.1.1 Grundgleichungen

Gegenstand der Elektrostatik ist die Berechnung der Kräfte, die ruhende¹ Ladungsverteilungen aufeinander ausüben. Wesentlich ist dabei die **Additivität der Kräfte**. Danach läßt sich die elektrostatische Kraft, die von einer vorgegebenen, ruhenden Ladungsverteilung ρ auf andere Ladungen ausgeübt wird, auf das zugehörige *elektrostatische Feld*

$$\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Kraft auf Probeladung bei } \mathbf{r}}{\text{Probeladung}} \quad (1.1)$$

zurückführen.² Die felderzeugenden Ladungen sind auch im mathematischen Sinne Quellen (bzw. Senken) der Feldlinien:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon'_0} \rho(\mathbf{r}),} \quad (1.2)$$

wobei ϵ'_0 eine Maßsystemkonstante ist. Nach dem GAUSSschen Satz und dem Mittelwertsatz für Volumenintegrale ist das äquivalent zum **GAUSSschen Gesetz**

$$\int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_r = \frac{1}{\epsilon'_0} \int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{r}) dV_r \quad (1.3)$$

für hinreichend gutartige Raumbereiche \mathcal{G} .³

Version vom 26. März 2009

¹Streng genommen existieren natürlich keine ruhenden Ladungsverteilungen.

²(1.1) macht natürlich nur Sinn, wenn die Probeladung durch ihre Kraftwirkung die Ladungsverteilung ρ nicht merklich verändert.

³Es sei daran erinnert, daß die Normale der Oberfläche $\partial \mathcal{G}$ von \mathcal{G} konventionsgemäß aus \mathcal{G} heraus zeigt.

Die experimentelle Erfahrung zeigt, daß elektrostatische Felder stets **konservativ** sind:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = 0.} \quad (1.4)$$

Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis sind sie daher – sofern sie im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden – durch die Ladungsverteilung bereits eindeutig bestimmt:

$$\boxed{\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \Phi_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{\mathbf{r}'},} \quad (1.5)$$

wobei

$$\boxed{\Phi_\rho(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}} \quad (1.6)$$

das sog. **COULOMB-Potential** der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man das durch (1.5) gegebene elektrostatische Feld $\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r})$ als das von der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ erzeugte **COULOMB-Feld**.

Hieraus folgt insbesondere⁴

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}) = \rho(|\mathbf{r}|) \\ \rho(\mathbf{r}) = 0 \text{ für } |\mathbf{r}| > R \end{array} \right\} \implies \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \int \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \text{ für } |\mathbf{r}| > R \quad (1.7)$$

und somit das sog. **COULOMBSche Gesetz**:⁵

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kraft, die eine Punktladung } q_1 \text{ bei } \mathbf{r}_1 \\ \text{auf eine Punktladung } q_2 \text{ bei } \mathbf{r}_2 \text{ ausübt} \end{array} \right\} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon'_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Umgekehrt folgt aus dem experimentell gesicherten COULOMBSchen Gesetz die Gleichung (1.5) und somit aufgrund der **POISSONSchen Gleichung** die Grundbeziehung

$$\boxed{\Delta \Phi_\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon'_0} \rho(\mathbf{r}),} \quad (1.8)$$

die gemäß (1.5) wiederum (1.2) impliziert.⁶

Der wesentliche Unterschied zur NEWTONSchen Gravitationstheorie ruhender Massenverteilungen besteht – abgesehen davon, daß sich gleichartige Ladungen abstoßen anstatt sich anzuziehen – nur darin, daß die elektrischen Ladungen auch negatives Vorzeichen haben können.

Version vom 26. März 2009

⁴Aus (1.5) und (1.6) folgt im Falle $\rho(\mathbf{r}) = \rho(|\mathbf{r}|)$ die Kugelsymmetrie von $\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r})$ und daraus mit dem GAUSSSchen Gesetz (1.3) die rechte Seite von (1.7). In Kugelkoordinaten läßt sich das Integral in (1.6) aber auch leicht direkt berechnen.

⁵Wenn man sich bei einer ruhenden, kugelsymmetrischen Ladungsverteilung nur für Ihre Kraftwirkung interessiert, so kann man sie sich modellmäßig als Punktladung am Ort des Ladungsschwerpunktes vorstellen.

⁶Es sei daran erinnert, daß der LAPLACE-Operator durch $\Delta \stackrel{\text{def}}{=}} \operatorname{div} \operatorname{grad}$ definiert ist.

1.1.2 Idealisierte Ladungsverteilungen

Ladungsverteilungen sind grundsätzlich idealisiert zu beschreiben; schon allein deshalb, weil sie mikroskopisch diskret und stets **bewegt** sind (von quantenmechanischen Gesichtspunkten ganz abgesehen.) Die genaue Art der Idealisierung ist eine Frage der Zweckmäßigkeit.

Formale Definition: Eine *Ladungsverteilung* $\rho(\mathbf{r})$ ist eine (hinreichend gutartige) Abbildung

$$f \longrightarrow q(f) \stackrel{\text{formal}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \quad (1.9)$$

von stückweise stetigen Funktionen f auf Ladungswerte $q(f)$, die für hinreichend gutartige Gebiete \mathcal{G} der Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) \chi_{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \approx \text{Gesamtladung innerhalb } \mathcal{G}$$

genügen sollte.⁷ Dabei ist das Integral auf der rechten Seite von (1.9) vielfach nur als suggestive Schreibweise anzusehen. Z.B. für eine Punktladung q am Ort \mathbf{r}_0 gilt

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}^3} q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} q f(\mathbf{r}_0), \text{ falls } f \text{ stetig bei } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0,$$

oder für eine Flächenladung auf $\partial\mathcal{G}$

$$\rho(f) = \int_{\partial\mathcal{G}} \sigma(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) |d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}|$$

mit einer hinreichend gutartigen *Flächenladungsdichte* $\sigma(\mathbf{r})$. In diesen Fällen ist also $\rho(\mathbf{r})$ keine gewöhnliche Raumladungsdichte, sondern eine *verallgemeinerte Funktion*. In Gebieten, in denen die rechte Seite von (1.6) definiert ist und stetig differenzierbar von \mathbf{r} abhängt, gilt aber auch dann noch (1.5)/(1.6).

1.2 Grundproblem der Elektrostatik idealer Leiter

1.2.1 Mathematisches Modell für ideale Leiter

Beschreibung: Ein *idealer* Leiter läßt sich in Bezug auf die **Elektrostatik** durch folgende Bedingungen charakterisieren:

Version vom 26. März 2009

⁷Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit $\chi_{\mathcal{G}}$ die *charakteristische Funktion* des Gebietes \mathcal{G} :

$$\chi_{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{G}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (i) Er nimmt ein (vernünftiges) Gebiet \mathcal{G}' ein.
- (ii) Die Ladungsverteilung stellt sich (bei vernünftigen äußeren **elektrostatischen** Bedingungen) so ein, daß:⁸
- 1.) das Innere von \mathcal{G}' feld- und damit auch ladungsfrei wird,
 - 2.) die Grenzwerte des Feldes von außerhalb \mathcal{G}' auf $\partial\mathcal{G}'$ parallel (oder antiparallel) der Flächennormalen gerichtet sind.
- (iii) Die Gesamtladung des Leiters kann im Prinzip jeden beliebigen Wert annehmen.

Unmittelbare Folgerungen:

- Das elektrostische Potential ist über \mathcal{G}' konstant.
- Die Normalkomponente von \mathbf{E} hat i.a. bei $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{G}'$ einen Sprung.
- Die Tangentialkomponente von \mathbf{E} um $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{G}'$ bleibt stetig.

Kritik am Modell: Es handelt sich um eine starke **Idealisierung**; denn für **reale** Leiter gilt u.a.:

- Die Austrittsarbeit ist endlich.
- Die mögliche Gesamtladung ist somit begrenzt.
- Die Zahl der (positiven und negativen) Elementarladungen bei vorgegebener Gesamtladung ist stets endlich.

Flächenladungsdichte: Die idealisierte Ladungsverteilung ist nach dem GAUSSschen Gesetz durch die *influenzierte Flächenladungsdichte*

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0' \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r})) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial\mathcal{G}' \quad (1.10)$$

im Sinne von Abschn. 1.1.2 gegeben:

$$q(f) = \int_{\partial\mathcal{G}'} \sigma(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) |\mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{r}}| .$$

⁸Die zweite der folgenden Bedingungen läßt sich – für hinreichend gutartige Flächenladungsdichte – mithilfe von (1.4) aus der ersten ableiten.

1.2.2 Das Grundproblem

Gegeben:

- (i) \mathcal{G}'_i : von idealen Leitern eingenommene Gebiete,
 $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3 \setminus \cup_i \mathcal{G}'_i$.
- (ii) $\rho(\mathbf{r})$: innerhalb \mathcal{V} bekannte, räumlich begrenzte Ladungsverteilung.
- (iii) Für jedes i ist entweder das Potential Φ_i **oder** die Gesamtladung q_i in \mathcal{G}'_i bekannt.

Gesucht: Das COULOMB-Feld (1.5), das von der **gesamten** Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ (einschließlich der auf die Leiteroberflächen **influenzierten** Ladungen) erzeugt wird.

Existenz der Lösung: Physikalisch ist offensichtlich, daß eine Lösung existiert und ein Potential der Form

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int_{\mathcal{V}} \overbrace{\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}^{\text{vorgegeben}} dV_{\mathbf{r}'} + \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \sum_i \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \overbrace{\frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}^{\text{gesucht}} d|\mathbf{S}_{\mathbf{r}'}| \quad (1.11)$$

besitzt.

Eindeutigkeit der Lösungen: Wir wollen zeigen, daß $\Phi_\rho(\mathbf{r})$ durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt ist:

- $\Phi_\rho(\mathbf{r})$ ist innerhalb \mathcal{V} 2-mal stetig differenzierbar und erfüllt dort (1.8), d.h.

$$\Delta\Phi_\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon'_0}.$$

- Falls Φ_i vorgegeben:

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) = \Phi_i \quad \text{auf } \mathcal{G}'_i.$$

- Falls q_i vorgegeben:⁹

$$\int_{\partial\mathcal{G}'_i} \nabla\Phi_\rho(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \stackrel{(1.5),(1.10)}{=} -\frac{q_i}{\epsilon'_0}.$$

- Auf jeden Fall:

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) \text{ konstant auf } \mathcal{G}'_i.$$

⁹Für die Integranden der Oberflächenintegrale sind hier stets die Grenzwerte von außerhalb des jeweiligen Leiters einzusetzen.

- Für $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ konvergieren $\Phi_\rho(\mathbf{r})$ und $\text{grad } \Phi_\rho(\mathbf{r})$ (gleichmäßig) hinreichend schnell gegen Null.

Zum Beweis beachten wir zunächst, daß aus dem GAUSSschen Satz unter Beachtung der Produktregel der Differentiation die sog. **1. GREENSche Identität**

$$\int_{\partial\mathcal{G}} f(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x = \int_{\mathcal{G}} (f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})) dV_x \quad (1.12)$$

folgt. Setzt man $f = g$ und $\mathcal{G} = \mathcal{V}$ in (1.12) ein, so erhält man

$$\int_{\mathcal{V}} (\text{grad } g)^2 dV = - \sum_i \int_{\partial\mathcal{G}'_i} g \nabla g \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}} g \Delta g dV. \quad (1.13)$$

Seien nun Φ, Φ' zwei mit den Vorgaben verträgliche Potentiale. Mit

$$g(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathbf{r}) - \Phi'(\mathbf{r})$$

gilt

$$\left. \begin{aligned} g &= \Phi_i - \Phi'_i \\ &= 0, \text{ falls } \Phi_i \text{ vorgegeben,} \end{aligned} \right\} \text{ auf } \partial\mathcal{G}'_i,$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \nabla g \cdot d\mathbf{S} &\stackrel{(1.5)}{=} \int_{\partial\mathcal{G}'_i} (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \frac{q'_i - q_i}{\epsilon'_0} \\ &= 0, \text{ falls } q_i \text{ vorgegeben,} \end{aligned} \right\} \text{ auf } \partial\mathcal{G}'_i.$$

Da die Potentiale auf den Leiterflächen konstant sein müssen, gilt also in jedem Falle

$$\int_{\partial\mathcal{G}'_i} g \nabla g \cdot d\mathbf{S} \sim \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \nabla g \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Da außerdem g nach (1.8) der LAPLACE-Gleichung

$$\Delta g = 0 \quad \text{innerhalb } \mathcal{V}$$

genügt, folgt somit nach (1.13)

$$\int_{\mathcal{V}} (\text{grad } g)^2 dV = 0.$$

Der Gradient von g muß also innerhalb \mathcal{V} Null sein, d.h. $g = \Phi - \Phi'$ konstant. Mit $g(\infty) = 0$ folgt also aufgrund der Konstanz der Potentiale innerhalb der Leiter:

Obwohl $\rho(\mathbf{r})$ nicht vollständig explizit gegeben ist, ist $\Phi_\rho(\mathbf{r})$ und damit auch $\rho(\mathbf{r})$ vollständig festgelegt. Das im Sinne von (1.11) zugeordnete Feld $\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r})$ ist also eindeutig.

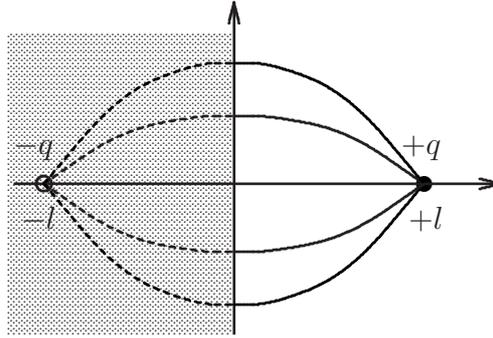


Abb. 1.1: Spiegelladung in der leitenden Halbebene

1.2.3 Methode der Scheinladungen

Punktladung außerhalb eines ideal leitenden Halbraumes:¹⁰ Es sei nur ein Leiter im Gebiet

$$\mathcal{G}' = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$$

vorhanden. Dann gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q\delta(\mathbf{r} - l\mathbf{e}_x) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{V} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}, \\ \Phi_\rho(\infty) &= 0, \\ \Phi_\rho(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{G}'. \end{aligned}$$

Aus Abb. 1.1 erkennt man dann sofort als Lösung des Grundproblems:

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon'_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - l\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + l\mathbf{e}_x|} \right) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

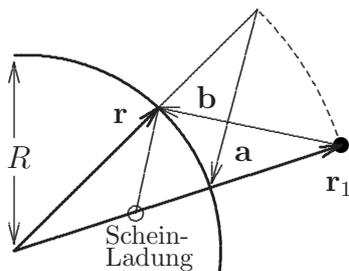
Note Folgerungen:

- 1.) Das Feld der auf der Leiteroberfläche *influenzierten* Ladungsverteilung stimmt im Gebiet $x \geq 0$ mit dem (COULOMB-) Feld einer bei $-l\mathbf{e}_x$ gedachten Punktladung $-q$ (*Spiegelladung*) überein.
- 2.) Die Probeladung q bei $l\mathbf{e}_x$ erfährt durch die Influenzladung die Anziehungskraft (*Bildkraft*) $\frac{q^2}{16\pi\epsilon'_0 l^2}$.

Punktladung gegenüber einer ideal leitenden Kugel: Es sei nur ein Leiter im Gebiet

$$\mathcal{G}' = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| \geq R\}$$

¹⁰Streng genommen müßte man den Übergang von einer glatten Ladungsverteilung zu einer punktförmigen betrachten. Wie das geht, ist aber offensichtlich.



$$\text{für } |\mathbf{r}| = R : \\ |\mathbf{a}| = \left| \frac{|\mathbf{r}_1|}{R} \mathbf{r} - \frac{R}{|\mathbf{r}_1|} \mathbf{r}_1 \right| \\ = |\mathbf{b}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$$

Abb. 1.2: Scheinladung in der leitenden Kugel

vorhanden. Sein Potential sei 0. Dann lauten die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \text{ für } \mathbf{r} \notin \mathcal{G}', \\ \Phi_\rho(\infty) &= 0, \\ \Phi_\rho(\mathbf{r}) &= 0 \text{ für } \mathbf{r} \in \mathcal{G}'. \end{aligned}$$

Aus Abb. 1.2 erkennt man dann sofort als Lösung des Grundproblems:

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\mathbf{r}| \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon'_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{R/|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r} - (R/|\mathbf{r}_1|)^2\mathbf{r}_1|} \right) & \text{für } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases}$$

Folgerung:

Das Feld der auf der Leiteroberfläche *influenzierten* Ladungsverteilung stimmt im Gebiet $x \geq R$ mit dem (COULOMB-) Feld einer bei $(R/|\mathbf{r}_1|)^2\mathbf{r}_1$ gedachten Punktladung *Scheinladung* $qR/|\mathbf{r}_1| < q$ überein.¹¹

Um einen beliebigen Potentialwert auf der Kugel einzustellen, braucht man nur das COULOMB-Potential einer entsprechenden Scheinladung im Kugelmittelpunkt hinzuzufügen.

1.2.4 Allgemeine Theorie der Kapazität

Superpositionsprinzip: Es sei wieder das in 1.2.2 formulierte Grundproblem betrachtet, wobei jetzt speziell

$$\rho = 0 \text{ innerhalb } \mathcal{V}, \quad \Phi_\rho(\infty) = 0 \quad (1.14)$$

Version vom 26. März 2009

¹¹Die Lösung für allgemeinere Ladungsverteilungen ergibt sich durch einfache Überlagerung; vgl. Abschn. 1.3.3.

angenommen sei. Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Phi_A(\mathbf{r}) \text{ Lösung zu } \Phi_A(\mathbf{r}) = \Phi_{A,i} \text{ auf } \mathcal{G}'_i \text{ für alle } i, \\ \Phi_B(\mathbf{r}) \text{ Lösung zu } \Phi_B(\mathbf{r}) = \Phi_{B,i} \text{ auf } \mathcal{G}'_i \text{ für alle } i \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \Phi_C(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_A(\mathbf{r}) + \Phi_B(\mathbf{r}) \text{ Lösung zu:} \\ \Phi_C(\mathbf{r}) = \Phi_{A,i} + \Phi_{B,i} \text{ auf } \mathcal{G}'_i \text{ für alle } i. \end{cases} \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die Überlagerung mehrerer Lösungen zu unterschiedlichen Leiterpotentialen.

Kapazitäten und Influenzkoeffizienten eines Leitersystems: Sei n die Zahl der Gebiete \mathcal{G}'_i : $i = 1, \dots, n$. Dann seien – immer unter der Voraussetzung (1.14) – entsprechend n Fälle betrachtet:

$$\text{Fall } j : \quad \Phi_\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Phi_j & \text{auf } \mathcal{G}'_j, \\ 0 & \text{auf allen übrigen } \mathcal{G}'_i. \end{cases}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \Phi^{(j)}(\mathbf{r}) & \stackrel{\text{def}}{=} \text{Lösung von Fall } j, \\ q_{ij} & \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gesamtladung auf } \partial\mathcal{G}'_i \text{ im Fall } j \end{aligned}$$

folgt dann

$$q_{ij} = C_{ij}\Phi_j, \tag{1.15}$$

wobei die C_{ij} von Φ_j unabhängige Konstanten sind.

Mehrfache Anwendung des Superpositionsprinzips zeigt, daß

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \Phi^{(i)}(\mathbf{r})$$

Lösung von

$$\text{Fall } 0 : \quad \Phi_\rho(\mathbf{r}) = \Phi_i \text{ auf } \mathcal{G}'_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

ist. Mit

$$q_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gesamtladung auf } \partial\mathcal{G}'_i \text{ im Fall } 0$$

folgt dann aus (1.10)

$$q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}$$

und daraus mit (1.15):

$$\boxed{q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}\Phi_j.} \tag{1.16}$$

Die sog. **Kapazitäten** C_{ii} und **Influenzkoeffizienten** C_{ij} ($i \neq j$) hängen nur von der Geometrie des Leitersystems ab! Ihre Berechnung ist i.a. schwer, ihre Messung dagegen leicht. Die Influenzkoeffizienten lassen sich z.B. folgendermaßen bestimmen:

1. Schritt: Potentiale $\Phi_{\nu j}$ auf \mathcal{G}'_{ν} ($\nu = 1, \dots, n$) einstellen, ballistisches Galvanometer zwischen \mathcal{G}'_i und Erde.
2. Schritt: \mathcal{G}'_j erden und am Galvanometerausschlag q_{ij} ablesen.
3. Schritt: C_{ij} aus (1.15) entnehmen.

Wie wir sehen werden, sind diese Koeffizienten jedoch nicht unabhängig voneinander, müssen also nicht alle gemessen werden.

GREENSches Reziprozitätstheorem:

Es sei wieder der o.a. Fall 0 betrachtet. Zusätzlich sei $\Phi'(\mathbf{r})$ eine Lösung von

$$\text{Fall } 0' : \quad \Phi'(\mathbf{r}) = \Phi'_i \text{ auf } \mathcal{G}'_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Mit der entsprechenden Definition

$$q'_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gesamtladung auf } \partial\mathcal{G}'_i \text{ im Fall } 0'$$

folgt dann

$$q'_i = \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \sigma_i^{(')}(\mathbf{r}) \, d\sigma(\mathbf{r})$$

und somit nach (1.11):

$$\begin{aligned} \sum_i q'_i \Phi_i &= \sum_i \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \sigma'_i(\mathbf{r}') \, dS_{\mathbf{r}'} \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int_{\partial\mathcal{G}'_j} \frac{\sigma_j(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}|} \, dS_{\mathbf{r}} \quad \forall \mathbf{r}_i \in \mathcal{G}'_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \sum_{i,j} \int_{\partial\mathcal{G}'_i} \int_{\partial\mathcal{G}'_j} \frac{\sigma'_i(\mathbf{r}') \sigma_j(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}|} \, dS_{\mathbf{r}'} dS_{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unmittelbar das GREENSche **Reziprozitätstheorem**:

$$\boxed{\sum_i q'_i \Phi_i = \sum_i q_i \Phi'_i.}$$

Symmetrie der Influenzkoeffizienten: Sei jetzt ein Indexpaar i, j fest ausgewählt. Mit

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0 \delta_{i\nu} \\ \Phi'_{\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0 \delta_{j\nu} \end{aligned} \right\} \text{ für } \nu = 1, \dots, n$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
 \Phi_0^2 C_{ij} &= \sum_{\nu, \mu} C_{\nu\mu} \Phi_\nu \Phi'_\mu \\
 &\stackrel{(1.16)}{=} \sum_{\nu} q'_\nu \Phi_\nu \\
 &\stackrel{\text{Rezipr.}}{=} \sum_{\nu} q_\nu \Phi'_\nu \\
 &\stackrel{(1.16)}{=} \sum_{\nu, \mu} C_{\nu\mu} \Phi_\mu \Phi'_\nu \\
 &= \Phi_0^2 C_{ji}
 \end{aligned}$$

und somit:

$$\boxed{C_{ij} = C_{ji}} \quad (1.17)$$

Spezialfall zweier Leiter: Im Falle $n = 2$ folgt aus (1.16)

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \underbrace{C_{11} (\Phi_1 - \Phi_2)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \Delta q_1} + (C_{11} + C_{12}) \Phi_2, \\
 q_2 &= \underbrace{C_{21} (\Phi_1 - \Phi_2)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \Delta q_2} + (C_{21} + C_{22}) \Phi_2.
 \end{aligned}$$

Im Falle *vollständiger Influenz*

$$C_{11} = -C_{21}$$

bei festem Φ_2 folgt dann mit (1.17)

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2 = C \underbrace{(\Phi_1 - \Phi_2)}_{\stackrel{\text{def}}{=} U_{12} \text{ Spannung}},$$

wobei:

$$\begin{aligned}
 C \stackrel{\text{def}}{=} C_{11} &= -C_{21} \quad \mathbf{Kapazität} \\
 &= -C_{12} \neq +C_{22} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Beispiel für vollständige Influenz (**Kondensator**):

Wenn \mathcal{G}'_1 ganz von \mathcal{G}'_2 umschlossen ist, dann stimmt nach dem GAUSSschen Gesetz die Ladung Δq_2 auf dem inneren Teil von $\partial \mathcal{G}'_2$ mit dem -1 -fachen der Ladung Δq_1 auf $\partial \mathcal{G}'_1$ überein.

Ein Beispiel ohne vollständige Induktion (eigentlich die Regel) ist die in Abschn. 1.15 behandelte leitende Kugel gegenüber einem geladenen punktförmigen 'Leiter'.

1.3 Allgemeinere Randwertprobleme¹²

1.3.1 DIRICHLETSche und NEUMANNsche Randbedingungen

Gegeben:

- (i) ‘vernünftiges’, endliches, abgeschlossenes Gebiet \mathcal{G} ,
- (ii) disjunkte Oberflächen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ mit $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \partial\mathcal{G}$,
- (iii) $\Phi(\mathbf{r})$ auf \mathcal{O}_1 (**DIRICHLETSche Bedingung**),
- (iv) $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{r})$ auf¹³ \mathcal{O}_2 (**NEUMANNsche Bedingung**),
- (v) $\rho(\mathbf{r})$, hinreichend gutartig, innerhalb \mathcal{G} .

Gesucht: Fortsetzung von $\Phi(\mathbf{r})$ auf ganz \mathcal{G} als Lösung von

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon'_0}$$

(vgl. (1.8)).

Das so formulierte Randwertproblem bezeichnet man als

DIRICHLETSches Problem,	falls $\mathcal{O}_2 = \emptyset$,
NEUMANNsches Problem,	falls $\mathcal{O}_1 = \emptyset$,
Gemischtes Problem,	falls $\mathcal{O}_2 \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_1$.

Version vom 26. März 2009

¹²Die Abschnitte 1.3 und 1.4 werden erst im Anschluß an Kapitel 2 besprochen.

¹³Mit $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ bezeichnet wir immer die Flächennormale am Punkt \mathbf{r} .

Beispiel:

Gegeben:

- (i) Dünne, ideal leitende Scheibe mit Radius R um den Ursprung in der x - y -Ebene innerhalb einer ideal leitenden, geerdeten Hohlkugel um den Ursprung mit Innenradius I ,
- (ii) $\rho(\mathbf{r}) = 0$ im Inneren des Hohlraums außerhalb der Scheibe,
- (iii) $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0$ auf der Scheibe,

Gesucht: Das auf dem Mantel verschwindende elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ innerhalb

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : z > 0, |\mathbf{r}| \leq I\}.$$

Erläuterung: Gemäß (ii) muß

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{G}$$

gelten. (iii) und

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0, \text{ falls } |\mathbf{r}| = I,$$

stellen DIRICHLETSche Bedingungen auf einem Teil von $\partial\mathcal{G}$ dar, während auf dem restlichen Teil von $\partial\mathcal{G}$ aus Symmetriegründen die spezielle NEUMANNschen Bedingung

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 \in [R, I] \end{array} \right\} \implies \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = 0$$

erfüllt sein muß. So betrachtet, liegt also ein gemischtes Problem vor.¹⁴

Die **Eindeutigkeit** der Lösung – zumindest bis auf eine additive Konstante – folgt wie in Abschn. 1.2.2. Die **Existenz** der Lösung (vgl. (Morse und Feshbach, 1953)) kann i.a. gezeigt werden, sofern die Vorgaben konsistent sind.¹⁵

Man beachte, daß in der allgemeinen Formulierung des Randwertproblems Konstanz von Φ auf \mathcal{O}_1 **nicht** vorausgesetzt wurde!

1.3.2 Formale Lösung der Randwertprobleme mithilfe von GREENSchen Funktionen

Indem man von der 1. GREENSchen Identität (1.12) die Gleichung subtrahiert, die sich daraus durch Vertauschung von f und g ergibt, erhält man die sog.

2. GREENSche Identität

$$\int_{\mathcal{G}} \left(f(\mathbf{r}) \Delta g(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}) \Delta f(\mathbf{r}) \right) dV_{\mathbf{r}} = \int_{\partial\mathcal{G}} \left(f(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}) \nabla f(\mathbf{r}) \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}. \quad (1.18)$$

Version vom 26. März 2009

¹⁴Die Lösung für $I \rightarrow \infty$ ist z.B. in (Landau und Lifschitz, 1967, Aufg. 1 zu §4) gegeben.

¹⁵Z.B. dürfen im Falle $\mathcal{O}_2 = \partial\mathcal{G}$ die NEUMANNschen Bedingungen nicht dem GAUSSschen Gesetz widersprechen.

Man löst daher das in 1.3.1 formulierte Randwertproblem i.a. mithilfe der entsprechenden **GREENSchen Funktion** $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, die durch folgende Bedingungen charakterisiert ist:¹⁶

- (i) $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,
 H beliebig differenzierbar für $\mathbf{r} \in \underline{\mathcal{G}}$, $\mathbf{r}' \in \mathcal{G}$,
- (ii) $\Delta_{\mathbf{r}'} H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} \in \underline{\mathcal{G}}$, $\mathbf{r}' \in \mathcal{G}$,
- (iii) $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} \in \underline{\mathcal{G}}$, $\mathbf{r}' \in \mathcal{O}_1$,
- (iv) $\mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{const.}$ für $\mathbf{r} \in \underline{\mathcal{G}}$, $\mathbf{r}' \in \mathcal{O}_2$.

Da nämlich mit

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{\text{def}}{=} -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.19)$$

die GREENSchen Identitäten (für hinreichend gutartiges f) auch auf

$$g(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

für $\mathbf{r} \in \underline{\mathcal{G}}$ anwendbar sind,¹⁷ folgt zusammen mit $f = \Phi$ aus (1.18) und (1.8):

$$\begin{aligned} & -4\pi\Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \\ & = \int_{\partial\mathcal{G}} \Phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} - \int_{\partial\mathcal{G}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} \end{aligned}$$

und daraus als allgemeine Lösung des Randwertproblems – falls überhaupt eine Lösung existiert:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}_2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}_1} \Phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} - \frac{\text{const.}}{4\pi} \int_{\mathcal{O}_2} \Phi(\mathbf{r}') |d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'}|. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Die für $\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ zunächst unbekannte Konstante $\int_{\mathcal{O}_2} \Phi(\mathbf{r}') |d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'}|$ ist entsprechend anzupassen.

Im Falle $\partial\mathcal{G} = \mathcal{O}_1$ sieht man leicht, daß mit (1.20) durch die Greensche Funktion – die übrigens von der genaueren Spezifizierung der Randwerte unabhängig ist – tatsächlich eine Lösung des Randwertproblems gegeben ist.

Version vom 26. März 2009

¹⁶Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit $\underline{\mathcal{G}}$ das **Innere** von \mathcal{G} :

$$\underline{\mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}.$$

Für 2-dimensionale Probleme (Translationsinvarianz in orthogonaler Richtung) ist $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ durch $\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ zu ersetzen (Übungsaufgabe 21).

¹⁷Mithilfe von (1.8)/(1.5) sieht man das leicht, indem man zunächst $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ durch $\int \frac{\delta_\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dV_{\mathbf{r}''}$ mit glattem δ_ϵ ersetzt und den Grenzübergang $\delta_\epsilon \rightarrow \delta$ betrachtet.

1.3.3 Beispiel: Äußeres DIRICHLET-Problem der Kugel

Speziell für den Fall

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| \geq R\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \emptyset, \text{ d.h. } \mathcal{O}_1 = \partial\mathcal{G}\end{aligned}$$

lauten die Bedingungen an die GREENSche Funktion:¹⁸

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= 0 \text{ für } |\mathbf{r}| > R = |\mathbf{r}'|, \\ \Delta_{\mathbf{r}'} H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \text{ für } |\mathbf{r}| > R \leq |\mathbf{r}'|.\end{aligned}$$

Nach (1.2.3) – mit \mathbf{r} statt \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}' statt \mathbf{r} – sind diese Bedingungen für

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{R/|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}' - (R/|\mathbf{r}|)^2\mathbf{r}|}$$

erfüllt.¹⁹

Auswertung von (1.20): Übungsvorschlag; vgl. (Jackson, 1975, Sect. 2.7).

1.4 Reihenentwicklungen

1.4.1 Entwicklung in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten r, ϑ, φ – deren (normierte, dimensionslose) Tangenten wie üblich mit $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ bezeichnet seien, erkennt man aus der Identifizierung von $\mathbf{e} \cdot \text{grad } \Phi$ als Ableitung von Φ in Richtung \mathbf{e} (siehe Anhang) leicht:²⁰

$$\text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

Version vom 26. März 2009

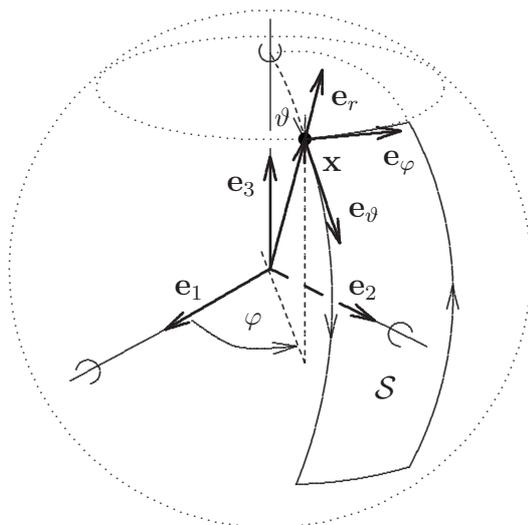
¹⁸Obwohl \mathcal{G} hier nicht endlich ist, lassen sich alle vorhergehenden Überlegungen ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen.

¹⁹Man beachte die aus

$$\frac{R/|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}' - (R/|\mathbf{r}|)^2\mathbf{r}|} = \frac{R}{\sqrt{|\mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - 2R^2 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} + R^4}}$$

folgende Symmetrie $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ der GREENSchen Funktion, die für das DIRICHLETSche Problem generell gegeben ist (vgl. (Gerlich, 1993, Seite 34 unten)).

²⁰Die Kugelkoordinaten sind natürlich nicht global anwendbar. Das spiegelt sich in Scheinsingularitäten wieder, die in den nachfolgenden Formeln auftreten.



$$r \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{x}| = R, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r.$$

Mithilfe der koordinatenunabhängigen Definition der Divergenz und mithilfe des Mittelwertsatzes für Oberflächenintegrale sowie des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erkennt man außerdem für hinreichend gutartige Vektorfelder

$$\mathbf{j} = j^r \mathbf{e}_r + j^\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + j^\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

leicht:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi.$$

Daraus folgt für den LAPLACE-Operator $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi,$$

was sich auch in der Form

$$r^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} \cos \vartheta \quad (1.21)$$

schreiben läßt.²¹

Kugel- und Kugelflächenfunktionen (vgl. (Magnus und Oberhettinger, 1949))

Die sog. *zugeordneten* LEGENDRE-*Polynome* (*Kugelfunktionen 2. Art*)²²

$$P_l^m(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^m}{l! 2^l} (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, +l$$

Version vom 26. März 2009

²¹Wegen $\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\sin^2 \vartheta = 1 - \xi^2$.

²²Die $P_l \stackrel{\text{def}}{=} P_l^0$ bezeichnet man als LEGENDRE-*Polynome* (*Kugelfunktionen 1. Art*).

erfüllen die sog. **verallgemeinerte LEGENDRESche Differentialgleichung**²³

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dP_l^m(\xi)}{d\xi} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) P_l^m(\xi) = 0.$$

Nach (1.21) erfüllen daher die **Kugelflächenfunktionen**

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

die Differentialgleichung

$$\boxed{r^2 \Delta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0.} \quad (1.22)$$

Außerdem gelten

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi),$$

die **Orthonormalitätsrelation**

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}}$$

und das **Additionstheorem**

$$\boxed{P_l(\cos \angle(\vartheta', \varphi'), (\vartheta, \varphi)) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi).}$$

Entwicklungssatz: Sei $g(\vartheta, \varphi)$ eine hinsichtlich $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ quadratintegrale Funktion. Dann gilt für geeignete Koeffizienten a_{lm} :

$$\sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(\vartheta, \varphi) \quad \text{im } L^2\text{-Mittel (bzgl. } d\Omega).$$

Konvergenz im L^2 -Mittel meint hier:

Zu jedem $C > 0$ existiert eine Nullfolge ϵ_N , die der Bedingung

$$\left| \int d\Omega h(\vartheta, \varphi) \left(g(\vartheta, \varphi) - \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right) \right| < \epsilon_N$$

für **alle** stetigen h mit

$$\int d\Omega |h|^2 < C$$

genügt.²⁴

²³Die **Legendresche Differentialgleichung** ergibt sich im Spezialfall $m = 0$.

²⁴Dies ist zwar nicht die übliche, aber eine zweckmäßige äquivalente Definition für **Konvergenz im L^2 -Mittel**.

Lösungen der LAPLACE-Gleichung: Falls $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ für festes $r > 0$ hinsichtlich $d\Omega$ quadratintegrabel ist, dann existieren $a_{lm}(r)$ mit

$$\sum_{l,m} a_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \longrightarrow \Phi(r, \vartheta, \varphi) \quad \text{im Mittel.}$$

Aus der Orthonormalitätsrelation folgt dafür

$$a_{lm}(r) = \int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \Phi(r, \vartheta, \varphi).$$

Falls Φ der LAPLACE-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügt folgt daraus wegen

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} g(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) d\xi$$

mit (1.21)

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \vartheta, \varphi) \right) + \int d\Omega \Phi(r, \vartheta, \varphi) r^2 \Delta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \\ &\stackrel{(1.22)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - l(l+1) \right) a_{lm}(r) \end{aligned}$$

und somit

$$a_{lm}(r) = A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}.$$

Resultat:²⁵

$$\Delta\Phi = 0 \implies \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

(Konvergenz im L^2 -Mittel für festes $r > 0$),

wobei: $A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \Phi(r, \vartheta, \varphi).$

(1.23)

Vorteil:

Die A_{lm}, B_{lm} lassen sich oft relativ leicht aus Randbedingungen bestimmen. Dabei genügt z.B. die Kenntnis von $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ für **einen** festen r -Wert, wenn Φ im Unendlichen gleichmäßig (hins. ϑ, φ) gegen Null konvergiert, weil dann alle A_{lm} Null sein müssen. Entsprechend müssen alle B_{lm} Null sein, wenn $\Phi(\epsilon, \vartheta, \varphi)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ im Mittel gegen eine (hins. $d\Omega$) quadratintegrable Funktion konvergiert.²⁶

Oft sind die stetig von ϑ und φ abhängigen Entwicklungskoeffizienten der Entwicklung (1.23) von $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ nach Potenzen von r an der Stelle $\vartheta = 0$ bekannt. Dann ergeben sich daraus alle A_{lm} und B_{lm} durch Koeffizientenvergleich. Ein wichtiges Beispiel dafür behandelt der nächste Abschnitt.

Abschließende Bemerkung: Falls Φ nur in bestimmten r -Intervallen der LAPLACE-Gleichung genügt, gilt (1.23) natürlich immer noch für diese Bereiche.

²⁵Bzgl. einer Anwendung in der Magnetostatik magnetisierbarer Materie siehe Abschnitt 4.2.3.

²⁶Damit ist noch einmal gezeigt, daß eine Lösung der LAPLACE-Gleichung nur dann im Unendlichen gleichförmig gegen Null konvergieren kann, wenn sie konstant Null ist.

1.4.2 Multipolentwicklung einer beliebig differenzierbaren endlich ausgedehnten Ladungsverteilung

Entwicklung von $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$: Für festes \mathbf{r}_0 verhält sich das Skalarfeld $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ in den disjunkten Bereichen $r > r_0$ und $0 < r < r_0$ ‘vernünftig’ und erfüllt dort die LAPLACE-Gleichung. Somit gilt (1.23) für $0 < r \neq r_0$. Wenn wir die Polarachse in Richtung von \mathbf{r}_0 legen, folgt also aufgrund der Rotationssymmetrie bzgl. dieser Achse:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta).$$

Mit

$$P_l(1) = 1 \quad (\text{n. Additivitätsth. u. Orthonormalitätsrel.})$$

folgt daraus offensichtlich

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) \quad \text{für } \vartheta = 0.$$

Andererseits gilt für $\vartheta = 0$ und $r \neq r_0$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{|r - r_0|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{1 - \frac{r_<}{r_>}} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt somit schließlich:

$$\left. \begin{array}{l} A_l = 0 \\ B_l = r_<^l \end{array} \right\} \text{ für } r > r_0, \quad \left. \begin{array}{l} A_l = r_>^{-l-1} \\ B_l = 0 \end{array} \right\} \text{ für } r < r_0.$$

Aufgrund des Additionstheorems haben wir somit das Resultat.²⁷

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l P_l(\cos \bar{\vartheta}) \\ &= \frac{4\pi}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.24)$$

gilt (Konvergenz im L^2 -Mittel als Funktion von ϑ', φ') für $r \neq r'$ mit :

$$r_< \stackrel{\text{def}}{=} \min \{r, r'\}, \quad r_> \stackrel{\text{def}}{=} \max \{r, r'\}, \quad \bar{\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} \angle \mathbf{r}, \mathbf{r}'.$$

Multipolentwicklung: Sei nun $\rho(\mathbf{r})$ eine beliebig differenzierbare Ladungsverteilung mit

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } r > R.$$

²⁷Es läßt sich sogar zeigen, daß die Konvergenz in (1.24) punktweise, absolut und gleichmäßig in jedem Gebiet mit $\frac{r_<}{r_>} < 1 - \epsilon$ gilt.

Dann gilt für das zugehörige COULOMB-Potential $\Phi_\rho(\mathbf{r})$ die **Multipol-Entwicklung**

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(\mathbf{r}) \quad \text{für } r > R$$

(punktweise Konvergenz) mit den 2^l -**Pol-Termen**

$$\begin{aligned} \Phi_l(\mathbf{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} r^{-l-1} \int r'^l P_l(\cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^{-l-1}}{2^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

und den **Multipol-Momenten**

$$q_{lm} \stackrel{\text{def}}{=} \int Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}.$$

Speziell für $l = 0$ ergibt sich mit $P_0 = 1$ der **Monopol-Term**

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}}_{\text{Gesamtladung}}.$$

Speziell für $l = 1$ ergibt sich mit $P_1(\xi) = \xi$ der **Dipol-Term**

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int r' \cos(\angle \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}$$

und damit das **Dipol-Potential**

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

mit dem **Dipol-Moment**

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}$$

Beispiel: Für die spezielle Ladungsverteilung²⁸ $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2) - q\delta(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2)$ gilt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{q}\mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

sowie

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) \xrightarrow{q\mathbf{l}=\text{const.}} \Phi_1(\mathbf{r}) \quad \text{für } l \rightarrow 0.$$

Speziell für $l = 2$ ergibt sich mit $P_2(\xi) = \frac{3\xi^2 - 1}{2}$ der **Quadrupol-Term**

$$\begin{aligned}\Phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 r^3} \int \frac{3 \cos^2(\angle \mathbf{r}, \mathbf{r}') - 1}{2} r'^2 \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon'_0 |\mathbf{r}'|^5} Q(\mathbf{r}, \mathbf{r})\end{aligned}$$

mit dem **Quadrupoltensor**

$$Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int (3(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)) \rho(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}.$$

Beispiel: Für die spezielle Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2) + q\delta(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2) - 2q\delta(\mathbf{r})$ (**gestreckter Quadrupol**) gilt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad \Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{ql^2}{8\pi\epsilon'_0 r^3} \frac{3 \cos^2(\angle \mathbf{r}, \mathbf{l}) - 1}{2},$$

sowie

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) \xrightarrow{ql = \text{const.}} \Phi_2(\mathbf{r}) \quad \text{für } l \rightarrow 0.$$

1.4.3 Abschließende Bemerkungen

Andere Reihenentwicklungen: Z.B. Entwicklung mit Zylinderfunktionen in Zylinderkoordinaten.

Hinlänglichkeit der Konvergenz im L^2 -Mittel: Punktweise Konvergenz läßt sich notfalls durch makroskopische Glättung erreichen (vgl. Abschn. 2.2.2).

²⁸Streng genommen müßte man die δ -Funktion durch geeignete Glockenfunktionen approximieren.

Kapitel 2

MAXWELLSche Gleichungen für das Vakuum

2.1 Die magnetische Kraftflußdichte

2.1.1 Festlegung von \mathbf{B}

In der Regel geht es in der klassischen Elektrodynamik darum, das *elektrische Feld*¹ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die *magnetische Kraftflußdichte* $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ zu vorgegebenen $\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zu bestimmen.² Die Bedeutung der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ liegt dabei in der als exakt angesehenen Gleichung

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.1)$$

für die sog. LORENTZ-*Kraftdichte*:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gesamtkraft auf die felderzeugenden} \\ \text{Ladungen innerhalb } \mathcal{G} \text{ zur Zeit } t \end{array} \right\} = \int_{\mathcal{G}} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}.$$

Die willkürliche Konstante c' in (2.1) hängt vom Maßsystem ab.³ In der Praxis testet man die elektromagnetischen Felder aus durch die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, die sie auf eine mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Probeladung q_{Probe} ausüben. Sie ist gemäß (2.1) *näherungsweise* durch

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \approx q_{\text{Probe}}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q_{\text{Probe}}\frac{c'}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.2)$$

gegeben.⁴

Version vom 26. März 2009

¹Der **elektrostatische Fall** $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ wurde bereits in Kapitel 1.1 behandelt.

²Mitunter ist allerdings nur ein Teil der Strom-Ladungs-Verteilung explizit gegeben, der Rest nur implizit durch Material-‘Konstanten’ und Randbedingungen; vgl. Kap. 4.

³Z.B. wählt man $c' = c \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vakuumllichtgeschw.}$ im praktischen Maßsystem, dagegen $c' = 1$ im GAUSSSchen Maßsystem.

⁴Nur im (unrealisierbaren) Limes $q_{\text{Probe}} \rightarrow 0$ liefert (2.2) den Quotienten $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)/q_{\text{Probe}}$ exakt. Für endliches q_{Probe} läßt (2.2) die davon ausgehenden Zusatzfelder mit ihrer – bei starker

2.1.2 Unverständlichkeit der LORENTZ-Kraft vom nichtrelativistischen Standpunkt aus

Allgemein gilt:

- (i) Kraft einer (für alle Zeiten) **ruhenden** Punktladung q_2 am Ort \mathbf{r}_2 auf eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 in **gleichförmigem Bewegungszustand**:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Vom **nichtrelativistischen** Standpunkt aus gesehen **müßte** auch gelten:

- (ii) Die Kraft aus (i) gilt auch für den Fall, daß sich die felderzeugende Ladung (für alle Zeiten) im Zustand gleichförmiger Bewegung befindet.

Aufgrund der Additivität von Kräften also:

Nach (i) und (ii) könnte ein elektrostatisch neutraler Strom keine Kraft auf eine bewegte Probeladung ausüben.

- (ii) steht somit im Widerspruch zur experimentellen Erfahrung (LORENTZ-Kraft)!

2.1.3 Relativistischer Ursprung von \mathbf{B}

Hypothese:⁵

Stationäre Ladungs-Strom-Verteilungen üben auf eine **ruhende** Probeladung Kräfte aus, die sich nach den Gesetzen der Elektrostatik berechnen.

Problem: Gegeben seien

- (i) eine **stationäre** Ladungs-Strom-Verteilung der Form

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} j\mathbf{e}_x & \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

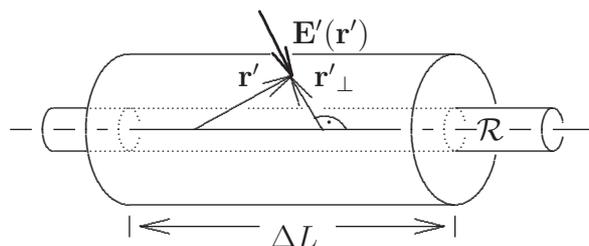
wobei $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq R^2\}$, und

- (ii) eine Probeladung q am Ort \mathbf{r} mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$.

Version vom 26. März 2009

Beschleunigung durchaus erheblichen – sog. **Strahlungsreaktion** unberücksichtigt.

⁵Für die MAXWELLSche Theorie ist diese Hypothese gültig.

Abb. 2.1: \mathbf{E} -Feld eines ‘neutralen’ Stromes im bewegten Bezugssystem.

Man bestimme **relativistisch** die Kraft \mathbf{F} , die die im Mittel als neutral angenommene Ladung der stromführenden Röhre \mathcal{R} auf die Probeladung ausübt.

Anwendung der Hypothese: Die **Vierer-Stromdichte** $(c\rho, \mathbf{j})$ transformiert sich gem. **Relativitätstheorie** wie (ct, \mathbf{r}) (siehe Anhang A.2). Durch spezielle LORENTZ-Transformation ergibt sich also nach Gleichung (A.2) für $(c\rho, \mathbf{j}) = (0, \mathbf{j})$:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\frac{v}{c^2} \mathbf{j} \gamma_v \\ &= \begin{cases} \text{Ladungsdichte innerhalb } \mathcal{R}, \text{ gesehen} \\ \text{im Ruhesystem der Probeladung,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_v \stackrel{\text{def}}{=} 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Da nach dem GAUSSschen Gesetz gemäß Abbildung 2.1

$$2\pi |\mathbf{r}'_{\perp}| |\mathbf{E}'(\mathbf{r}')| \Delta L = \frac{1}{\epsilon'_0} q_{\Delta L} = \frac{1}{\epsilon'_0} \rho' \pi R^2 \Delta L$$

gilt, folgt somit⁶

$$|\mathbf{E}'(\mathbf{r}')| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \frac{v}{c^2} \frac{2\mathbf{J}}{|\mathbf{r}'_{\perp}|} \gamma_v \right|,$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\stackrel{\text{def}}{=} \pi R^2 \mathbf{j} \\ &= \begin{cases} \text{Strom durch beliebigen Querschnitt von } \mathcal{R} \\ \text{im } \mathbf{ursprünglichen} \text{ Koordinatensystem.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Richtung von \mathbf{E}' stimmt mit derjenigen von $\mathbf{v} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{r}')$ überein. Die Kraft $\mathbf{F}'(\mathbf{r}')$ auf die Probeladung q_{Probe} in ihrem **Ruhesystem** ist also

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}') = \mathbf{F}'_{\perp}(\mathbf{r}') = \gamma_v q \frac{e'}{c} \mathbf{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c c'} \frac{2\mathbf{J} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'_{\perp}|^2}.$$

⁶Wir folgen der üblichen Gewohnheit, L -Vektoren mitunter als L' -Vektoren aufzufassen, indem wir die Komponenten des betr. L -Vektors auf die Basis von L' beziehen. Entsprechendes gilt für die Interpretation von L' -vektoren als L -Vektoren. Das geht natürlich nur gut, solange die Koordinatensysteme von L und L' entsprechend korreliert sind.

Aufgrund des Transformationsverhaltens der Kraft haben wir somit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \frac{c'}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c c'} \frac{2\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\perp|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c c'} \frac{2\mathbf{J} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'_\perp|^2}$$

für den Spezialfall $\mathbf{v} \sim \mathbf{j}$ bewiesen – im Einklang mit (2.2) und der MAXWELLSchen Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \hat{\mu}_0 \mathbf{j}, \quad \hat{\mu}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon'_0 c c'}, \quad (2.3)$$

der Magnetostatik im Vakuum (siehe Kapitel 3; insbes. Definition der Stromeinheit *Ampere*).

Anschaulich ist dieser Effekt so zu verstehen, daß aufgrund der geschwindigkeits-abhängigen LORENTZ-Kontraktion ein im Labor neutraler Strom im Ruhesystem der Probeladung nicht mehr neutral erscheint und daher eine elektrostatische Kraft ausübt.

2.2 Aufstellung der Gleichungen

2.2.1 Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in LORENTZ-invarianter Form

Faßt man die elektromagnetischen Felder zum sog. *Feldstärke-Tensor*

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} F^{00} & \dots & F^{03} \\ \vdots & & \vdots \\ F^{30} & \dots & F^{33} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c'} E_x & -\frac{1}{c'} E_y & -\frac{1}{c'} E_z \\ +\frac{1}{c'} E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +\frac{1}{c'} E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +\frac{1}{c'} E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

zusammen, dann läßt sich (2.1) zusammen mit der Gleichung

$$f^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

für die durch

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gesamtleistung an den felderzeugenden} \\ \text{Ladungen innerhalb } \mathcal{G} \text{ zur Zeit } t \end{array} \right\} = \int_{\mathcal{G}} c f^0(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}$$

charakterisierte – von \mathbf{B} unabhängige – Leistungsdichte $c f^0(\mathbf{r}, t)$ in der Form⁷

$$f^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{c'}{c} F^\mu{}_\nu(\mathbf{r}, t) j^\nu(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

Version vom 26. März 2009

⁷Das Herauf- und Herunterziehen von Indizes ist stets im Sinne der Regel

$$A_\nu = \begin{cases} +A^0 & \text{falls } \nu = 0 \\ -A^\nu & \text{falls } \nu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

zu verstehen.

schreiben, wobei

$$\boxed{f^0(\mathbf{r}, t), f^1(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} f_x(\mathbf{r}, t) \text{ usw.}} \quad (2.6)$$

die sog. **Vierer-Kraftdichte** und

$$\boxed{j^0(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} c\rho(\mathbf{r}, t), j^1(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} j_x(\mathbf{r}, t) \text{ usw.}} \quad (2.7)$$

die Vierer-Stromdichte bezeichnet. Hieraus erkennt man, daß (2.4) ein (antisymmetrischer) kontravarianter LORENTZ-Tensor 2. Stufe sein muß, d.h. daß bei Bezugssystemwechsel

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^{0'} & \cdots & \Lambda_3^{0'} \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_0^{3'} & \cdots & \Lambda_3^{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

gilt:⁸

$$\boxed{F^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow F^{\mu'\nu'}(\mathbf{r}', t') = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\beta}^{\nu'} F^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t).} \quad (2.9)$$

Dann ist aber auch⁹

$$G^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & +B_x & +B_y & +B_z \\ -B_x & 0 & +\frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ -B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & +\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & +\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ein solcher Tensor. Wenn nun – wie wir im folgenden annehmen – die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}); \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

in **jedem** Inertialsystem gelten, dann ist das äquivalent zur Gültigkeit der sog. **MAXWELLSchen Gleichungen**

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mu}_0 j^\nu(\mathbf{r}, t)} \quad (2.11)$$

und

$$\boxed{\partial_\mu G^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = 0,} \quad (2.12)$$

wobei

$$(\partial_0, \dots, \partial_3) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Version vom 26. März 2009

⁸Wir benutzen die EINSTEINSche Summenkonvention.

⁹Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit ϵ den total antisymmetrischen Tensor

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte die ‘Dualität’ ($F^{\mu\nu} \hat{=} G^{\mu\nu}$) $\hat{=} (\frac{1}{c} \mathbf{E} \hat{=} -\mathbf{B})$.

2.2.2 Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in üblicher Form

Direkte Auswertung von (2.11) zeigt die Äquivalenz zu den beiden Gleichungen:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \hat{\mu}_0 \left(\epsilon'_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{j} \right)}, \quad (2.13)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon'_0} \rho}. \quad (2.14)$$

Entsprechend ist (2.12) äquivalent zu den beiden Gleichungen:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}}, \quad (2.15)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}. \quad (2.16)$$

(2.13)–(2.16) sind die MAXWELLSchen Gleichungen ‘in üblicher Form’.

Da die MAXWELLSchen Gleichungen linear sind, kann man aus makroskopischer Sicht alle Felder als beliebig differenzierbar voraussetzen. Denn wenn $\mathbf{E}_\lambda, \mathbf{B}_\lambda$ Lösung zu $\rho_\lambda, \mathbf{j}_\lambda$ ist, dann ergibt sich – bei hinreichend gutartiger λ -Abhängigkeit – durch Wichtung mit einer reellwertigen Funktion $g(\lambda)$ wieder eine Lösung $\int g(\lambda) \mathbf{E}_\lambda d\lambda, \int g(\lambda) \mathbf{B}_\lambda d\lambda$ zu $\int g(\lambda) \rho_\lambda d\lambda, \int g(\lambda) \mathbf{j}_\lambda d\lambda$. Durch geeignete, makroskopisch unmerkliche, Mittelung¹⁰ läßt sich also stets beliebige Differenzierbarkeit einrichten.¹¹ Mittelung über die Zeit begründet übrigens die physikalische Relevanz der Untersuchung zeitunabhängiger Strom-Ladungs-Verteilungen.

Transformationsverhalten der Felder: Der Übergang zu einem Bezugssystem, daß sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, wird durch eine **spezielle LORENTZ-Transformation**, d.h. durch (2.8) mit der speziellen Matrix

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^{0'} & \cdots & \Lambda_3^{0'} \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_0^{3'} & \cdots & \Lambda_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c} \gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Der gemäß (2.9) transformierte Feldstärke-Tensor wird analog (2.4)

Version vom 26. März 2009

¹⁰Es scheint wohl grundsätzlich so zu sein, daß sich makroskopische Gesetze nur auf solche ‘mikroskopisch gültigen’ Gesetze in naheliegender Weise zurückführen lassen, die stabil bzgl. Mittelwertbildung und in diesem Sinne linear sind. Das mag wohl auch der Grund dafür sein, daß man für die Elementarteilchen bislang nur die **lineare** Quantenmechanik zur Verfügung hat.

¹¹Die Maxwellischen Gleichungen machen aber auch für verallgemeinerte Funktionen (*Distributionen*) Sinn.

interpretiert, wobei:

$$\begin{aligned} E'_{x'}(\mathbf{r}', t') &= E_x(\mathbf{r}, t), & B'_{x'}(\mathbf{r}', t') &= B_x(\mathbf{r}, t), \\ E'_{y'}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(E_y(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} v B_z(\mathbf{r}, t) \right), & B'_{y'}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(B_y(\mathbf{r}, t) - \frac{v}{c c'} E_z(\mathbf{r}, t) \right), \\ E'_{z'}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(E_z(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} v B_y(\mathbf{r}, t) \right), & B'_{z'}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(B_z(\mathbf{r}, t) - \frac{v}{c c'} E_y(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned}$$

Vom räumlichen Koordinatensystem unabhängig ausgedrückt, transformiert sich also das elektromagnetische Feld gemäß:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \right), \\ \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}}{c c'} \times \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Anmerkung: Hier bezeichnet \parallel die Komponente des jeweiligen Vektors parallel zur Bewegungsrichtung und \perp entsprechend die Komponente senkrecht dazu; vgl. Abschn. 2.1.2 von (Lücke, ein).

Daraus ergibt sich in nichtrelativistischer Näherung:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &\approx \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &\approx \mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}}{c c'} \times \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

(2.17) zeigt, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} nur verschiedene Aspekte einunddesselben Phänomens sind, das man als *elektromagnetisches Feld* bezeichnet.

Einschränkungen an die Vierer-Stromdichte: $j^{\mu}(\mathbf{r}, t)$ sei von nun ab in der Regel beliebig differenzierbar vorausgesetzt. Außerdem wird $j^{\mu}(\mathbf{r}, t)$ in realistischen Fällen stets **endliche räumliche** Ausdehnung haben. Weiterhin muß gemäß¹²

$$\begin{aligned} 0 = c c' \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{j} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (2.13) \\ (2.14) \end{array}$$

die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.18)$$

gelten. Es sei daran erinnert (vgl. Abschn. 4.4.4 von (Lücke, ein)), daß (2.18) nach dem GAUSSschen Satz äquivalent zur Ladungserhaltung¹³

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}}_{\text{Gesamtladung in } \mathcal{G}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}}_{\text{Ladungsstrom durch } \partial \mathcal{G}} = 0$$

ist.

Version vom 26. März 2009

¹²In relativistischer Schreibweise lautet (2.18) $\partial_{\nu} j^{\nu} = 0$ und folgt aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ direkt aus (2.11).

¹³Mit Paarerzeugung und -vernichtung ist (2.18) aber durchaus vereinbar.

2.3 Anwendung des Satzes von STOKES auf die MAXWELLSchen Gleichungen

2.3.1 FARADAYSches Induktionsgesetz

Bereits in Abschnitt 4.3.4 von (Lücke, ein) wurde gezeigt, daß die (vektorielle) MAXWELLSche Gleichung (2.15) aufgrund des Satzes von STOKES äquivalent zu dem Induktionsgesetz

$$\underbrace{\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}}_{\text{induzierte Spannung}} = -\frac{c'}{c} \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}}_{\text{magn. Kraftfluß durch } \mathcal{S}}$$

für eine Leiterschleife längs des Randes $\partial\mathcal{S}$ eines jeden **festen** (orientierten) Flächenstücks \mathcal{S} ist. Allgemeiner lautet das FARADAYSche *Induktionsgesetz*¹⁴

$$\underbrace{\int_{\partial\mathcal{S}_t} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{r}}_{\text{induzierte Spannung}} = -\frac{c'}{c} \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}}_{\text{magn. Kraftfluß durch } \mathcal{S}_t}, \quad (2.19)$$

wobei jetzt das Flächenstück \mathcal{S}_t zeitlich veränderlich sein darf und $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ jeweils die Geschwindigkeit desjenigen Leiterpunktes bezeichnet, der sich zur Zeit t am Ort \mathbf{r} befindet. Es läßt sich ableiten, indem man zusätzlich zu (2.15) noch (2.16) verwendet:

Offensichtlich ist nur noch¹⁵

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \right) \Big|_{t=t_0} = - \int_{\partial\mathcal{S}_{t_0}} (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)) \cdot d\mathbf{r}$$

zu zeigen. Dazu wählen wir eine glatte, der Orientierung von $\partial\mathcal{S}_{t_0}$ entsprechende, Parametrisierung

$$\partial\mathcal{S}_{t_0} = \{\mathbf{r}(s) : s \in [0, 1]\}$$

und bezeichnen jeweils mit $\mathbf{r}(s, t)$ die Bahnkurve des zum Parameter s gehörigen Leiterpunktes. Dann überstreicht die Leiterschleife während des Zeitintervalls $[t_0, t_0 + \Delta t]$ das orientierte Flächenstück

$$\Delta\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(s, t) : s \in [0, 1), t \in [t_0, t_0 + \Delta t]\}$$

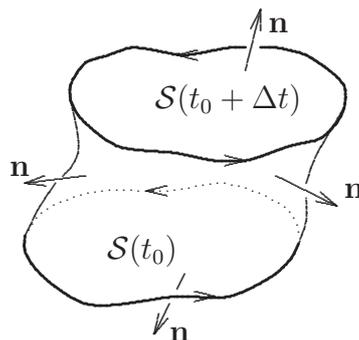
(siehe Abb. 2.2). Da $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$ nach Voraussetzung quellfrei ist, verschwindet das

Version vom 26. März 2009

¹⁴Eine Änderung der Tangentialkomponente von $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (z.B. zur Angleichung an die Gewindigkeit der Leitungselektronen) hätte hier keinen Einfluß.

¹⁵Wegen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_{t_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \right) \Big|_{t=t_0} + \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \right) \Big|_{t=t_0}.$$

Abb. 2.2: Zeitlich veränderliche Leiterschleife¹⁶ längs ∂S_t

Integral dieses Vektorfeldes über die **geschlossene** (orientierte) Oberfläche, die von ΔS , $S_{t_0+\Delta t}$ und $-S_{t_0}$ gebildet wird. Somit gilt tatsächlich:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{S_{t_0+\Delta t}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} - \int_{S_{t_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \right) \\
 &= - \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta S} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \\
 &= - \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(\int_0^1 \mathbf{B}(\mathbf{r}(s, t), t_0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(s, t) \right) ds \right) dt \\
 &= - \int_0^1 \mathbf{B}(\mathbf{r}(s, t_0), t_0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s, t_0) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(s, t) \Big|_{t=t_0} \right) dt \\
 &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}(s, t_0), t_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(s), t_0)) dt \\
 &= - \int_{\partial S_{t_0}} (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)) \cdot d\mathbf{r}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.3.2 Elektromagnetische Potentiale

Sei $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ein stetig differenzierbares elektromagnetisches Feld. Dann ist $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ gemäß (2.16) divergenzfrei und somit¹⁷

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = - \int_0^1 s \mathbf{r} \times \mathbf{B}(s\mathbf{r}, t) ds$$

gemäß Gl. (4.98) von (Lücke, ein) ein Vektorpotential von $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

Version vom 26. März 2009

¹⁶Bei Bewegung in entgegengesetzter Richtung zeigen alle Flächennormalen ins Innere des Gebietes.

¹⁷Bzgl. der Vierer-Version

$$A_\mu(x) = \int_0^1 s x^\nu F_{\nu\mu}(sx) ds$$

dieser sog. POINCARÉ-Konstruktion, die durch die Bedingung $x^\mu A_\mu(x) = 0$ (*vollständig kovariante Eichung*) eindeutig charakterisiert ist, siehe (Okabayashi, 1984).

Nach (2.15) ist somit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

rotationsfrei und folglich (vgl. Abschn. 4.2.3 u. Gl. (4.35) von (Lücke, ein))

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}'$$

(für bel. festes \mathbf{r}_0) nach dem Satz von STOKES ein wohldefiniertes Skalarpotential von $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, t).$$

Damit gilt also:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.20)$$

Ganz allgemein bezeichnet man Felder Φ, \mathbf{A} , für die (2.20) gilt, als **elektromagnetische Potentiale**.

Die elektromagnetischen Potentiale zu vorgegebenen $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sind durch (2.20) nicht eindeutig festgelegt, da eine **Eichtransformation**

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi'(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \text{grad } f(\mathbf{r}, t) \end{array} \right.} \quad (2.21)$$

mit einem beliebigen (hinr. gutart.) Skalarfeld $f(\mathbf{r}, t)$ stets wieder auf Lösungen von (2.20) zu gleichen $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ führt. Umgekehrt sieht man leicht, daß je zwei Lösungen von (2.20) durch eine Eichtransformation (2.21) ineinander übergeführt werden können.

Diese Vielfalt der elektromagnetischen Potentiale wird gewöhnlich durch geeignete Eichkonventionen eingeschränkt. Beliebte Eichbedingungen sind z.B. die **COULOMB-Eichung**

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.22)$$

oder die **LORENTZ-Eichung**

$$\frac{1}{cc'} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.23)$$

Durchführbarkeit der Eichungen: Von einer beliebigen Lösung Φ, \mathbf{A} von (2.20) gelangt man genau dann zur COULOMB-Eichung durch eine Eichtransformation (2.21), wenn man für f eine Lösung der **inhomogenen LAPLACE-Gleichung**

$$\Delta f(\mathbf{r}, t) = \underbrace{-\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

wählt.¹⁸ Die Bezeichnung **COULOMB-Eichung** hat ihren Grund darin, daß aus (2.22) und (2.20) mit der MAXWELLSchen Gleichung (2.14)

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0'}\rho(\mathbf{r}, t)$$

folgt. Falls also die Normierung $\Phi(\infty) = 0$ möglich ist,¹⁹ stimmt $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (für räumlich begrenzte Ladungsverteilungen) mit dem zugehörigen COULOMB-Potential (1.6) überein. Falls $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ im Unendlichen hinreichend schnell abfällt, dann wissen wir bereits (siehe Lemma 4.5.1 von (Lücke, ein)), daß

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

ein Vektorpotential ist, das der COULOMB-Bedingung genügt, und zwar das einzige, das im Unendlichen verschwindet.

Ausgehend von beliebigen Φ, \mathbf{A} erfüllen die gemäß (2.21) transformierten Potentiale Φ', \mathbf{A}' die LORENTZ-Bedingung, wenn f die **inhomogene Wellengleichung**²⁰

$$\square f(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{cc'} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}_{\text{Inhomogenität}}, \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{Wellenoperator}$$

erfüllt. Mithilfe der retardierten (und der entsprechenden avancierten) Potentiale, die in Abschnitt 4.1.1 eingeführt werden, läßt sich leicht zeigen, daß ein solches f immer existiert.

Während die COULOMB-Eichung mit der Zusatzbedingung des Verschwindens im Unendlichen die elektromagnetischen Potentiale eindeutig festlegt, läßt die LORENTZ-Eichung noch relativ viel Freiheit:

Die Eichtransformation (2.21) zerstört nicht die LORENTZ-Bedingung (2.23), falls f die homogene Wellengleichung erfüllt. Wenn also bereits die Potentiale Φ, \mathbf{A} die LORENTZ-Bedingung erfüllen, so auch die mit solchem f eichtransformierten.²¹

Version vom 26. März 2009

¹⁸Eine solche Lösung existiert immer, wie in (Lücke, 1995) gezeigt wurde.

¹⁹Im Falle $\rho = 0$ spricht man dann von **Strahlungseichung**.

²⁰Bzgl. der Konstruktion von Lösungen der inhomogenen Wellengleichung mit hinreichend gutartiger rechter Seite (**Inhomogenität**) siehe Abschn. 4.1.1.

²¹Eine einfache Lösung der homogenen Wellengleichung $\square f = 0$ ist z.B.

$$f(\mathbf{r}, t) = \int e^{-r'^2} e^{-i(r'ct - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')} dV_{\mathbf{r}'}$$

MAXWELLSche Gleichungen in Potentialform: Wegen

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0, \quad \nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

(siehe Anhang) folgt umgekehrt unmittelbar, daß die Existenz elektromagnetischer Potentiale (2.20) bereits die Gültigkeit der *homogenen*²² MAXWELLSchen Gleichungen (2.15) und (2.16) garantiert. Also:²³

$$\text{MAXWELLSche Gleichungen} \iff (2.20) + (2.13) + (2.14).$$

Andererseits folgt mit

$$\boxed{A^0(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad \begin{pmatrix} A^1(\mathbf{r}, t) \\ A^2(\mathbf{r}, t) \\ A^3(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.24)$$

$$(2.20) \iff F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Mit

$$(2.13) + (2.14) \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = \hat{\mu}_0 j^\nu$$

(siehe Anfang von Abschn. 2.2.2) ergibt sich damit insgesamt:

$$\boxed{\text{MAXWELLSche Gleichungen} \iff \begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \hat{\mu}_0 j^\nu \\ +(2.20) \end{cases}} \quad (2.25)$$

Vorteile der LORENTZ-Konvention: In LORENTZ-Eichung vereinfacht sich die rechte Seite von (2.25) zu den *inhomogenen Wellengleichungen*

$$\square A^\mu(\mathbf{r}, t) = \hat{\mu}_0 j^\mu(\mathbf{r}, t). \quad (2.26)$$

Ein weiterer Vorteil der LORENTZ-Eichung besteht in ihrer LORENTZ-Kovarianz; d.h. wenn man bei Bezugssystemwechsel

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^\nu$$

A^μ wie einen kontravarianten Vierer-Vektor, also gemäß

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) \longrightarrow A^{\mu'}(\mathbf{r}', t') = \Lambda_{\nu}^{\mu'} A^\nu(\mathbf{r}, t),$$

transformiert, dann bleibt dabei die LORENTZ-Bedingung erhalten.

²²Die Vierer-Stromdichte $(c\rho, \mathbf{j})$ wird als vorgegebene Inhomogenität des MAXWELLSchen Differentialgleichungssystems für \mathbf{E}, \mathbf{B} aufgefaßt.

²³Streng genommen, haben wir die Existenz der elektromagnetischen Potentiale aus den MAXWELLSchen Gleichungen nur für hinreichend schnell im Unendlichen abfallende Felder gezeigt.

2.4 Zusammenfassung

LORENTZ-Kraftdichte:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

LORENTZ-*Boost* zur Geschwindigkeit \mathbf{v} :

$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma_v (\mathbf{r}_{\parallel} - \frac{v}{c}ct)$	$\mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$
$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$	$\mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma_v (\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$
$ct' = \gamma_v (ct - \frac{v}{c} \cdot \mathbf{r})$	$\mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma_v (\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}}{cc'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$

MAXWELLSche Gleichungen:

$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$	$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mu}_0 \left(\epsilon'_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right)$
$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{c'}{c} \frac{d}{dt} \int_{S_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$$

Elektromagnetische Potentiale:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

COULOMB-Eichung hinreichend schnell abfallender Felder:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

LORENTZ-Eichung

$$\partial_{\nu} A^{\nu}(\mathbf{r}, t) = 0$$

impliziert

$$\text{MAXWELLSche Gleichungen} \iff \square A^{\mu}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mu}_0 j^{\mu}(\mathbf{r}, t),$$

wobei:

$$\begin{aligned}
 (\partial_\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{r}} \right), & \partial^\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +\partial_0 & \text{für } \nu = 0 \\ -\partial_\nu & \text{sonst} \end{cases}, & \square &\stackrel{\text{def}}{=}} \partial_\nu \partial^\nu, \\
 (A^\mu(\mathbf{r}, t)) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c'} \Phi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right), & (j^\mu(\mathbf{r}, t)) &\stackrel{\text{def}}{=} (c\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)), \\
 \hat{\mu}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon'_0 c c'}.
 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Grundlagen

Wie bereits erwähnt, sind die MAXWELLSchen Gleichungen **linear**. Wenn man also eine partikuläre Lösung $\mathbf{E}_{\text{part}}, \mathbf{B}_{\text{part}}$ von (2.13)–(2.16) bereits kennt, dann läßt sich jede andere Lösung \mathbf{E}, \mathbf{B} in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{\text{frei}}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_{\text{frei}}(\mathbf{r}, t)$$

schreiben, wobei $\mathbf{E}_{\text{frei}}, \mathbf{B}_{\text{frei}}$ eine Lösung der *freien MAXWELLSchen Gleichungen*, d.h. eine Lösung von (2.13)–(2.16) zu $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$, ist. Im Falle zeitunabhängiger ρ, \mathbf{j} (statische Ladungs- und stationäre Strom-Verteilung) läßt sich $\mathbf{E}_{\text{part}}, \mathbf{B}_{\text{part}}$ stets t -unabhängig (*statisches elektromagnetische Feld*) wählen:

$$\mathbf{E}_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

wobei:

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\mu}_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Die Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld entkoppeln auf diese Weise also vollständig.

Während sich die *Elektrostatik* mit (3.2) beschäftigt (vgl. Kap. 1), beschäftigt sich die *Magnetostatik* mit (3.1). Dabei ist die erste der Gleichungen (3.1) natürlich nur im Falle $\text{div } \mathbf{j} = 0$ lösbar, was aber durch die Kontinuitätsgleichung garantiert ist.

3.1.1 BIOT-SAVARTSches Gesetz

B-Feld zu vorgegebenem \mathbf{j} : Für realistische Stromdichten, also glatte Stromdichten endlicher Ausdehnung, kann man verlangen, daß $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ im Unendlichen (gleichmäßig

in allen Richtungen) verschwindet. Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis (siehe Anhang) ist damit die physikalische Lösung von (3.1) eindeutig festgelegt zu:¹

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \stackrel{(3.1)}{=} \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}. \quad (3.3)$$

Gemäß

$$\begin{aligned} \text{rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} &= \int \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &= - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{\mathbf{r}'} \end{aligned}$$

ergibt sich daraus das BIOT-SAVARTSche Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{\mathbf{r}'}.$$

LAPLACESches Gesetz: Gegeben sei ein **dünn**er ‘Draht’ längs eines geschlossenen Weges \mathcal{C} , der von dem **stationären** Strom I durchflossen werde (Vorzeichen von I entsprechend der Orientierung von \mathcal{C}). Da dann (bei Fehlen weiterer Stromverteilungen)

$$\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{\mathbf{r}'} \approx -I \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times d\mathbf{r}'$$

gilt, folgt aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz das LAPLACESche Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \int_{\mathcal{C}} \underbrace{\frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}}_{\approx d\mathbf{B}(\mathbf{r})_{\mathbf{r}'}} \times d\mathbf{r}',$$

das umso genauer gilt, je größer $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ gegenüber dem Drahtdurchmesser ist.

B-Feld eines Ringstromes auf der Symmetrieachse: Sei nun speziell \mathcal{C} ein Kreis vom Radius $R \gg$ Drahtdurchmesser in der x - y -Ebene mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung, der vom stationären Strom I (im Rechtsschraubensinn relativ zur gerichteten z -Achse) durchflossen wird. Wir wollen das zugehörige **B**-Feld auf der z -Achse mithilfe des LAPLACESchen Gesetzes bestimmen (vgl. Abb. 3.1): Aus Symmetriegründen gilt

$$B_x = B_y = 0 \quad \text{auf der } z\text{-Achse.}$$

¹Man beachte, daß das Vektorpotential hier wegen $\text{div } \mathbf{j} = 0$ der COULOMB-Eichbedingung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ genügt.

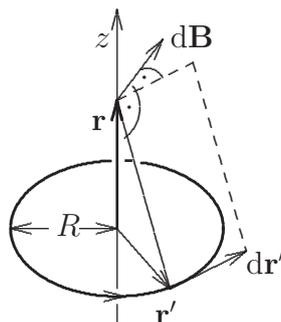


Abb. 3.1: Stromdurchflossener Ring

Es genügt also, B_z zu berechnen. Nach dem LAPLACESchen Gesetz gilt dafür **auf der x -Achse**, d.h. für $\mathbf{r} = (0, 0, z)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{\mu_0} dB_z(\mathbf{r})_{\mathbf{r}'} &= \underset{\text{LAPLACE}}{-\frac{I}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \mathbf{e}_z \cdot ((\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times d\mathbf{r}')} \\
 &= \underset{\text{Zykl. Spatpr.}}{-\frac{I}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{r}'} \\
 &= \frac{I}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\
 &= \frac{IR}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} |d\mathbf{r}'| \\
 &= (R^2 + z^2)^{-3/2} IR |d\mathbf{r}'|
 \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
 B_z(0, 0, z) &= \int_{\text{Kreis}} dB_z(0, 0, z)_{\mathbf{r}'} \\
 &= \underline{\underline{\frac{\mu_0}{2} IR^2 (R^2 + z^2)^{-3/2}}}.
 \end{aligned}$$

B-Feld im Zentrum eines Solenoids: Wir betrachten nun entsprechend eine gleichmäßig dicht gewickelte, zylindrische Spule (**Solenoid**) mit der Länge l , dem Radius R und N Windungen (siehe Abb. 3.2). Wir wollen uns dabei mit einer **Näherungsrechnung** für das **B-Feld** im Spulenmittelpunkt zufrieden geben:

Wir legen die Koordinaten so, daß die z -Achse mit der Symmetrieachse der Spule und der Koordinatenursprung mit dem Spulenmittelpunkt zusammenfällt. Dann rechnen wir so, als befände sich zwischen z und $z + dz$ jeweils ein Ringstrom um die z -Achse mit Umlaufradius R und Umlaufstrom $\frac{IN}{l} dz$. Damit gilt dann nach obigem Ergebnis:

$$\frac{2}{\mu_0} B_z(0) = \frac{INR^2}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} (R^2 + z^2)^{-3/2} dz.$$

Mit

$$R = \sqrt{R^2 + z^2} \sin \vartheta, \quad z = R \cot \vartheta, \quad dz = -\frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta$$

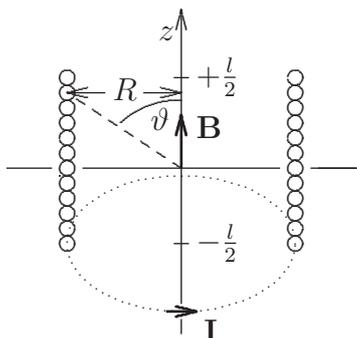


Abb. 3.2: Querschnitt eines Solenoids

folgt daraus²

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\hat{\mu}_0} B_z(0) &= -\frac{INR^2}{l} \int_{\arccctg \frac{-l}{2R}}^{\arccctg \frac{+l}{2R}} \frac{\sin^3 \vartheta}{R^3} \frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta \\
 &= \frac{IN}{l} \left(\cos \left(\arccctg \frac{+l}{2R} \right) - \cos \left(\arccctg \frac{-l}{2R} \right) \right) \\
 &= \frac{IN}{l} \left(\frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2R}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2R}\right)^2}} \right) \\
 &= \frac{2IN}{\sqrt{4R^2+l^2}},
 \end{aligned}$$

und somit das Resultat:

$$\boxed{|\mathbf{B}(\text{Zentrum})| = \frac{\hat{\mu}_0 |I| N}{\sqrt{4R^2+l^2}}.} \quad (3.4)$$

3.1.2 Das Magnetische Feld \mathbf{H}

Für den (unrealistischen!) Fall, daß **alle** Ströme genau bekannt sind, wird das **magnetische Feld** $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ als konstantes Vielfaches der **Kraftflußdichte** $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ eingeführt:

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu'_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).} \quad (3.5)$$

Dabei ist μ'_0 eine weitere Maßsystemkonstante.

Version vom 26. März 2009

²Man beachte, daß $\cos \alpha = \frac{\text{ctg } \alpha}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \alpha}}$ und somit $\arccctg x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ gilt.

Motivation

Im *praktischen Maßsystem* möchte man (3.4) naheliegenderweise in der Form

$$\boxed{|\mathbf{H}(\mathbf{r})| = \frac{|I| N}{\sqrt{4R^2 + l^2}}} \quad (3.6)$$

schreiben, bzw. (3.1) zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

vereinfachen, was beides der Wahl

$$\mu'_0 = \hat{\mu}_0$$

entspricht.³ Im *GAUSSschen Maßsystem* wählt man dagegen

$$\mu'_0 = 1,$$

so daß sich $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ in diesem Falle noch nicht von $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ unterscheidet.

Wirklich wesentlich wird die Unterscheidung zwischen $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ bei (genäherter) Beschreibung **mikroskopischer** Stromverteilungen mithilfe von Material-‘Konstanten’, wobei dann $\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ proportional zur Stromdichte \mathbf{j}_{ex} der sog. **Überschußladungen** gesetzt wird, die z.B. die inneratomaren Ströme unberücksichtigt läßt (vgl. Kap. 4). Im günstigsten Falle ist dann k' durch ein Skalarfeld $\mu(\mathbf{r})\mu_0$ zu ersetzen, das von der konkreten Materieverteilung abhängt.

3.1.3 AMPERESCHES GEsETZ

Nach dem STOKESSchen Satz ist die (3.1)/(3.5) entsprechende Gleichung

$$\operatorname{rot} H(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

äquivalent ist zum sog. **AMPERESchen Gesetz**⁴

$$\boxed{\int_{\partial \mathcal{S}} H(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}}_{\text{Strom durch } \mathcal{S}}} \quad (3.8)$$

für beliebige (jedoch hinreichend gutartige) Flächenstücke \mathcal{S} .

Damit ergibt sich für das Magnetfeld **außerhalb** eines unendlich langen, zylindrischen Stromfadens mit dem Gesamtstrom \mathbf{I}

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{2\pi|\mathbf{r}|^2} \quad \text{für } \mathbf{r} \perp \mathbf{I} \quad (3.9)$$

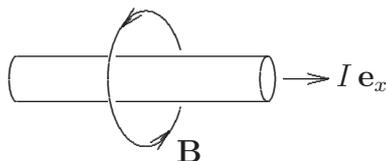


Abb. 3.3: Magnetfeld eines zylindrischen Stromfadens

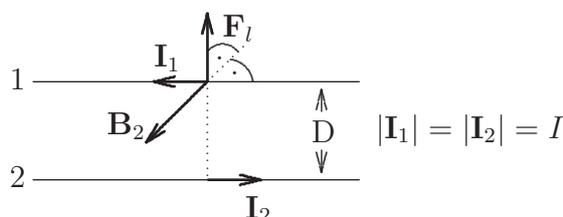


Abb. 3.4: Stromdurchflossene, parallele Drähte

(wenn die Symmetrieachse des Stromfadens durch $\mathbf{r} = 0$ geht).

Definition der Stromeinheit Ampere

Zwei dünne, lange, gerade Drähte seien parallel zueinander im Abstand D voneinander aufgespannt und in entgegengesetzter Richtung von dem stationären Strom I durchflossen (vgl. Abb. 3.4). Dann gilt für abstoßende die Kraft \mathbf{F}_l , die die Kraftflußdichte \mathbf{B}_2 des zweiten Drahtes auf ein Teilstück des ersten Drahtes der Länge l ausübt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_l| &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{c'}{c} |\mathbf{I}_1 \times \mathbf{B}_2| l \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{c'}{c} \frac{\hat{\mu}_0}{2\pi} \frac{I^2}{D} l. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Kraftwirkung erlaubt folgende **Definition**:

$$1 \text{ Ampere} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{der Strom } I, \text{ der bei } l = D = 1 \text{ Meter} \\ |\mathbf{F}_l| = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Newton liefert.} \end{cases}$$

Mit (2.3) ergibt sich daraus für die in (1.2) eingeführte Maßsystemkonstante

$$\epsilon'_0 = \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2}.$$

Version vom 26. März 2009

³Mit den im praktischen Maßsystem üblichen Konventionen $\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mu}_0$, $\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon'_0$, $c' = c$ folgt dann $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$.

⁴Im allgemeinen Fall ist, wie gesagt, \mathbf{j} durch die Stromdichte \mathbf{j}_{ex} der Überschlußladungen zu ersetzen.

Dies sind die Konventionen im *praktischen Maßsystem* mit der Ladungseinheit

$$\text{Coulomb} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}.$$

Im *GAUSSschen Maßsystem* wird dagegen die Stromeinheit über die Ladungseinheit und letztere über das COULOMBSche Gesetz mit $k = 1$ festgelegt.

3.2 Eng begrenzte stationäre Stromverteilungen

3.2.1 Die Dipol-Näherung

Im Hinblick auf (3.3) wollen wir jetzt für ein beliebiges (hinz. gutart.) Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die *Dipolnäherung*⁵

$$\left(\int \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right)_{\text{Dipol-Näh.}} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{r}|^{-1} \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} + |\mathbf{r}|^{-3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \quad (3.10)$$

von $\int \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$ (für $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$) untersuchen. Zunächst sieht man leicht:

$$\begin{aligned} & \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') (\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}') \mathbf{r}' dV_{\mathbf{r}'} \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int \mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'}' \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')) dV_{\mathbf{r}'} \\ &= - \int \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} - \int \mathbf{r}' \underbrace{(\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'))}_{=\mathbf{r}} dV_{\mathbf{r}'} . \end{aligned}$$

Nach dem Entwicklungssatz Gl. (2.23) von (Lücke, ein), angewandt auf $\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}'))$, gilt andererseits

$$\int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} = \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' dV_{\mathbf{r}'} - \mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} .$$

Durch Addition beider Gleichungen und Division durch 2 ergibt sich damit

$$\int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} - \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} . \quad (3.11)$$

Mit

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} &= \int (\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}') \mathbf{r}' dV_{\mathbf{r}'} \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int \mathbf{r}' \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Version vom 26. März 2009

⁵Nach (1.24) ist

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underset{|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|}{\approx} \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|^2} \cos(\angle \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} .$$

ergibt sich daraus gemäß (3.10)

$$\boxed{\begin{aligned} & \left(\int \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right)_{\text{Dipol-Näh.}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} - \int \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{2|\mathbf{r}|^3} \right) dV_{\mathbf{r}'} . \end{aligned}} \quad (3.13)$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun auf den Fall⁶

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)$$

anwenden, wobei \mathbf{j} eine räumlich beschränkte, divergenzfreie, stationäre Stromverteilung ist:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}'| > R. \quad (3.14)$$

Für die dadurch erzeugte stationäre Kraftflußdichte gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\hat{\mu}_0} \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) & \\ & \stackrel{(3.3)}{=} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ & \stackrel{(3.13)}{\approx} -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} \right) \\ & \stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}}_{=0} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} - \frac{1}{2} \left(\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} . \end{aligned}$$

Indem man den Entwicklungssatz auf

$$\left(\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} \right) \times \underbrace{\left(\nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right)}_{=0}$$

anwendet, erhält man also

$$\frac{4\pi}{\hat{\mu}_0} \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = -\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{2} \left(\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) ,$$

woraus sich mit (3.5)

$$\boxed{\begin{aligned} (3.14) \implies \mathbf{H}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) & \underset{|\mathbf{r}| \gg R}{\approx} -\frac{c\hat{\mu}_0}{c'\hat{\mu}'_0} \frac{1}{4\pi\hat{\mu}'_0} \operatorname{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r}|^3} , \quad \text{wobei:} \\ \mathbf{M} & = \textit{magnetisches Dipolmoment} \text{ von } \mathbf{j} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c'\hat{\mu}'_0}{c} \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'} \end{aligned}} \quad (3.15)$$

⁶Der Fall $\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0$ tritt im Beweis von Gleichung (4.5) auf.

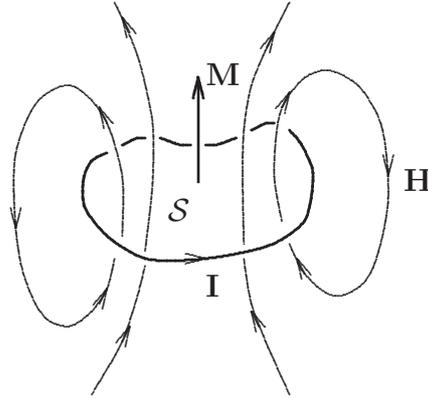


Abb. 3.5: Magnetfeld einer ebenen Stromschleife

ergibt. Man beachte, daß \mathbf{M} gemäß (3.12) wegen $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ von \mathbf{r}_0 unabhängig ist.

Magnetisches Dipolmoment einer ebenen Stromschleife:

Sei \mathcal{S} ein **ebenes** einfaches Flächenstück mit der Flächennormalen \mathbf{n} , dessen Rand $\partial\mathcal{S}$ von einem **dünnen** Draht gebildet sei, durch den (im Sinne der Orientierung von $\partial\mathcal{S}$) der stationäre Strom I fließe (siehe Abb. 3.5). Für die zugehörige (verallgemeinerte) Stromdichte \mathbf{j} gilt dann für $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{S}$

$$\int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} = I \int_{\partial\mathcal{S}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times d\mathbf{r} = I 2 |\mathcal{S}| \mathbf{n},$$

d.h. das gemäß (3.15) zugeordnete magnetische Dipolmoment ist

$$\boxed{\mathbf{M}_{\text{Schleife}} \approx \frac{c'}{c} \mu'_0 I |\mathcal{S}| \mathbf{n}.} \quad (3.16)$$

3.2.2 Kraft und Drehmoment auf einen idealen magnetischen Dipol im äußeren B-Feld

Gegeben:

- (i) $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$, $C > 0$,
- (ii) eine Schar quellfreier, stationärer (hinreichend gutartiger) Stromverteilungen $\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = 0 \text{ für } |\mathbf{r}| > \epsilon |\mathbf{r}_0|, \quad \max_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} |\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r})| < \epsilon^{-4} C$$

und

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c'}{c} \frac{\mu'_0}{2} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \text{ unabhängig von } \epsilon$$

(z.B. $\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = \epsilon^{-4} \mathbf{j}(\mathbf{r}/\epsilon)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ für $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}_0|$) und

(iii) ein festes **äußeres**, stationäres magnetisches Kraftflußfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Gesucht: Die Kraft \mathbf{F}_ϵ und das Drehmoment \mathbf{M}_ϵ (bezogen auf \mathbf{r}_0) als Wirkung des **äußeren** \mathbf{B} -Feldes auf die Stromverteilung \mathbf{j}_ϵ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$.

Bestimmung von \mathbf{F}_ϵ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$: Wegen

$$\mathbf{F}_\epsilon \stackrel{(2.2)}{=} \frac{c'}{c} \int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} = \frac{c'}{c} \int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}}$$

genügt es, im Limes $\epsilon \rightarrow +0$ für \mathbf{B} die Näherung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \underset{\text{Taylor}}{\approx} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$$

zu verwenden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\epsilon &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{c'}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \times \underbrace{\int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}}}_{\stackrel{(3.12)}{=} 0} + \frac{c'}{c} \int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}} \\ &\stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} -\frac{c'}{c} \int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times \left(\mathbf{r} \times \underbrace{(\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0))}_{\stackrel{(iii)}{=} 0} \right) dV_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \frac{c'}{c} \int \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)) dV_{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{c'}{c} \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \times \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}')) \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \frac{c'}{c} \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left(\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} \\ &\stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} \frac{c'}{c} \frac{1}{2} \left(\left(\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \stackrel{(2.16)}{}$$

Mit (3.5) und (3.15) folgt daraus:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kraft des äußeren Magnetfeldes } \mathbf{H} \text{ auf den} \\ \text{idealen}^7 \text{ magnetischen Dipol } \mathbf{M} \text{ am Ort } \mathbf{r}_0 \end{array} \right\} = (\mathbf{M} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{H}(\mathbf{r}_0). \quad (3.17)$$

Man beachte, daß nach dem Entwicklungssatz, angewandt auf $\mathbf{M} \times (\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_0))$, auch

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = 0 \implies (\mathbf{M} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = \nabla_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)) \quad (3.18)$$

⁷Damit ist der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ von \mathbf{j}_ϵ gemeint.

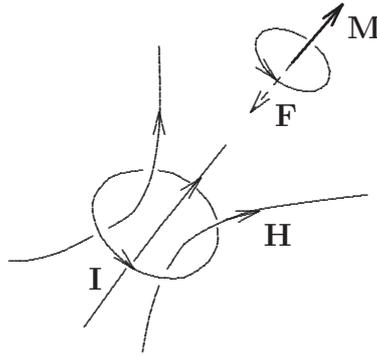


Abb. 3.6: Wechselwirkung zweier magnetischer Dipole

gilt.

Mit (3.18) erkennt man, daß die Kraft, die \mathbf{M} durch $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ erfährt, in Richtung des größten Anstiegs der $\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|}$ -Komponente von \mathbf{H} zeigt. Zwei magnetische Dipole $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ stoßen sich also ab, wenn $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 < 0$ ist, und ziehen sich an, wenn $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 > 0$ ist (vgl. Abb. 3.6).

Bestimmung von \mathbf{M}_ϵ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$: Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\epsilon & \stackrel{(2.2)}{=} \frac{c'}{c} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV_{\mathbf{r}} \\ & = \frac{c'}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) dV_{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

genügt hier sogar die grobe Näherung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}_0).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\epsilon & \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \int \mathbf{r} \times \left(\frac{\mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}{c'} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \right) dV_{\mathbf{r}} \\ & \stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} \frac{c'}{c} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)) \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}} - \frac{c'}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) + |\mathbf{r}|^2 \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}_{=0}$$

verschwindet das 2. Integral. Auswertung des 1. Integrals nach (3.11) liefert aufgrund der Divergenzfreiheit von \mathbf{j}_ϵ :

$$\mathbf{M}_\epsilon \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{c'}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \times \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}_\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV_{\mathbf{r}}.$$

Aufgrund der Definition des **magnetischen Dipolmomentes** \mathbf{M} folgt daraus mit (3.5):⁸

$$\boxed{\text{Mechanisches Drehmoment des \textbf{äußeren} Magnetfeldes } \mathbf{H} \text{ auf } \left. \begin{array}{l} \text{den } \textbf{idealen} \text{ magnetischen Dipol } \mathbf{M} \text{ am Ort } \mathbf{r}_0 \end{array} \right\} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_0).} \quad (3.19)$$

(3.17)/(3.18) und (3.19) lassen sich zusammenfassen zu der einfachen **Merkregel**:

In Gebieten, in denen die Rotation des äußeren (wirbelfreien) Magnetfeldes \mathbf{H} verschwindet, ist die potentielle Energie des idealen magnetischen Dipols \mathbf{M} (die der Wechselwirkung von \mathbf{M} mit $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ entspricht), durch $-\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})$ gegeben.

Man beachte die Analogie zu den entsprechenden Formeln für den idealen **elektrischen** Dipol (Aufg. 26).

Abschließende Bemerkung: Aus dem BIOT-SAVARTSchen Gesetzes folgt (Übungsaufgabe 29), daß Gesamtkraft und Gesamtdrehmoment, die vom selbsterzeugten \mathbf{B} -Feld auf \mathbf{j}_ϵ ausgeübt werden, Null sind. Man könnte also in (3.17) und (3.19) zum äußeren Magnetfeld das von \mathbf{j}_ϵ selbst erzeugte hinzufügen.

⁸Bei der Ableitung von (3.19) wurde die Bedingung $\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = 0$ nicht benutzt.

Kapitel 4

MAXWELLSche Gleichungen für Materie

4.1 Makroskopische Näherungen

4.1.1 Gesteuerte Feldänderungen und retardierte Potentiale

Ohne genaue Spezifizierung der physikalischen Situation läßt sich nicht sagen, welche der mathematisch möglichen Lösungen des idealisierten Problems (2.13)–(2.16) die physikalisch relevante ist.¹ Wenn man jedoch eine kontrollierte Änderung

$$\rho \longrightarrow \rho + \delta\rho, \quad \mathbf{j} \longrightarrow \mathbf{j} + \delta\mathbf{j}$$

der Ladungs- und Stromverteilung herbeiführt, dann ist dies als Ursache einer entsprechenden Feldänderung

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} + \delta\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}$$

zu verstehen, die dementsprechend der Kausalitätsforderung

$$\left. \begin{array}{l} \delta\rho(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \delta\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t < t_0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad \Longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t < t_0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

genügen sollte. In – natürlich nur makroskopisch realisierbaren – Situationen, in denen die gesamte Ladungs- und Stromdichte als kontrolliert angesehen werden kann, bedeutet das

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t < t_0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad \Longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t < t_0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Version vom 26. März 2009

¹Z.B. können Einstrahlungsprobleme (Idealisierung realer Strahlungsquellen) von besonderem Interesse sein.

Dadurch sind $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ eindeutig $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zugeordnet, wenn ein endlicher Zeitpunkt t_0 existiert mit

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t < t_0;$$

denn die Differenz zweier Lösungen $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ der MAXWELLSchen Gleichungen zu gleichen $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dieses Typs ist eine Lösung der freien MAXWELLSchen Gleichungen, die aufgrund der Erhaltung ihrer (hier endlich anzunehmenden) Gesamtenergie (siehe Abschn. 5.1.2) für alle Zeiten Null sein muß. Diese physikalische Lösung entspricht – im Sinne von (2.20) – den sog. **retardierten** Potentialen²

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \\ \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}. \end{array}} \quad (4.1)$$

Beweis: Da die (4.1) zugeordneten Felder offensichtlich o.a. Kausalitätsbedingung erfüllen, ist nur noch zu zeigen, daß sie tatsächlich den MAXWELLSchen Gleichungen genügen:

Aus der Kontinuitätsgleichung (2.18) erkennt man (nach Variablensubstitution $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}'$), daß die retardierten Potentiale (4.1) der LORENTZ-Eichbedingung (2.23) genügen. Gemäß Anmerkung zu (2.25) genügt somit der Nachweis der inhomogenen Wellengleichungen

$$\square \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \square \mathbf{A} = \hat{\mu}_0 \mathbf{j};$$

d.h. der Nachweis von

$$\square \int \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} = 4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

für beliebige (hinreichend gutartige) Funktionen f . Für faktorisierte Funktionen $f(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r})h(t)$ wird besonders deutlich, daß das Integral in (4.2) eine Überlagerung von (verschobenen) **Kugelwellen** $h(t - |\mathbf{r}|/c)/|\mathbf{r}|$ darstellt, die stets der homogenen Wellengleichung

$$\square \frac{h(t - |\mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r}|} = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq 0 \quad (4.3)$$

²Man vergleiche mit (1.6) und (3.3). **Retardiert** (verzögert) nennt man diese Potentiale, weil für ihre Werte am Ort \mathbf{r} zum Zeitpunkt t die Werte von Ladungs- und Stromdichte am Ort \mathbf{r}' jeweils nur zum **früheren** Zeitpunkt $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ von Belang sind. Man kann sich also das zugehörige elektromagnetische Feld als Wirkung – die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet – der Ladungs- und Stromverteilung vorstellen.

genügen.³ Daß die linke Seite von (4.2) dennoch von Null verschieden ist, liegt an der Singularität bei $\mathbf{r} = 0$, die ähnlich wie bei der POISSONSchen Gleichung sorgfältig behandelt werden muß.⁴ Mit

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\mathbf{r}} \int \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\int \nabla_{\mathbf{r}''} \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} + \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}''} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=0} \\
 &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\int \nabla_{\mathbf{r}''} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}''} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=0} \\
 &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\int \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} \\
 &= - \left(\nabla_{\mathbf{r}''} \cdot \int \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} \\
 &= + \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \int \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} \\
 &\quad - \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\int \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 &\square_{\mathbf{r}, t} \int \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{|\mathbf{r}'| > \epsilon} \left(\underbrace{\left(\square_{\mathbf{r}', t} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}}_{\stackrel{0}{(4.3)}} + \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} \right) dV_{\mathbf{r}'} \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\partial U_{\epsilon}(0)} \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\underbrace{\int_{\partial U_{\epsilon}(0)} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r}'|/c) \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'}}_{\rightarrow 4\pi f(\mathbf{r}, t)} - \underbrace{\int_{\partial U_{\epsilon}(0)} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - |\mathbf{r}'|/c) \Big|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'}}_{\rightarrow 0} \right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Mithilfe der Formel⁵

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \theta(t') \delta((ct')^2 - |\mathbf{r}'|^2) dt' \right) dV_{\mathbf{r}'} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r}'|/c)}{2|\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

(Beweis als Übungsvorschlag), die üblicherweise formal durch

$$\theta(\xi) \delta(\xi^2 - A^2) = \frac{\delta(\xi - |A|)}{2|A|}$$

Version vom 26. März 2009

³Letzteres erkennt man leicht aus

$$\begin{aligned}
 \Delta &\stackrel{(1.21)}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} \cos \vartheta. \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r
 \end{aligned}$$

⁴Für zeitunabhängiges f ist damit natürlich noch einmal die POISSONSche Gleichung bewiesen.

⁵Gemeint ist hier, daß für δ zunächst eine δ -Folge δ_{ϵ} (z.B. entsprechend Aufgabe 9) einzusetzen und der Grenzübergang $\delta_{\epsilon} \rightarrow \delta$ durchzuführen ist.

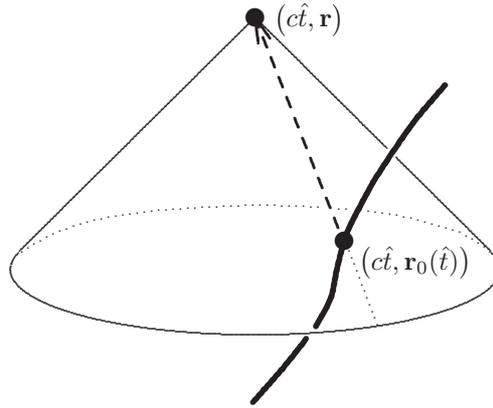


Abb. 4.1: Retardierte Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit

mitgeteilt wird, erkennt man leicht, daß sich das retardierte Vierer-Potential ($\frac{1}{c'}\Phi_{\text{ret}}, \mathbf{A}_{\text{ret}}$) relativistisch wie die zugehörige Vierer-Stromdichte ($c\rho, \mathbf{j}$) transformiert. Somit gilt

$$F_{\text{ret}}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_{\text{ret}}^\nu - \partial^\nu A_{\text{ret}}^\mu$$

(entsprechend (2.20) und (2.4)) in **jedem** Bezugssystem.

4.1.2 Retardierte Dipol-Näherung

Sei $\rho_{\text{mikro}}, \mathbf{j}_{\text{mikro}}$ eine Ladungs- und Stromverteilung, die zum Zeitpunkt t jeweils eng um $\mathbf{r}_0(t)$ herum lokalisiert sei. Die Geschwindigkeit sämtlicher Ladungsanteile dieser Verteilung sei klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit.

Dann existiert zu jedem Raum-Zeit-Punkt (ct, \mathbf{r}) genau ein Zeitpunkt $\hat{t} = \hat{t}(\mathbf{r}, t)$, für den $(c\hat{t}, \mathbf{r}_0(\hat{t}))$ mit (ct, \mathbf{r}) durch ein Lichtsignal verbindbar ist (siehe Abb. 4.1). Falls sich $\rho(\mathbf{r}, t)$ zeitlich nicht zu schnell ändert, gilt also nach (4.1)

$$\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \hat{t}(\mathbf{r}, t))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'},$$

mit der Dipolnäherung⁶

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \left| \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}))}_{\text{'groß'}} - \underbrace{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\hat{t}))}_{\text{'klein'}} \right|^{-1} \underset{\text{TAYLOR}}{\approx} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})|^{-1} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\hat{t}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})|^3}$$

folglich

$$4\pi\epsilon'_0\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{q_{\text{mikro}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))) \cdot \mathbf{P}_{\text{mikro}}(\hat{t}(\mathbf{r}, t))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))|^3}, \quad (4.4)$$

Version vom 26. März 2009

⁶Vgl. auch (1.24) und Aufgabe 26.

wobei

$$q_{\text{mikro}} \stackrel{\text{def}}{=} \int \rho_{\text{mikro}}(\mathbf{r}', \hat{t}) dV_{\mathbf{r}'} \quad (\text{unabhängig von } \hat{t})$$

die Gesamtladung und

$$\mathbf{P}_{\text{mikro}}(\hat{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \rho_{\text{mikro}}(\mathbf{r}', \hat{t}) dV_{\mathbf{r}'}$$

das Dipolmoment bzgl. $\mathbf{r}_0(\hat{t})$ der vorgegebenen Ladungsverteilung zum Zeitpunkt \hat{t} ist.

Entsprechend ergibt sich für das retardierte Vektorpotential

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\hat{\mu}_0} \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{(4.1)}{=} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}), t - |\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}))|/c)}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}))|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &\approx \int \frac{\mathbf{J}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}), \hat{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}) - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &\stackrel{(3.13)}{\approx} -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})|^3} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}), \hat{t}) dV_{\mathbf{r}'} \\ &\quad - \int \underbrace{\text{div } \mathbf{J}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}), \hat{t})}_{\stackrel{(2.18)}{=} -\frac{d}{d\hat{t}} \rho_{\text{mikro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0(\hat{t}), \hat{t})} \mathbf{r}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})|} + \underbrace{\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \cdot \mathbf{r}'}{2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})|^3}}_{\text{vernachlässigbar}} \right) dV_{\mathbf{r}'} . \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{c\hat{\mu}_0}{c'\hat{\mu}'_0} \mathbf{M}_{\text{mikro}}(\hat{t}(\mathbf{r}, t)) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))|^3} \\ &\quad + \frac{\hat{\mu}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))|} \frac{d}{d\hat{t}} (\mathbf{P}_{\text{mikro}}(\hat{t}) + q_{\text{mikro}} \mathbf{r}_0(\hat{t})) \Big|_{\hat{t}=\hat{t}(\mathbf{r}, t)} , \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei

$$\mathbf{M}_{\text{mikro}}(\hat{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c'\hat{\mu}'_0}{c} \frac{\mu'_0}{2} \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \times \mathbf{J}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}') dV_{\mathbf{r}'}$$

das magnetische Dipolmoment bzgl. $\mathbf{r}_0(\hat{t})$ von $\mathbf{J}_{\text{mikro}}$ gemäß (3.15) zum Zeitpunkt \hat{t} ist.

4.1.3 Makroskopische Mittelung

Wir setzen von nun ab voraus, daß stets **Materie** vorliegt, die sich – auch aus mikroskopischer Sicht – relativ zur Lichtgeschwindigkeit **langsam bewegt**.

Es liegt nun nahe, die mikroskopischen Ladungs- und Stromverteilungen angenähert als makroskopische Verteilungen⁷ von Monopolen q_{mikro} (**Überschußladungen**)

Version vom 26. März 2009

⁷Man beachte die **praktische** Notwendigkeit, über makroskopisch kleine, mikroskopisch aber große, Gebiete zu mitteln.

und neutralen Dipolen $\mathbf{P}_{\text{mikro}}$, $\mathbf{M}_{\text{mikro}}$ der in Abschn. 4.1.2 betrachteten Art zu beschreiben:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ladungsdichte der Überschußladungen} \\ \text{am Ort } \mathbf{r} \text{ zur Zeit } t, \end{array} \right. \\ \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Stromdichte der Überschußladungen} \\ \text{am Ort } \mathbf{r} \text{ zur Zeit } t, \end{array} \right. \\ \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dichte der elektrischen Dipole} \\ \text{am Ort } \mathbf{r} \text{ zur Zeit } t, \end{array} \right. \\ \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dichte der magnetischen Dipole} \\ \text{am Ort } \mathbf{r} \text{ zur Zeit } t. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Die zu gegebener *Magnetisierung* \mathcal{M} , *dielektrischer Polarisation* \mathcal{P} und zu gegebener Ladungs-Stromdichte ρ_{ex} , \mathbf{j}_{ex} der Überschußladungen gehörigen retardierten Potentiale sind dann nach (4.4)/(4.5):⁸

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \frac{\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \mathcal{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ \mathbf{A}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &\quad + \frac{c\hat{\mu}_0}{c'\mu'_0} \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{M}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \\ &\quad + \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{\text{ex}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \end{aligned}$$

Durch partielle Integration folgt daraus in guter makroskopischer Näherung:⁹

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \frac{\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \\ \mathbf{A}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei die *effektive Ladungs- und Stromdichte* ρ_{eff} , \mathbf{j}_{eff} durch

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) - \text{div } \mathcal{P}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{j}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{c}{c'} \frac{1}{\mu'_0} \text{rot } \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

definiert ist. Da bei makroskopisch konsistenter Definition für ρ_{ex} , \mathbf{j}_{ex} die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist, gilt dasselbe damit für die effektive Ladungs-Stromverteilung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{j}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.8)$$

⁸Man beachte, daß in Abschn. 4.1.2 stets $\hat{t}(\mathbf{r}, t) = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t}(\mathbf{r}, t))|/c$ galt (vgl. Abb. 4.1).

⁹Die zusätzliche Näherung besteht in der Vernachlässigung der Ableitungen der \mathbf{r}' -abhängigen Zeitargumente von \mathcal{P} und \mathcal{M} .

4.2 Die makroskopischen Felder

4.2.1 Definition und Grundgleichungen

Das zu (4.6) gehörige, makroskopische, elektromagnetische Feld genügt (gemäß Abschn. 4.1.1) natürlich den MAXWELLSchen Gleichungen (2.13)–(2.16) für $\rho = \rho_{\text{eff}}$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{eff}}$. Daran ändert sich auch nichts, wenn man eine freie Lösung addiert. **Unabhängig von der speziellen Wahl der Potentiale als retardierte** in Abschn. 4.1.3 sollten daher die makroskopisch geeignet gemittelten Felder den Gleichungen

$$\text{rot } \mathbf{B}_{\text{makro}} = \hat{\mu}_0 \left(\epsilon'_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{makro}} + \mathbf{j}_{\text{eff}} \right), \quad (4.9)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{makro}} = \frac{1}{\epsilon'_0} \rho_{\text{eff}}, \quad (4.10)$$

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E}_{\text{makro}} = -\frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{\text{makro}},} \quad (4.11)$$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B}_{\text{makro}} = 0.} \quad (4.12)$$

genügen. Eine unmittelbare Folge davon ist, daß die Hilfsfelder¹⁰

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu'_0} \left(\mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) \right), \\ \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}} \quad (4.13)$$

wobei

$$\hat{\epsilon}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu'_0 c' c'}, \quad (4.14)$$

gemäß (4.7) den Gleichungen

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t),} \quad (4.15)$$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t).} \quad (4.16)$$

genügen.

Auch in zweckmäßig **idealisierten** Situationen sollten $\mathbf{E}_{\text{makro}}$, $\mathbf{D}_{\text{makro}}$, $\mathbf{B}_{\text{makro}}$ und $\mathbf{H}_{\text{makro}}$ – solange ρ_{ex} keine Punktladungsanteile enthält – lokal beschränkte, gebietsweise stetig differenzierbare Vektorfelder sein, für die die Sätze von STOKES und GAUSS in entsprechender Verallgemeinerung gelten sollten. Mit (4.11) resp. (4.15) erkennt man daher durch Anwendung des Satzes von STOKES:

¹⁰Man beachte die Verträglichkeit mit der früheren Definition (3.5).

An Grenzflächen, **längs** derer sich die einseitigen Grenzwerte von $\mathbf{E}_{\text{makro}}$ resp. $\mathbf{H}_{\text{makro}}$ stetig ändern, ist auch die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}_{\text{makro}}$ resp. $\mathbf{H}_{\text{makro}}$ stetig; d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) - \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) \right) &= 0 \\ \text{resp.} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) - \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\hat{\mu}_0}{\mu_0'} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei \mathbf{r} einen beliebigen Punkt der Grenzfläche und $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ den entspr. Normalenvektor an dieser Stelle bezeichnet.

Frage zum Verständnis: Warum folgt aus (4.9) nicht entsprechendes für $\mathbf{B}_{\text{makro}}$?

Antwort: Wegen (4.7), weil $\text{rot } \mathcal{M}$ i.a. als verallgemeinerte Funktion zu interpretieren ist (analog zu einer Flächenladungsdichte, vgl. Abschn. 1.1.2).

Entsprechend folgt aus (4.12) resp. (4.16) mithilfe des Satzes von GAUSS:¹¹

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) - \mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) \right) &= 0 \\ \text{resp.} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) - \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon_0'} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{r}), t) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bei Anwesenheit von Materie treten also die Gleichungen (4.11), (4.12), (4.15) und (4.16) – mit der leichter kontrollierbaren Ladungs- und Stromverteilung ρ_{ex} , \mathbf{j}_{ex} der Überschlußladungen – an die Stelle der Gleichungen (2.13)–(2.16) für das Vakuum.

Dabei müssen allerdings noch die Zusammenhänge zwischen $\mathbf{H}_{\text{makro}}$, $\mathbf{D}_{\text{makro}}$ einerseits und $\mathbf{B}_{\text{makro}}$, $\mathbf{E}_{\text{makro}}$ andererseits **empirisch** erfaßt werden!

Es ist allgemein üblich, die Indizes $_{\text{makro}}$ und $_{\text{ex}}$ wegzulassen. Wir wollen uns dem im folgenden anschließen.

4.2.2 Materialkonstanten

Für viele Anwendungen kann man davon ausgehen, daß innerhalb homogener Materialien die dielektrische Polarisierung \mathcal{P} sowie¹² die Stromdichte \mathbf{j} (der Überschluß-

Version vom 26. März 2009

¹¹Man beachte die Unabhängigkeit der Aussage (4.18) von der Orientierung der Flächennormalen.

¹²Man sagt dann auch, daß das *OHMSche Gesetz* gelte.

dungen) proportional zum (makroskopischen) elektrischen Feld \mathbf{E} und die Magnetisierung \mathcal{M} proportional zum Magnetfeld¹³ \mathbf{H} ist. Dann existieren also eine Konstante χ_e der *elektrischen Suszeptibilität*, eine Konstante σ der *spezifischen Leitfähigkeit* und eine Konstante χ_m der *magnetischen Suszeptibilität* mit:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) = \mu'_0 \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)} \quad (4.19)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \chi_e && \text{Dielektrizitätskonstante} \\ \mu &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \chi_m && \text{Permeabilitätskonstante} \end{aligned}$$

gilt gemäß (4.13) dann auch

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mu'_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)} \quad (4.20)$$

Bei der dielektrischen Polarisierung sind zwei Entstehungsmechanismen zu unterscheiden:

- **Dielektrische Stoffe:** Die atomaren bzw. molekularen Ladungsverteilungen ρ_{mikro} haben bei Abwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\text{äuß}}$ kein elektrisches Dipolmoment $\mathbf{P}_{\text{mikro}}$. Ein solches wird jedoch durch Anlegen eines äußeren Feldes $\mathbf{E}_{\text{äuß}} \neq 0$ in Feldrichtung *influenziert*. Die Stärke der dadurch hervorgerufenen Polarisierung \mathcal{P} ist von Kollisionen der mikroskopischen Systeme und damit (bei konstanter Massendichte) **von der Temperatur unabhängig**.

Dieser Effekt liegt mehr oder weniger bei aller Materie vor!

- **Paraelektrische Stoffe:** Hier liegen mikroskopische Systeme mit permanenten elektrischen Dipolmomenten $\mathbf{P}_{\text{mikro}}$ vor, die sich in Richtung von $\mathbf{E}_{\text{äuß}}$ auszurichten versuchen. Dieser Tendenz wirken die durch termische Bewegung hervorgerufenen Kollisionen der Mikrosysteme entgegen. Hier wird demnach ϵ **mit wachsender Temperatur kleiner**.

Für beide Fälle – sowie ihre Überlagerung – gilt die **Folgerung:**

Es ist stets $\epsilon \geq 1$ und die elektrisierbaren Stoffe erfahren durch ein inhomogenes elektrisches Feld eine (zusätzliche) **Kraft in Richtung größter Feldliniendichte**.

Entsprechend sind bei der Magnetisierung zwei Entstehungsmechanismen zu unterscheiden:

¹³Eigentlich sollte man Proportionalität zum (makroskopischen) \mathbf{B} -Feld ansetzen – was aber letztlich auf das gleiche hinausläuft.

- **Diamagnetische Stoffe:** Die atomaren bzw. molekularen Stromverteilungen $\mathbf{j}_{\text{mikro}}$ haben bei Abwesenheit eines äußeren Kraftflußfeldes $\mathbf{B}_{\text{äuß}}$ kein magnetisches Dipolmoment $\mathbf{M}_{\text{mikro}}$. Ein solches wird jedoch durch ‘Einschalten’ eines äußeren Kraftflußfeldes $\mathbf{B}_{\text{äuß}} \neq 0$ **entgegengesetzt** (LENZsche Regel) zur Feldrichtung **induziert**.¹⁴ Dementsprechend gilt die Ungleichung

$$\mu < 1$$

und die diamagnetischen Stoffe erfahren durch ein inhomogenes \mathbf{B} -Feld eine (zusätzliche) **Kraft in Richtung kleinster Feldliniendichte**. Die Stärke der dadurch hervorgerufenen Magnetisierung \mathcal{P} ist von Kollisionen der mikroskopischen Systeme und damit (bei konstanter Massendichte) **von der Temperatur unabhängig**.

Dieser Effekt liegt mehr oder weniger bei aller Materie vor!

- **Paramagnetische Stoffe:** Hier liegen mikroskopische Systeme¹⁵ mit permanenten magnetischen Dipolmomenten $\mathbf{M}_{\text{mikro}}$ vor, die sich in Richtung von $\mathbf{B}_{\text{äuß}}$ auszurichten versuchen, weshalb also

$$\mu > 1$$

gilt. Dieser Tendenz wirken die durch termische Bewegung hervorgerufenen Kollisionen der Mikrosysteme entgegen, μ wird demnach **mit wachsender Temperatur kleiner**.

Die Leitfähigkeit kommt dadurch zustande, daß Überschlußladungen je nach Vorzeichen in Richtung von $\mathbf{E}_{\text{äuß}}$ oder entgegengesetzt dazu beschleunigt werden. Dieser Beschleunigungsvorgang wird immer wieder durch diffuse Streuung an anderen mikroskopischen Systemen unterbrochen, so daß dadurch im Mittel eine Gegendrift erzeugt wird. Durch die Lage des Gleichgewichts wird $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{ex}}$ bestimmt. Falls das OHMSche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

überhaupt gilt, bestimmen also zwei Faktoren die Temperaturabhängigkeit von σ :

- (i) Verkürzung der mittleren freien Weglänge bei steigender Temperatur mit der Tendenz, die Leitfähigkeit σ abzusinken (z.B. bei Metallen).
- (ii) Erhöhung der Überschlußladungen bei steigender Temperatur mit der Tendenz, σ ansteigen zu lassen (Beispiele: Elektrolyte, Graphit).

Abschließende Bemerkung:

Eine gründliche, quantitativ genaue Untersuchung von Polarisation, Magnetisierung und Leitfähigkeit setzt solide Kenntnis der **Quantenmechanik** voraus!

¹⁴Entsprechend dem Induktionsgesetz (2.19).

¹⁵Bei **ferroelektrischen Stoffen** überschreiten diese bereits mikroskopische Ausmaße.

4.2.3 Einfachste Randwertprobleme

Beispiel aus der Elektrostatik:

Das Gebiet $x > 0$ sei von einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 , das Gebiet $x < 0$ von einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$ ausgefüllt. Als einzige Überschlußladung ruhe eine Punktladung q an der Stelle $\mathbf{r} = d\mathbf{e}_x$. Gesucht ist das (makroskopische) elektrische Feld \mathbf{E} im gesamten \mathbb{R}^3 .

Da der Satz von STOKES mit (4.11) auf \mathbf{E} anwendbar ist, gilt (wegen $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0$)

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

für alle (hinreichend gutartigen) Flächenstücke S , d.h. das Wegintegral von \mathbf{E} hängt nur vom Anfangs- und vom Endpunkt des Weges ab. Da das physikalische \mathbf{E} im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet ist also die Definition

$$\Phi(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

erlaubt. Das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{für } x \neq 0, \mathbf{r} \neq d\mathbf{e}_x$$

genügt gemäß (4.16), (4.20) der Gleichung

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_1 \epsilon_0'} \delta(\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x) \quad \text{für } x \neq 0.$$

Gemäß (4.19) sind $E_y(\mathbf{r})$ und $E_z(\mathbf{r})$ im ganzen \mathbb{R}^3 stetig. Für die x -Komponente gilt dagegen gemäß (4.20)

$$\epsilon_1 \lim_{x \rightarrow +0} E_x(\mathbf{r}) = \epsilon_2 \lim_{x \rightarrow -0} E_x(\mathbf{r}) \quad \text{für } y, z \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Es läßt sich zeigen, daß das Potential damit eindeutig festgelegt ist. Daher genügt es, überhaupt eine Lösung des Randwertproblems zu finden. Dazu machen wir – in Anlehnung an die in Abschn. 1.2.3 besprochene Methode der Spiegelladungen – den Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0'\epsilon_1} \left(\frac{q}{|\mathbf{r}-d\mathbf{e}_x|} + \frac{q'}{|\mathbf{r}+d\mathbf{e}_x|} \right) & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0'\epsilon_2} \frac{q''}{|\mathbf{r}-d\mathbf{e}_x|} & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

mit geeigneten Ladungswerten q' , q'' . Mit

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|} = \frac{x \mp d}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|^3}$$

folgt daraus:

$$\left(\epsilon_1 \lim_{x \rightarrow +0} E_x(\mathbf{r}) - \epsilon_2 \lim_{x \rightarrow -0} E_x(\mathbf{r}) \right) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0'} \left(\frac{-q + q' + q''}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|^3} \right) \Big|_{x=0}$$

(4.21) ist somit äquivalent zu

$$q'' = q - q'.$$

Entsprechend folgt aus

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|} = \frac{y}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|^3}; \quad -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|} = \frac{z}{|\mathbf{r} \mp d\mathbf{e}_x|^3},$$

daß die Stetigkeit von E_x und E_y äquivalent ist zu¹⁶

$$q'' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} (q + q').$$

Die Auflösung der beiden Beziehungen zwischen q , q' und q'' liefert:

$$q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q, \quad q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q. \quad (4.23)$$

Dies sind also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß (4.22) die Lösung des Randwertproblems ist – womit letztere bestimmt ist.

Beispiel aus der Magnetostatik:¹⁷

Eine magnetisierbare Kugel vom Radius R mit der Permeabilität μ sei dem homogenen, äußeren, statischen Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{äuß}}(\mathbf{r}) = H_0 \mathbf{e}_z$ ausgesetzt. Die Ladungs- und Stromdichte der Überschlußladungen sei (im Endlichen) überall Null. Außerhalb der Kugel befinde sich keine magnetisierbare Materie ($\mu = 1$, Vakuum). Gesucht ist das gesamte (makroskopische) magnetische Feld \mathbf{H} , das im Unendlichen in das äußere Feld $\mathbf{H}_{\text{äuß}}(\mathbf{r})$ übergeht.

Da der Satz von STOKES mit (4.15) auch auf \mathbf{H} anwendbar ist, gilt hier (wegen $\mathbf{j}_{\text{ex}} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = 0$)

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

für alle (hinreichend gutartigen) Flächenstücke \mathcal{S} , d.h. das Wegintegral von \mathbf{H} hängt nur vom Anfangs- und vom Endpunkt des Weges ab. Somit ist die Definition

$$\Phi_H(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{r}}^0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.24)$$

erlaubt. Da die Divergenz des Magnetfeldes¹⁸

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{für } |\mathbf{r}| \neq R$$

¹⁶Dies ist auch gleichzeitig die Bedingung für die Stetigkeit des Potentials für $x = 0$.

¹⁷Die folgenden Überlegungen gelten entsprechend für eine dielektrische Kugel im homogenen, äußeren, elektrischen Feld.

¹⁸Wir wählen das Kugelzentrum als Koordinatenursprung.

nach (4.12) und (4.20) verschwindet, erfüllt \mathbf{H} sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel die LAPLACE-Gleichung. Somit gilt gemäß (1.23) sowie aufgrund der Rotationssymmetrie bzgl. der z -Achse (vgl. Abschn. 1.4.2) in Kugelkoordinaten die Entwicklung

$$\Phi_H(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta) & \text{für } r < R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} (A'_l r^l + B'_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta) & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (4.25)$$

Da Φ_H gemäß (4.24) überall stetig ist, müssen dabei aufgrund der funktionalen Unabhängigkeit der LEGENDRE-Polynome P_l die Bedingungen¹⁹

$$B_l = 0 \text{ und } A_l R^l = A'_l R^l + B'_l R^{-l-1} \text{ für } l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

erfüllt sein. Damit \mathbf{H} im Unendlichen gegen das vorgegebene äußere Magnetfeld konvergiert, muß weiterhin

$$A'_l = \begin{cases} -H_0 & \text{für } l = 1 \\ 0 & \text{für } l > 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

gelten. Damit die Normalkomponente von \mathbf{B} auf der Kugeloberfläche stetig ist, muß gemäß (4.20) und (4.25) schließlich noch

$$\mu A_1 = -H_0 - 2 \frac{B'_1}{R^3}, \quad \mu l A_l = -(l+1) \frac{B'_l}{R^{2l+1}} \text{ für } l \neq 1. \quad (4.28)$$

gelten. Aus (4.26)–(4.28) und $\Phi_H(0) = 0$ (letzteres folgt direkt aus (4.24)) folgt, daß nur A_1 , A'_1 und B'_1 von Null verschieden sind und die Werte

$$A'_l = -H_0, \quad A_1 = \frac{-3}{2+\mu} H_0, \quad B'_1 = \frac{\mu-1}{\mu+2} R^3 H_0$$

haben. Nach (4.25) lautet also das gesuchte Potential:

$$\Phi_H(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{-3}{2+\mu} H_0 z & \text{für } |\mathbf{r}| < R, \\ -H_0 r \cos \vartheta + \frac{\mu-1}{\mu+2} H_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta & \text{für } |\mathbf{r}| > R. \end{cases}$$

Die Interpretation ist offensichtlich.

4.2.4 Kompliziertere Materialien

Im allgemeinen sind die Zusammenhänge zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} , \mathbf{H} und \mathbf{B} sowie \mathbf{j} und \mathbf{E} hoffnungslos kompliziert. Das läßt schon das bekannte Beispiel der **Hysteres** ferromagnetischer Stoffe,²⁰ d.h. der Abhängigkeit der Magnetisierung von der Vorgeschichte (siehe Abb. 4.2) erahnen.

Version vom 26. März 2009

¹⁹Damit ist auch die Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{H} auf der Kugeloberfläche garantiert.

²⁰Die entsprechende Erscheinung tritt übrigens bei **ferroelektrischen** Stoffen auf.

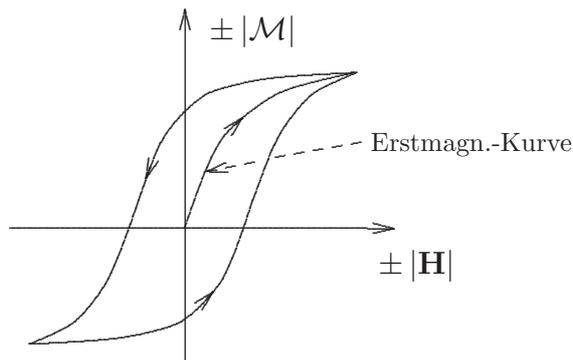


Abb. 4.2: Hystereseschleife ferromagnetischer Stoffe

Die harmloseste Verallgemeinerung besteht in der Ersetzung der Materialkonstanten durch Tensoren – für anisotrope Medien (insbesondere Kristalle):

$$\begin{aligned} D^k(\mathbf{r}, t) &= \hat{\epsilon}_0 \sum_{l=1}^3 \epsilon_l^k(\mathbf{r}) E^l(\mathbf{r}, t), \\ B^k(\mathbf{r}, t) &= \mu'_0 \sum_{l=1}^3 \mu_l^k(\mathbf{r}) H^l(\mathbf{r}, t), \\ j^k(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l=1}^3 \sigma_l^k(\mathbf{r}) E^l(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Aber auch das funktioniert in der Regel höchstens für zeitlich langsam veränderliche Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen. Bei streng periodischen Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen ist zu erwarten, daß Elektrizierung und Magnetisierung den Feldern \mathbf{E} , \mathbf{B} mit einer Phasenverschiebung folgen, die mit zunehmender Frequenz wächst. Darüber hinaus sollte die durch \mathbf{E} hervorgerufene Elektrizierung ebenso wie die durch \mathbf{B} hervorgerufene Magnetisierung mit wachsender Frequenz gegen Null konvergieren. Auf jeden Fall sind die entsprechenden Zusammenhänge frequenzabhängig (*Dispersion*) und gestalten die Verhältnisse im allgemeinen Fall, d.h. für die Überlagerung periodischer Lösungen verschiedener Frequenzen (vgl. Abschn. 1.3.3 von (Lücke, ftm)), recht kompliziert. Trotz struktureller Gleichheit von (2.13)/(2.14) und (4.15)/(4.16) lassen sich daher die Lösungsmethoden aus Abschn. 2.3.2 i.a. **nicht** mehr anwenden.

Dennoch können (4.15) und (4.16) auch bei unzulänglicher Kenntnis der erwähnten Zusammenhänge extrem nützlich sein.

4.3 Zusammenfassung

Retardierte Potentiale:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \int \frac{\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \\ \mathbf{A}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'},\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) - \text{div } \mathcal{P}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{J}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{c}{\mu'_0} \text{rot } \mathcal{M}(\mathbf{r}, t), \\ \rho_{\text{ex}} &: \text{Volumendichte der Überschußladungen,} \\ \mathbf{J}_{\text{ex}} &: \text{Stromdichte der Überschußladungen,} \\ \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) &: \text{elektrische Dipoldichte,} \\ \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) &: \text{magnetische Dipoldichte.}\end{aligned}$$

Makroskopische Felder (nicht unbedingt retardiert):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot } \mathbf{A}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu'_0} \left(\mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) \right), \\ \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &= -\text{grad } \Phi_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) - \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Makroskopische Feldgleichungen:

$\text{div } \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$	$\text{rot } \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \mathbf{J}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t)$
$\text{div } \mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = 0$	$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t)$

wobei

$$\hat{\epsilon}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu'_0 c' c'}, \quad \hat{\mu}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon'_0 c c'}.$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{J}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Randbedingungen an Materialgrenzflächen:

Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}_{\text{makro}}$ und $\mathbf{H}_{\text{makro}}$ sowie Normalkomponenten von $\mathbf{B}_{\text{makro}}$ und $\mathbf{D}_{\text{makro}}$ stetig.²¹

Im Falle einfacher Materialkonstanten:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}_0 \chi_e \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) \quad \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) = \mu'_0 \chi_m \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t)}$$

wobei

χ_e : elektrische Suszeptibilität ,
 σ : spezifische Leitfähigkeit ,
 χ_m : magnetische Suszeptibilität ,

bzw.

$$\boxed{\mathbf{D}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t) = \mu \mu'_0 \mathbf{H}_{\text{makro}}(\mathbf{r}, t)}$$

mit:

$$\begin{aligned} \epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \chi_e && \mathbf{Dielektrizitätskonstante} \\ \mu &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\hat{\epsilon}_0}{\epsilon'_0} \chi_m && \mathbf{Permeabilitätskonstante} \end{aligned}$$

Allgemein üblich:

Indizes $_{\text{makro}}$ und $_{\text{ex}}$ weglassen!

²¹Letzteres setzt allerdings voraus, daß die Punkt- und Flächenladungsanteile der Überschuldungen verschwinden.

Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

5.1 Grundlegendes

5.1.1 Qualitative Betrachtungen

Aus den Lösungen, die im Sinne von (2.20) durch die retardierten Potentiale (4.1) gegeben sind, läßt sich – zumindest für gesteuerte Ladungs-Stromverteilungen – bereits eine Reihe qualitativer Schlußfolgerungen ziehen:

- Die Wirkung (in Form von Feldänderungen) von raum-zeitlich lokalen Änderungen der Ladungs- und Stromverteilung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit als *elektromagnetische Welle* aus.
- Daher entsteht durch Beschleunigung von Ladungen stets elektromagnetische Strahlung – sofern sich die Strahlungsanteile nicht **ausnahmsweise** zu einem stationären elektromagnetischen Feld überlagern.
- Die elektromagnetischen Felder, die sich auch dann noch im Raum-Zeit-Kontinuum ausbreiten, wenn die erzeugenden Ladungs- und Stromanteile – makroskopisch gesehen – verschwunden sein sollten, können natürlich gemäß (2.2) immer noch spürbare Effekte hervorrufen.
- Dadurch erhält das elektromagnetische Feld selbst einen substanzartigen Charakter (*Nahewirkungstheorie*) und man wird ihm eine Energiedichte zuzuordnen müssen (siehe Abschn. 5.1.2).
- Während also der Betrag des Impulses einer Probeladung im homogenen Magnetfeld gemäß (2.2)/(A.3) konstant wäre, sendet sie tatsächlich ständig elektromagnetische Wellen (bei hoher Geschwindigkeit: *Synchrotronstrahlung*) aus, verliert also Energie. Das zeigt, daß in der ‘exakten’ relativistischen Bewegungsgleichung einer Punktladung im äußeren elektromagnetischen Feld – sofern eine solche überhaupt existiert (vgl. (Rohrlich, 1965)) – eine sog. *Strahlungsreaktionskraft* zu berücksichtigen ist. Nur so läßt sich der Energiesatz für das Gesamtsystem Teilchen+Feld wiederherstellen.

- Die Retardierungseffekte sind – streng genommen – bei jeder Formulierung eines Anfangswertproblems für elektromagnetisch wechselwirkende Teilchen zu berücksichtigen: Der weitere Bewegungsablauf hängt von der Vorgeschichte und den dadurch erzeugten elektromagnetischen Wellen ab.
- Daher kann für ein System von Punktladungen allein (ohne explizite Einbeziehung des elektromagnetischen Feldes) keine für große Beschleunigungen brauchbare LAGRANGE-Funktion existieren, die nur die Orte und Geschwindigkeiten der Punktladungen als Variable hat.

Anmerkung: Man kann zeigen, daß die retardierten Potentiale (Gln. (4.1) der Vorl.) für eine Punktladung q mit der Bahnkurve $\mathbf{r}_0(t)$ in der Bezeichnungsweise von Abschn. 4.1.2 der Vorlesung mit den sog. LIÉNARD-WIECHERT-**Potentiale**n

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{LW}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \cdot \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{r}_0(\hat{t})} \right)_{|\hat{t}=\hat{t}(\mathbf{r}, t)}, \\ \mathbf{A}_{\text{LW}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \left(\frac{q \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{r}_0(\hat{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\hat{t})) \cdot \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{r}_0(\hat{t})} \right)_{|\hat{t}=\hat{t}(\mathbf{r}, t)}\end{aligned}$$

übereinstimmen.¹ Berücksichtigt man die Retardierung nur in der Näherung

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{LW}}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|} + \frac{q}{2c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)| \right), \\ \mathbf{A}_{\text{LW}}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0(t)\end{aligned}$$

und vernachlässigt die Strahlungsreaktion, dann läßt sich die daraus resultierende elektromagnetische Wechselwirkung von Punktladungen stets durch eine LAGRANGE-Funktion beschreiben, die nur die Orte und Geschwindigkeiten der Punktladungen als Variable hat (Landau und Lifschitz, 1966, §65). Bzgl. einer weiteren Vereinfachung siehe (Gerlich, 1993, S. 51).

5.1.2 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

Um zu einer brauchbaren Definition für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes zu gelangen, untersuchen wir die Leistung, die es an den **Überschußladungen**

Version vom 26. März 2009

¹Man beachte die am Schluß von Abschnitt 4.1.2 erwähnte LORENTZ-Kovarianz der retardierten Potentiale und berechne sie zunächst in dem Laborsystem, in dem die Punktladung zum Zeitpunkt $\hat{t}(\mathbf{r}, t)$ ruht (siehe (Landau und Lifschitz, 1966, §63)).

innerhalb eines beliebigen Gebietes \mathcal{G} verrichtet:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{G}} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \, dV_{\mathbf{r}} \\
 (4.15) \quad &= \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\frac{c}{c'} \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t))}_{\substack{=\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \\ (4.11) \quad -\frac{c'}{c} \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)}}} - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right) dV_{\mathbf{r}} \\
 &= -\frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{c}{c'} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \right) dV_{\mathbf{r}}
 \end{aligned}$$

Unter der **Annahme**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \epsilon \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu'_0 \mathbf{H}, \\
 \epsilon \text{ und } \mu &\text{ in einer Umgebung von } \mathcal{G} \text{ konstant}
 \end{aligned}$$

folgt daraus mit dem GAUSSSchen Satz das sog. **POYNTINGsche Theorem**:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \, dV_{\mathbf{r}} \\
 &= - \int_{\mathcal{G}} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \, dV_{\mathbf{r}} - \int_{\partial \mathcal{G}} \frac{\mu'_0}{\mu_0} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}.
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Somit ist folgende Interpretation im Falle (4.20) mit konstanten ϵ , μ **konsistent**:²

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Energiedichte des (makrosk.)} \\ \text{elektromagnetischen Feldes.} \end{array} \right.
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu'_0}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Energiestromdichte des (makrosk.)} \\ \text{elektromagnetischen Feldes.} \end{array} \right.
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nach (5.1) ist die (als endlich vorausgesetzte) Gesamtenergie einer Lösung der **freien** MAXWELLSchen Gleichungen stets zeitlich konstant. Aus (5.2) und (4.20) ergibt sich damit als unmittelbare **Folgerung**:

Eine Lösung der freien MAXWELLSchen Gleichungen mit endlicher Gesamtenergie ist identisch Null, falls sie zu irgendeinem Zeitpunkt im ganzen \mathbb{R}^3 verschwindet.

Version vom 26. März 2009

²Natürlich ändert sich die rechte Seite von (5.1) nicht, wenn man zum Integranden ein quellfreies Vektorfeld hinzufügt. Daher sind im Prinzip auch andere Ausdrücke für die Energiestromdichte verwendbar (siehe z.B. (Lai, 1981)).

Gesamtenergie des elektrostatischen Feldes (1.5)/(1.6) für $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}} & \stackrel{(4.13)}{=} \frac{1}{8\pi} \int \left(-\nabla_{\mathbf{r}} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \mathbf{E}_{\rho}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{8\pi} \int \left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \operatorname{div} \mathbf{E}_{\rho}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{(1.2)}{=} \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon'_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}} dV_{\mathbf{r}'} \\
 & = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) \left(\int_{|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon'_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) dV_{\mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie des elektrostatischen Feldes stimmt also gemäß (5.2) mit der Arbeit überein, die gegen die Kraftwirkung des jeweils bereits aufgebauten Teilfeldes³ geleistet werden muß, um die einzelnen Ladungsanteile nacheinander aus dem Unendlichen in die vorgesehene Position zu bringen. Daß dieser Ausdruck für eine Punktladung divergiert, ist nicht verwunderlich.

Gesamtenergie des magnetostatischen Feldes (3.3) für $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}} & \stackrel{(3.5),(4.14)}{=} \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \int \left(\nabla_{\mathbf{r}} \times \int \frac{\mathcal{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{\text{Zykl. Spatpr.}}{=} \frac{1}{8\pi} \frac{c'}{c} \int (\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \nabla_{\mathbf{r}}) \cdot \left(\int \frac{\mathcal{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{8\pi} \frac{c'}{c} \int \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \left(\int \frac{\mathcal{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} \right) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{(3.1)}{=} \frac{c'}{c} \frac{\hat{\mu}_0}{8\pi} \int \int \frac{\mathcal{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathcal{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} dV_{\mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

Eine ähnliche Interpretation dieses Resultats ist wesentlich schwieriger, da bei successivem Aufbau der Stromverteilung die Arbeit zu berücksichtigen ist, die gegen das induzierte \mathbf{E} -Feld zu leisten ist.

5.1.3 Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes

Um zu einer entsprechenden Definition für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes zu gelangen, untersuchen wir die Gesamtkraft, die das (makroskopische) elektromagnetische Feld gemäß (2.1) auf die Überschußladungen innerhalb eines Gebie-

³Bei Beschleunigung der Ladungsanteile muß zusätzlich die Energie des entsprechenden Strahlungsfeldes aufgebracht werden.

tes \mathcal{G} mit $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ausübt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{G}} \left(\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) dV_{\mathbf{r}} \\
 & \stackrel{(4.15), (4.16)}{=} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{B} \times \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) dV \\
 & = \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{c'}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) + \mathbf{D} \times \underbrace{\frac{1}{c'} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}}_{\stackrel{(4.11)}{=} -\operatorname{rot} \mathbf{E}} \right) dV \\
 & = -\frac{c'}{c} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} \mathbf{D} \times \mathbf{B} dV \\
 & \quad + \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{B} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}}_{\stackrel{0}{=} \text{Voraus.}}} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) dV.
 \end{aligned}$$

Da für beliebige (hinz. gutartige) Vektorfelder \mathbf{F} stets⁴

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{F} & \stackrel{\text{Entw.-S.}}{=} \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \\
 & = \sum_{j,l=1}^3 (F^j \mathbf{e}_j \partial_l F^l + F^l \partial_l F^j \mathbf{e}_j - \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \partial_j (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})) \\
 & = \sum_{j,l=1}^3 \mathbf{e}_j \partial_l (F^j F^l - \frac{1}{2} \delta_l^j \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \\
 & = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \operatorname{div} \left(\sum_{l=1}^3 (F^j F^l - \frac{1}{2} \delta_l^j \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{e}_l \right)
 \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich daraus mit (5.3), (4.14) und dem GAUSSSchen Satz, wieder unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} & = \epsilon \hat{\epsilon}_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu'_0 \mathbf{H}, \\
 \epsilon \text{ und } \mu & \text{ in einer Umgebung von } \mathcal{G} \text{ konstant,}
 \end{aligned}$$

das **Resultat**:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{G}} \left(\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c'}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) dV_{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} \frac{\epsilon \mu}{c^2} \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \int_{\partial \mathcal{G}} \left(\sum_{l=1}^3 \mathcal{T}^{jl}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_l \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}},
 \end{aligned}
 } \quad (5.4)$$

wobei:

$$\boxed{
 \mathcal{T}^{jl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0} \left(E^j D^l - \frac{1}{2} \delta_l^j (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right)
 } \quad (5.5)$$

den sog. MAXWELLSchen *Spannungstensor* bezeichnet. Mit der Interpretation

$$\boxed{
 \frac{\epsilon \mu}{c^2} \mathcal{S} = \text{Impulsdichte des elektromagn. Feldes,}
 } \quad (5.6)$$

⁴Wir benutzen die übliche Notation:

$$F^1 \stackrel{\text{def}}{=} F_x, \quad \mathbf{e}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_x, \quad \partial_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \text{ usw.}$$

$$\boxed{\sum_{l=1}^3 \mathcal{T}^{jl} \mathbf{e}_l = \text{Stromdichte der } j\text{-Komponente des Feldimpulses.}} \quad (5.7)$$

gilt also – im Falle (4.20) mit konstanten ϵ, μ – das Prinzip **Aktio = Reaktion** auch für elektromagnetische Wechselwirkung, **wenn** man die zeitliche Änderung der Feldimpulse mit in die Bilanz einbezieht.

Abschließende Bemerkung:

Bei zeitlich konstantem **POYNTING-Vektor** \mathcal{S} genügt gemäß (5.4) bereits die Kenntnis des **MAXWELLSchen Spannungstensors** auf der Oberfläche von $\partial\mathcal{G}$, um die Gesamtkraft des Feldes auf die in \mathcal{G} befindlichen Überschußladungen zu bestimmen. Über die Überschußladungen selbst muß man dazu also dann nichts wissen.

5.1.4 HERTZscher Dipol

Sei ρ, \mathbf{j} eine Ladungs- und Stromverteilung im Vakuum (also $\epsilon = \mu = 0$), die folgenden Bedingungen genüge:

- Sie ist für alle Zeiten eng um den festen Raumpunkt \mathbf{r}_0 herum konzentriert.
- Die Gesamtladung ist Null.
- Das elektrische Dipolmoment ist **nicht** zeitlich konstant.

Einen sog. **HERTZschen Dipol** erhält man dann daraus, wenn man in den retardierten Potentialen (4.1) folgende Näherungen durchführt:

- Ersetzung von $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ durch $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ (im Hinblick auf den Grenzübergang $\mathbf{r} \rightarrow \infty$).
- TAYLOR-Entwicklung hins. der Zeitargumente von ρ und \mathbf{j} nach \mathbf{r}' um $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$ herum bis zum ersten Term, der zur Feldstärke beiträgt.⁵

Wegen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \underset{\text{TAYLOR}}{\approx} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

und

$$\underbrace{\int \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) dV_{\mathbf{r}'}}_{=\text{Gesamtladung}} \underset{\text{Voraus.}}{=} 0$$

⁵Die nächsten Terme liefern i.a. eine magnetische Dipol- und eine elektrische Quadrupolstrahlung.

lautet die entspr. Approximation des Skalarpotentials:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{HERTZ}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \cdot \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Von \mathbf{j} trägt dagegen bereits der erste Term der TAYLOR-Entwicklung (ii) zu \mathbf{B} bei:⁶

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{HERTZ}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) dV_{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \int \mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) dV_{\mathbf{r}'} \\ (3.12) &= \frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Kontin.-Gl.

Für das \mathbf{H} -Feld ergibt sich gemäß (5.9), (3.5) und (2.20):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{\mu'_0} \text{rot} \left(\frac{\hat{\mu}_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \right) \\ &\approx \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \\ &= -\frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \times \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Mit der bekannten Formel

$$\text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F})$$

(siehe Gl. (4.93) von (Lücke, ein)) ergibt sich gemäß (5.8), (5.9) und (2.20) für das \mathbf{E} -Feld:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \times \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c^2} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \\ (5.11) &= \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \left((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon'_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c).\end{aligned}$$

Entw.-S.

Mit dem Entwicklungssatz folgt daraus gemäß (5.10) und (2.3) für die sog. **Wellenzone**:

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} c' \mu'_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{1}{c' \mu'_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \end{array}\quad (5.12)$$

Für den POYNTING-Vektor ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &\approx |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)| |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ &= c' \mu'_0 |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ (5.10) &= \frac{c'}{c} \frac{\hat{\mu}_0}{\mu'_0} (4\pi)^{-2} \frac{\hat{\mu}_0}{c} \left| (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{P}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c) \right|^2 \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}.\end{aligned}$$

⁶Man beachte, daß auch die Näherung (5.8)/(5.9) der LORENTZ-Eichbedingung (2.23) genügt.

Anhang A

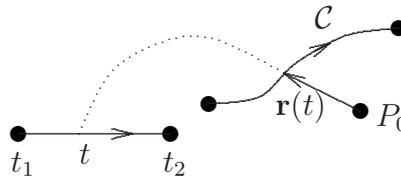
A.1 Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

A.1.1 Integrale auf Mannigfaltigkeiten

Das **Wegintegral** eines Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ über das orientierte Wegstück \mathcal{C} ist

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \underbrace{\dot{\mathbf{r}}(t) dt}_{=d\mathbf{r}},$$

wobei $(\mathbf{r}(t), t_1, t_2)$ eine frei wählbare Parametrisierung von \mathcal{C} ist:



$$\mathbf{t}(\mathbf{r}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} \quad \text{Bahntangenten-Vektor.}$$

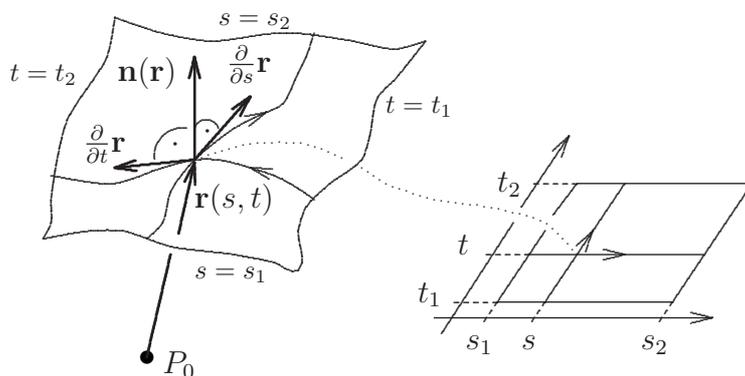
Typisches Anwendungsbeispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \text{Kraft auf einen Massenpunkt } m \\ \implies \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \begin{cases} \text{Arbeit, die das Kraftfeld } \mathbf{F} \text{ an } m \\ \text{bei Verschiebung längs } \mathcal{C} \text{ verrichtet} \end{cases} \\ &\quad (\text{in Parameterform: zeitliche Integration der Leistung}). \end{aligned}$$

Das **Oberflächenintegral** des Vektorfeldes $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ über das orientierte Flächenstück \mathcal{S} ist

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(s, t) \right) ds}_{=d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}} \right) dt,$$

wobei $(\mathbf{r}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$ eine frei wählbare Parametrisierung von \mathcal{S} ist:



$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(s, t)) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{r}(s, t)\right) \times \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(s, t)}{\left|\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{r}(s, t)\right) \times \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(s, t)\right|} \quad \text{Flächennormale.}$$

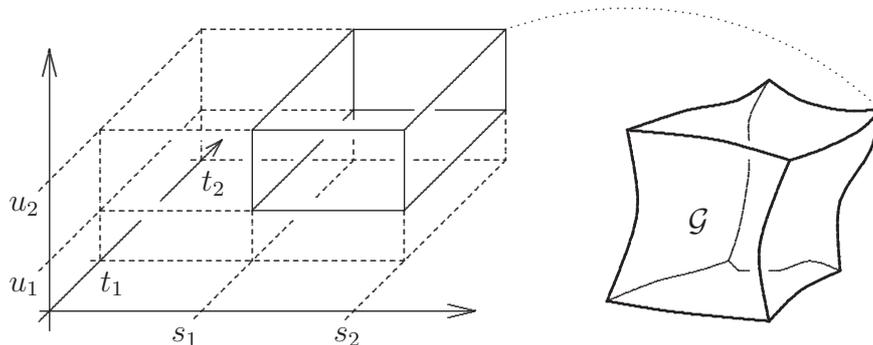
Typisches Anwendungsbeispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \text{Stromdichte} \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} &= \begin{cases} \text{Gesamtstrom durch } \mathcal{S} \\ \text{bei positiver Zählung in Normalenrichtung.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das **Volumenintegral** des Skalarfeldes $\rho(\mathbf{r})$ über das orientierte¹ Raumgebiet \mathcal{G} ist

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{s_1}^{s_2} \rho(\mathbf{r}(s, t, u)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{r}(s, t, u) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(s, t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}(s, t, u) \right)}_{=dV_{\mathbf{r}}} ds dt \right) du \right),$$

wobei $(\mathbf{r}(s, t, u), s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2)$ eine frei wählbare Parametrisierung von \mathcal{G} ist:



¹Die Orientierung des Raumgebietes meint eine (konsistente) Einteilung der (lokalen) Vektorbasen in rechts- und links-händige (je nach Vorzeichen des Spat-Produktes).

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s, t, u) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(s, t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{r}(s, t, u) \right) > 0 \quad (\text{Orientierung}).$$

Typisches Anwendungsbeispiel:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \text{Massendichte} \\ \implies \int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{r}) &= \text{Gesamtmasse innerhalb } \mathcal{G}. \end{aligned}$$

A.1.2 Mittelwertsätze

Mittelwertsatz für Wegintegrale:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = |\mathcal{C}| \mathbf{t}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') \quad \text{für geeignetes } \mathbf{r}' \in \mathcal{C},$$

$$|\mathcal{C}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \quad \text{Weglänge}.$$

Mittelwertsatz für Oberflächenintegrale:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} = |\mathcal{S}| \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad \text{für geeignetes } \mathbf{r}' \in \mathcal{S},$$

$$|\mathcal{S}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{S}} |d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}| \quad \text{Flächeninhalt}.$$

Mittelwertsatz für Volumenintegrale:

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} = |\mathcal{G}| \rho(\mathbf{r}') \quad \text{für geeignetes } \mathbf{r}' \in \mathcal{G},$$

$$|\mathcal{G}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}} dV_{\mathbf{r}} \quad \text{Rauminhalt}.$$

A.1.3 Reduktion der Dimension

Hauptsatz für Wegintegrale:



$$\Phi(\mathcal{C} - \text{Ende}) - \Phi(\mathcal{C} - \text{Anfang}) = \int_{\mathcal{C}} \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

wobei

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{in karthesischen Koordinaten.}$$

Aus Haupt- und Mittelwertsatz für Wegintegrale ergibt sich folgende koordinatenu-nabhängige Darstellung für den **Gradienten** $\text{grad } \Phi$ von Φ :

$$\mathbf{e} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{C}_\epsilon|} \left(\Phi(\mathcal{C}_\epsilon - \text{Ende}) - \Phi(\mathcal{C}_\epsilon - \text{Anfang}) \right),$$

Richtungsableitung,

$$\text{falls: } \sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{C}_\epsilon} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, \sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{C}_\epsilon} |\mathbf{e} - \mathbf{t}(\mathbf{r})| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} 0.$$

Satz von STOKES:²



$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}},$$

wobei

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial z} A_y(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial z} A_x(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x} A_z(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial x} A_y(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial y} A_x(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{in karthesischen Koordinaten.}$$

Aus dem Satz von STOKES und dem Mittelwertsatz für Oberflächenintegrale ergibt sich folgende koordinatenu-nabhängige Darstellung für die **Rotation** $\text{rot } \mathbf{A}$ von \mathbf{A} :

$$\mathbf{e} \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{S}_\epsilon|} \int_{\partial \mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

$$\text{falls: } \sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}_\epsilon} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, \sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}_\epsilon} |\mathbf{e} - \mathbf{n}(\mathbf{r})| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} 0.$$

Satz von GAUSS:³



$$\int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} = \int_{\mathcal{G}} \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}},$$

wobei

$$\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} j_x(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial y} j_y(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial z} j_z(\mathbf{r}) \quad \text{in karthesischen Koordinaten.}$$

Version vom 26. März 2009

²Hier bezeichnet $\partial \mathcal{S}$ den im Rechtsschraubensinn relativ zur Flächennormalen orientierten **Rand** von \mathcal{S} .

³Hier bezeichnet $\partial \mathcal{G}$ den **Rand** von \mathcal{G} mit aus \mathcal{G} heraus zeigenden Flächennormalen.

Aus dem Satz von GAUSS und dem Mittelwertsatz für Volumenintegrale ergibt sich folgende koordinatenunabhängige Darstellung für die **Divergenz** $\operatorname{div} j$ von j :

$$\boxed{\operatorname{div} j(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathcal{G}_\epsilon|} \int_{\partial \mathcal{G}_\epsilon} j(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_r,}$$

falls: $\sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{G}_\epsilon} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} 0.$

A.1.4 Wichtige Äquivalenzen

Ein Vektorfeld \mathbf{F} heißt **wirbelfrei**, oder auch **konservativ**, falls eine der folgenden drei äquivalenten Aussagen zutrifft:

1. $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ für **jeden geschlossenen** Weg C .
2. $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ für **alle** $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})$ für geeignetes **Skalarpotential** $\Phi(\mathbf{r})$.

Ein Vektorfeld \mathbf{B} heißt **quellfrei**, falls eine der folgenden drei äquivalenten Aussagen zutrifft:

1. $\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_r = 0$ für **jedes geschlossene** Flächenstück S .
2. $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ für **alle** $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ für ein geeignetes **Vektorpotential** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

A.1.5 Der NABLA-Operator

Aus mnemotechnischen Gründen schreibt man gern

$$\nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{statt} \quad \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})$$

mit dem formalen **NABLA-Operator**

$$\nabla_{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{in karthischen Koordinaten.}$$

Entsprechend schreibt man dann auch

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) & \text{ statt } \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot j(\mathbf{r}) & \text{ statt } \operatorname{div} j(\mathbf{r}), \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) & \text{ statt } \Delta_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

wobei $\Delta_{\mathbf{r}}$, wie üblich, den LAPLACE-*Operator* bezeichnet:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})) \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right) \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{in kartesischen Koordinaten.}\end{aligned}$$

Damit lassen sich viele Regeln der Vektoranalysis auf solche der Vektoralgebra zurückführen. Z.B. entspricht die Formel

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r})}$$

dem *Entwicklungssatz*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Man beachte auch die Formeln

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0, \quad \nabla \times (\nabla \Phi(\mathbf{r})) = 0,$$

die den algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$$

entsprechen.

Für **analytische** Skalarfelder schreibt sich mithilfe des NABLA-Operators die TAYLOR-*Entwicklung*:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = e^{\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}} \Phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}').}$$

A.1.6 Weitere Resultate

Falls $\mu(\mathbf{r})$ im Unendlichen hinreichend schnell abfällt, gilt die POISSONsche *Gleichung*:

$$\boxed{\Delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'} = -4\pi \mu(\mathbf{r}).}$$

Satz von EARNSHAW:

- Gegeben: (i) *einfaches Gebiet* \mathcal{G} ,
(ii) *zweimal stetig differenzierbares*⁴ *Skalarfeld* $U(\mathbf{r})$, *das der sog.*
LAPLACE-*Gleichung*

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 0$$

überall in \mathcal{G} *genügt.*

Behauptung: Falls $U(\mathbf{r})$, im Inneren $\mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$ von \mathcal{G} sein Maximum bzgl. \mathcal{G} annimmt, dann ist $U(\mathbf{r})$ über \mathcal{G} konstant.

Fundamentalsatz der Vektoranalysis: Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erlaubt eine Zerlegung

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r})$$

in ein **wirbelfreies** (d.h. konservatives) stetig differenzierbares Feld $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ und ein **quellfreies** stetig differenzierbares Feld $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$. Falls $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r})$ und $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r})$ im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden, ist

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

die einzige solche Zerlegung, die eine der beiden Zusatzbedingungen

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F}_1(\mathbf{r})| = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F}_2(\mathbf{r})| = 0$$

(und damit beide) erfüllt.

A.2 Exkurs über Spezielle Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie basiert auf drei Prinzipien, die in **jedem** Laborsystem⁵ L gelten:

1. **Zeitsynchronisation:** Die Uhren in L lassen sich so synchronisieren, daß der Betrag c der L -Lichtgeschwindigkeit des Lichtes (im Vakuum) von der Ausbreitungsrichtung unabhängig ist. Auf diese Weise wird die Gleichzeitigkeit von Ereignissen im Sinne der L -Meßvorschriften definiert, wenn diese an unterschiedlichen Labororten stattfinden.
2. **LORENTZ-Kontraktion:** Die L -Länge eines mit der L -Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Standard-Maßstabes ist um den Faktor $1/\gamma_{\mathbf{v}}$ kürzer als diejenige eines in L ruhenden,⁶ wobei:

$$\gamma_{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{|\mathbf{r}|} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Version vom 26. März 2009

⁵Unter einem **Laborsystem** verstehen wir stets ein *Inertialsystem* mit den üblichen Meßvorschriften und einem kartesischen Koordinatensystem. Die gemäß diesen Vorschriften gemessenen Größen werden als L -Größen bezeichnet.

⁶Ob diese Verkürzung ‘echt’ oder nur ‘scheinbar’ ist, ließe sich nur dann entscheiden, wenn ‘absolute’ Zeitsynchronisation möglich wäre. Entsprechendes gilt für die Zeitdilatation.

3. **Zeitdilatation** Das Zeitintervall, das eine mit der L -Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegte Standard-Uhr anzeigt, ist um den Faktor $1/\gamma_{\mathbf{v}}$ kürzer als das entsprechende L -Zeitintervall (das man an Standard-Uhren abliest, die in L ruhen und in o.a. Weise synchronisiert sind).

Aus Abb. A.1 erkennt man daraus unmittelbar, daß c von L unabhängig ist, sowie die Umrechnungsformeln für die Raum-Zeit-Koordinaten (ct, x, y, z) eines Ereignisses bzgl. L in die Raum-Zeit-Koordinaten (ct', x', y', z') desselben Ereignisses bzgl. eines Laborsystems L' , das sich dadurch ergibt, daß man L drehungsfrei in gleichförmige Bewegung mit der L -Geschwindigkeit $v\mathbf{e}_x$ versetzt (**boostet**):

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} x' = \gamma_v \left(x - \frac{v}{c} ct \right), \\ ct' = \gamma_v \left(ct - \frac{v}{c} x \right), \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} x = \gamma_v \left(x' + \frac{v}{c} ct' \right), \\ ct = \gamma_v \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right). \end{array}} \end{array} \quad (\text{A.2})$$

Transformationen gemäß (A.2) bezeichnet man als **spezielle LORENTZ-Transformationen**.

(Hinreichend gutartige) Bahnkurven (des Schwerpunktes) physikalischer Teilchen lassen sich auch mithilfe der $\frac{1}{c}$ -fachen MINKOWSKI-**Bahnlänge**

$$\tau = \tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 + \int_0^t \underbrace{\frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} x^0(t) \right)^2 - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right)^2}}_{1/\gamma_{\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)}} dt, \quad x^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} ct$$

parametrisieren. Da τ und somit

$$\frac{d}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} \frac{d}{dt} = \gamma_{\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)} \frac{d}{dt}$$

von der speziellen Wahl des Laborsystems L unabhängig ist, transformiert sich die sog. **Vierer-Geschwindigkeit**

$$\dot{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)} \left(c, \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right)$$

genau so, wie der **Vierer-Ereignisvektor** $(ct, \mathbf{r}(t))$. Entsprechendes gilt – aufgrund der Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Ladung (im Gegensatz zur Masse) – damit⁷ für die **Vierer-Stromdichte** $(c\rho(t), \mathbf{j}(t))$ und für die **Vierer-Beschleunigung**

$$\ddot{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\gamma_{\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)} \frac{d}{dt} \right)^2 (ct, \mathbf{r}(t)).$$

Version vom 26. März 2009

⁷Für den Spezialfall einer Gesamtheit gleichartiger Ladungen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen, gilt nämlich $(c\rho, \mathbf{j}) = \rho_0 \gamma_{\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)} (c, \mathbf{v})$, wobei ρ_0 die Ladungsdichte im Ruhesystem der Ladungsträger bezeichnet.

Falls L' das momentane Ruhesystem (eines Teilchens mit der L -Bahnkurve $\mathbf{r}(\cdot)$ zum L -Zeitpunkt t) ist, gilt offensichtlich⁸

$$\gamma_{\frac{d}{dt'}\mathbf{r}'(t')} = 1, \quad \frac{d}{dt'}\gamma_{\frac{d}{dt'}\mathbf{r}'(t')} = 0 \quad \text{für entspr. } t' = t'(t)$$

und somit

$$\left(\gamma_{\frac{d}{dt'}\mathbf{r}'(t')} \frac{d}{dt'} \right)^2 (ct', \mathbf{r}'(t')) = \left(0, \quad \underbrace{\left(\frac{d}{dt'} \right)^2 \mathbf{r}'(t')}_{\text{gewöhnliche } L'\text{-Beschleunigung } \mathbf{a}'(t')} \right).$$

Bei entsprechender Ausrichtung der räumlichen Koordinatensysteme von L und L' , insbesondere also

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = v\mathbf{e}_x \quad \text{zum betr. } L\text{-Zeitpunkt } t,$$

folgt daraus durch spezielle LORENTZ-Transformation (A.2):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\gamma_v \frac{v}{c} a'_{x'}(t'), \gamma_v a'_{x'}(t') \mathbf{e}'_{x'} + a'_{y'}(t') \mathbf{e}'_{y'} + a'_{z'}(t') \mathbf{e}'_{z'} \right)$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma_v \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right) = \mathbf{a}'_{\parallel}(t') + \frac{1}{\gamma_v} \mathbf{a}'_{\perp}(t').$$

(vgl. Fußnote auf Seite 33 und Anmerkung zu (2.17)). Da in der speziellen Relativitätstheorie der Begriff der Gesamtkraft \mathbf{F} , die auf ein Teilchen wirkt, so eingeführt wird, daß

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{\widehat{m_0} \gamma_{\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)}_{L\text{-Impuls } \mathbf{p}(t)} \quad (\text{A.3})$$

gilt, folgt also:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}'_{\parallel}(t') + \frac{1}{\gamma_{\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)}} \mathbf{F}'_{\perp}(t') \quad \text{falls } \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = L\text{-Geschwindigkeit von } L'.$$

⁸In L' stimmt also die **momentane** Änderungsgeschwindigkeit von τ mit derjenigen der Zeit einer (momentan) in L' ruhenden Standard-Uhr überein. Daher bezeichnet man τ auch als **Ei-
genzeit**.

A.3 Verschiedene Maßsysteme

A.3.1 Allgemeines

Maßsystemkonstanten: Grundsätzlich können die Maßsystemkonstanten

$$\epsilon'_0, \mu'_0, c'$$

willkürlich festgelegt werden. Allerdings ist dabei zu beachten, daß z.B. die “Ladung” q bei verschiedenen Festlegungen für ϵ'_0 auch **verschiedene physikalische Dimensionen** annimmt – was unmittelbar aus dem COULOMBSchen Gesetz folgt.

Kohärente Maßsysteme: Ein Maßsystem heißt *kohärent*, falls alle **Definitionsgleichungen** bei Ersetzung der physikalischen Größen durch ihre Einheiten richtig bleiben. Aus dem COULOMBSchen Gesetz als Definitionsgleichung für die elektrische Ladung (z.B. im GAUSSSchen Maßsystem) würde also in einem kohärenten Maßsystem folgen:

$$\text{Krafteinheit} = \frac{1}{4\pi\epsilon'_0} \left(\frac{\text{Ladungseinheit}}{\text{Längeneinheit}} \right)^2.$$

Rationale und nichtrationale Maßsysteme: Falls in einem Maßsystem alle Grundgleichungen rationale Beziehungen zwischen den physikalischen Größen darstellen, dann nennt man das betreffende Maßsystem *rational*. Alle anderen Maßsysteme nennt man *nichtrational*.

A.3.2 Das GAUSSSche Maßsystem

Damit sich das COULOMBSche **Gesetz**, das hier als **Definitionsgleichung für die elektrische Ladung** dient, so einfach wie möglich darstellt, setzt man

$$\epsilon'_0 = \frac{1}{4\pi}.$$

Um für die mikroskopischen MAXWELLSchen Gleichungen die dort unnötige Unterscheidung von **H**- und **B**-Feld zu vermeiden, setzt man

$$\mu'_0 = 1.$$

Um außerdem das Transformationsverhalten (2.17) durchsichtiger zu machen, setzt man⁹

$$c' = 1.$$

Gemäß (4.14) und (2.3) ist dann

$$\hat{\epsilon}_0 = 1; \quad \hat{\mu}_0 = \frac{4\pi}{c}.$$

⁹**E** und **B** erhalten damit gleiche physikalische Dimension!

Das Maßsystem ist also **nichtrational**, wie die Grundgleichung (4.16) zeigt. Im übrigen wird das Maßsystem als **kohärent** festgelegt, wobei als Basiseinheiten die drei mechanischen Einheiten cm, g, s gewählt werden. Damit folgt z.B. aus dem COULOMBSchen Gesetz (Definitionsgleichung der Ladung!)

$$\text{Ladungseinheit} = \sqrt{\frac{\text{cm} \cdot \text{g}}{\text{s}^2}} \text{cm} = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}.$$

A.3.3 Das MKSA-System (Teilsystem des SI)

Hier möchte man Einheiten haben, die für das Experiment zweckmäßig sind. Deshalb nimmt man – wie in Abschn. 3.1.3 beschrieben – zu den drei mechanischen Einheiten m, kg, s noch das **Ampere als weitere Basiseinheit** hinzu. Daher hat man

$$\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon'_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{(\text{Ampere} \cdot \text{Sekunden})^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2}.$$

Das COULOMBSche Gesetz ist dementsprechend **nicht mehr als Definitionsgleichung** für die Ladung anzusehen, sondern die Ladungseinheit ist jetzt die abgeleitete Größe

$$\text{Coulomb} = \text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}.$$

Zur Vereinfachung des experimentell so wichtigen FARADAYSchen Induktionsgesetzes legt man

$$c' = c$$

fest. Das **H**-Feld möchte man durch die experimentell leicht zugänglichen Beziehungen (3.19)/(3.6) festlegen. Nach (3.4) und (3.5) ist dementsprechend

$$\mu'_0 = \hat{\mu}_0 \stackrel{(2.3)}{=} \mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

zu setzen. Hier gilt also gemäß (4.14):

$$\hat{\epsilon}_0 = \epsilon_0.$$

Dieses Maßsystem ist **rational** und **kohärent**.

A.3.4 Weitere Maßsysteme

Natürlich können auch andere Festlegungen von ϵ'_0, μ'_0, c' nützlich sein. Beispiele:¹⁰

Version vom 26. März 2009

¹⁰Alle drei Maßsysteme sind **nichtrational** und **kohärent**. Das HEAVISIDESche System wird gewöhnlich in der **Quantenelektrodynamik** benutzt.

Elektrostatistisches (cgs-) System:

$$\epsilon'_0 = \frac{1}{4\pi}, \quad c' = c, \quad \mu'_0 = c^{-2} \quad \left(\text{und somit } \hat{\epsilon}_0 = 1, \hat{\mu}_0 = \frac{4\pi}{c} \right).$$

Elektromagnetisches (cgs-) System:

$$\epsilon'_0 = \frac{1}{4\pi c^2}, \quad c' = c, \quad \mu'_0 = 1 \quad \left(\text{und somit } \hat{\epsilon}_0 = c^{-2}, \hat{\mu}_0 = 4\pi \right).$$

HEAVISIDESches System:

$$\epsilon'_0 = \mu'_0 = 1, \quad c' = 1 \quad \left(\text{und somit } \hat{\epsilon}_0 = 1, \hat{\mu}_0 = \frac{1}{c} \right).$$

A.4 Übungsaufgaben¹¹

Aufgabe 1 Es sei durch

$$p' = 2p, \quad q' = q$$

eine Transformation der kanonischen Variablen für die HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

gegeben. Man berechne die POISSON-Klammern, die LAGANGE-Klammern und überprüfe, ob die Transformation kanonisch ist.

Aufgabe 2 Man löse für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator

$$\left(V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3z^2 \right)$$

die HAMILTONsche partielle Differentialgleichung und bestimme daraus die Lösungen der Bewegungsgleichung.

Aufgabe 3 (Geschwindigkeitsfeld einer reinen Rotationsbewegung)

a) Man bestimme das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, das einer **Rotation** mit konstanter Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$ um die zu \mathbf{e} parallele Achse durch P_0 entspricht.

b) Man zeige, daß dieses Geschwindigkeitsfeld der Gleichung

$$\left| \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right| = 2\omega_0$$

für jedes einfache Flächenstück \mathcal{S} mit $|\mathcal{S}| \neq 0$ und konstanter Flächennormalen \mathbf{e} genügt.

¹¹Bei den ersten beiden Aufgaben handelt es sich um einen Nachtrag zur vorangegangenen Vorlesung MECHANIK von Prof. G. GERLICH.

Aufgabe 4 (Konservative Zentralfelder) Man zeige, daß ein Zentralfeld der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

genau dann konservativ ist, wenn¹² eine stetige Funktion f existiert mit

$$\Psi(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|).$$

Aufgabe 5 (Homogen geladene Kugelschale) Gegeben sei eine Ladungsverteilung der Form

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\mathbf{r}| \leq R, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man bestimme und skizziere das zugehörige COULOMB-Potential und beschreibe die Bewegung, die ein geladener Massenpunkt innerhalb des Gebietes $|\mathbf{r}| \leq R$ ausführen würde, wenn auf ihn nur die zugehörige elektrostatische Kraft wirken würde.

Aufgabe 6 (Feld eines idealen elektrischen Dipols) Das Feld eines im Koordinatenursprung ruhenden *idealen elektrischen Dipols* mit dem *Dipolmoment* \mathbf{P} ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} \right).$$

Man bestimme den zugehörigen Fluß

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

für den Fall

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{e}_z, \quad \mathcal{S} = (z > 0)\text{-Anteil von } \partial U_R(0),$$

wobei $U_R(0)$ die Kugel mit dem Radius R um den Koordinatenursprung bezeichnet.

Aufgabe 7 (Kraft zwischen homogenen Kugelladungen) Gegeben seien die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und zwei Ladungsverteilungen ρ_1, ρ_2 der Form

$$\rho_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q_j}{\frac{4}{3}\pi(R_j)^3} & \text{für } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \leq R_j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, daß die elektrostatische Kraft, die ρ_1 auf ρ_2 ausübt, weder von R_1 noch von R_2 abhängt, solange

$$U_{R_1}(\mathbf{r}_1) \cap U_{R_2}(\mathbf{r}_2) = \emptyset$$

gilt.

¹² Zum Beweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung untersuche man das Wegintegral von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ über geschlossene Wege, die sich jeweils aus zwei Wegen in radialer Richtung und zwei Wegen konstanten Abstandes zum Bezugspunkt P_0 zusammensetzen. Dabei beachte man den Mittelwertsatz für Wegintegrale.

Aufgabe 8 (Dünnere, homogen geladener Stab) Gegeben sei ein unendlich dünner, homogen geladener Stab der Gesamtladung q mit den Endpunkten bei $-\frac{L}{2}\mathbf{e}_x$ und $+\frac{L}{2}\mathbf{e}_x$.

- Man zeige, daß die Menge aller Flächen konstanten elektrostatischen Potentials mit der Menge aller Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte in den Stabenden liegen, übereinstimmt.¹³
- Man bestimme das Potential auf der Stabachse explizit als Funktion des Abstandes vom Stabmittelpunkt.
- Man bestimme das zugehörige elektrostatische Feld im Limes $L \rightarrow \infty$ bei konstantem q/L .

Aufgabe 9 (δ -Folgen) Gegeben sei die Funktionenfolge

$$\delta_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon} g(x/\epsilon) / \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \quad \text{für } \epsilon > 0, x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige für beliebige stückweise stetige Funktionen f über \mathbb{R} :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x - x_0) f(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(f(x_0 + \epsilon) + f(x_0 - \epsilon) \right).$$

Aufgabe 10 (FARADAY-Effekt) Gegeben sei ein geerdeter idealer Leiter mit einem abgeschlossenen Hohlraum, in dessen Inneren sich eine Ladung q befindet.

- Man bestimme die Gesamtladung auf dem Teil der Leiteroberfläche, der den Hohlraum bildet.
- Man zeige, daß die Ladung im Hohlraum keinen Einfluß auf die elektrostatischen Verhältnisse außerhalb des Leiters hat.
- Man zeige, daß die elektrostatischen Verhältnisse außerhalb des Leiters keinen Einfluß auf die elektrostatischen Verhältnisse im Hohlraum haben.

¹³Dabei beachte man, daß die Flächennormale eines Rotationsellipsoids stets den Winkel zwischen den (verlängerten) Brennpunktstrahlen halbiert (siehe z.B. LAMBACHER-SCHWEIZER, *Analytische Geometrie*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1968, Satz 3 auf Seite 55).

Aufgabe 11 (Punktladung zwischen planparallelen Leiterplatten) Zwei ideal leitende Platten seien im Vakuum einander parallel gegenübergestellt und geerdet, d.h. ihr elektrostatisches Potential konstant auf Null gesetzt. Die Ausdehnung der Platten sei groß im Vergleich zu ihrem Abstand L .

Man bestimme das Potential (als unendliche Reihe), das sich einstellt, wenn man eine Punktladung q genau zwischen die Platten bringt. Außerdem bestimme man die auf die Platten influenzierte Gesamtladung.

Aufgabe 12 (Wechselwirkung leitender Kugeln) Gegeben seien zwei leitende Kugeln mit den Radien $R_1 = 2\text{cm}$ und $R_2 \ll R_1$. Der Abstand der Kugelmittelpunkte sei 4cm . Die größere Kugel sei geerdet, die Gesamtladung der nahezu punktförmigen Kugel sei eine Amperesekunde.¹⁴

- Man bestimme die Ladung auf der größeren Kugel im Limes $R_2 \rightarrow 0$ entspr. 1.2.3 der Vorlesung.
- Man bestimme die Anziehungskraft beider Kugeln im Limes $R_2 \rightarrow 0$.
- Wie groß darf R_2 in etwa sein, damit die Anziehungskraft bis auf 1% mit der in b) ermittelten übereinstimmt?
- Man bestimme die in Abschn. 1.2.4 der Vorlesung behandelten Kapazitäts- und Influenzkoeffizienten (in Einheiten des praktischen Maßsystems) für diese Leiteranordnung im Limes $R_2 \rightarrow 0$.
- Man überprüfe für diesen konkreten Fall die Aussage des GREENSchen Reziprozitätstheorems.

Aufgabe 13 (Relativistischer Bezugssystemwechsel) Eine Probeladung q_{Probe} werde mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} im elektromagnetischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0$ bewegt, wobei \mathbf{v} senkrecht zu \mathbf{B}_0 sei.

Man bestimme die Kraft, die das elektromagnetische Feld im **Ruhsystem** der Probeladung auf diese ausübt, nach den Regeln der Speziellen Relativitätstheorie (siehe Exkurs dazu) und überprüfe die Konsistenz mit den Transformationsregeln gemäß Gln. (2.16) der Vorlesung.

¹⁴Im **praktischen Maßsystem** ist definitionsgemäß $k = 10^{-7} \frac{\text{c}^2 \cdot \text{Newton}}{\text{Ampere}^2}$ und somit $\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi k} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Amperesekunde}}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2}$. Im übrigen ist $1\text{Newtonmeter} = 1\text{Wattsekunde} = 1\text{Voltamperesekunde}$.

Aufgabe 14 (Relativistische Bewegungsgleichung) Die relativistische Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Ruhemasse $m_0 > 0$, auf das die Gesamtkraft $\mathbf{F}(t)$ wirkt, ist

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma_{\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)} m_0 \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right) = \mathbf{F}(t); \quad \gamma_{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} 1 / \sqrt{1 - |\mathbf{v}/c|^2}$$

(vgl. Exkurs über Spezielle Relativitätstheorie). Man zeige:

a) Der Betrag der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)$ ist immer kleiner als c (wenn das für wenigstens einen Zeitpunkt gilt).

b) Die Geschwindigkeit berechnet sich aus dem Impuls

$$\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\mathbf{v}(t)} m_0 \mathbf{v}(t)$$

gemäß

$$\mathbf{v}(t)/c = \mathbf{p}(t) / \sqrt{m_0^2 c^2 + |\mathbf{p}(t)|^2}.$$

c) Die Richtung der Beschleunigung $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \mathbf{r}(t)$ stimmt dann und nur dann mit derjenigen von $\mathbf{F}(t)$ überein, wenn die Geschwindigkeit (zum betr. Zeitpunkt) entweder senkrecht oder parallel (bzw. antiparallel) zu $\mathbf{F}(t)$ ist.

d) Die Leistung, die $\mathbf{F}(t)$ am Teilchen verrichtet, ist

$$\mathcal{L}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt} (m_{\mathbf{v}(t)} c^2),$$

wobei $m_{\mathbf{v}(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\mathbf{v}(t)} m_0$.

e) Im Falle¹⁵

$$\mathbf{F}(t) = -q_{\text{Probe}} \text{grad } \Phi(\mathbf{r}(t))$$

kompensiert die Änderung der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathbf{v}(t)} c^2 - m_0 c^2$$

exakt die Änderung der potentiellen Energie $q_{\text{Probe}} \Phi(\mathbf{r}(t))$; d.h. die relativistische Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathbf{v}(t)} c^2 + q_{\text{Probe}} \Phi(\mathbf{r}(t))$$

ist zeitunabhängig.

¹⁵Geladenes Teilchen im statischen Elektrischen Feld mit Potential Φ , ohne Berücksichtigung der Strahlungsreaktion.

- f) Der Betrag der Geschwindigkeit berechnet sich aus der kinetischen Energie E_{kin} und der Ruhemasse m_0 gemäß

$$|\mathbf{v}|/c = \frac{\sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2)}}{(E_{\text{kin}} + m_0c^2)}.$$

- g) Im Falle¹⁶

$$\mathbf{F}(t) = q_{\text{Probe}} \frac{\mathbf{v}(t)}{c'} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

ist die kinetische Energie, und damit auch der Betrag des Impulses, zeitlich konstant.

- h) Für konstantes \mathbf{B} sind dabei Kreisbahnen mit dem Radius

$$R = \frac{|\mathbf{p}(t) c'}{|q_{\text{Probe}} \mathbf{B}|}$$

möglich, den man durch entsprechende Wahl von $|\mathbf{p}(0)|$ beliebig einstellen kann.

Aufgabe 15 (Elementarteilchen) In einem typischen Betatron für medizinische Bestrahlung erreichen Elektronen eine kinetische Energie von etwa $40 \text{ MeV} \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ Wattsekunden}$, während die Ruheenergie eines Elektrons nur $0,511 \text{ MeV}/c^2$ beträgt.

- Wie groß ist die Elektronengeschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit?
- Wieviele Gauß ($10^{-4} \text{ Voltsekunden}$) muß die Stärke eines homogenen \mathbf{B} -Feldes betragen, um die Elektronen auf einer Kreisbahn vom Radius $R = 50 \text{ cm}$ zu halten?
- Wie ändern sich die Verhältnisse für Protonen (Ruhemasse $\approx 938 \text{ MeV}/c^2$) gleicher **kinetischer** Energie?

Aufgabe 16 (Begrenztes elektrisches Querfeld) Gegeben sei ein auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ beschränktes elektrostatisches Feld, das dort den konstanten Wert $E\mathbf{e}_z$ annehme. Ein relativistisches Teilchen der Ladung q und Ruhemasse m_0 werde mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_x$ in dieses Feld eingeschossen. Unter Verwendung der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma_{\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)} m_0 \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right) = q_{\text{Probe}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q_{\text{Probe}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

(für $\mathbf{B} = 0$) zeige man:

¹⁶Geladenes Teilchen im statischen magnetischen Kraftflußfeld \mathbf{B} , ohne Berücksichtigung der Strahlungsreaktion.

- a) Für die Endgeschwindigkeit \mathbf{v} gilt

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{qE\Delta t}{m_0\gamma_{v_0}v_0},$$

wobei Δt die Zeitdauer bezeichnet, die sich q im Feldbereich aufhält.

- b) Dabei gilt die Ungleichung

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{(m_0c)^2 + (m_{v_0}v_0)^2}{(m_{v_0}v_0c/L)^2 - (qE)^2}.$$

- c) Für $|qEL| \ll m_{v_0}v_0^2$ verändert sich daher die x -Komponente der Geschwindigkeit praktisch nicht und für den Winkel ϵ , um den die Richtung des Teilchens nach Durchlauf geändert ist, gilt (bei entspr. Vorzeichenkonv.) in sehr guter Näherung

$$\epsilon = \frac{q}{m_{v_0}} \frac{EL}{v_0^2}.$$

Aufgabe 17 (THOMSONSche Parabelmethode) Man betrachte die gleiche Situation wie in der vorigen Aufgabe, füge nun aber in dem Bereich $0 \leq x \leq L$ noch das konstante Kraftflußfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ hinzu.

- a) Man bestimme die Ablenkwinkel in entsprechender Näherung.
- b) Man zeige, daß die entsprechenden Bahnpunkte mit $x = \lambda L$ (zu vorgeg. $\lambda \gg 1$) für Teilchen unterschiedlicher Geschwindigkeit v_0 , aber festem Verhältnis $\frac{q}{m_{v_0}}$ auf Parabeln liegen müßten.
- c) Man zeige, daß die entsprechenden Bahnpunkte mit $x = \lambda L$ (zu vorgeg. $\lambda \gg 1$) für Teilchen gleicher Geschwindigkeit v_0 , aber unterschiedlicher Verhältnisse $\frac{q}{m_{v_0}}$ auf Geraden liegen müßten.
- d) Man überlege, wie sich mit einer solchen Anordnung die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit überprüfen läßt.¹⁷

Aufgabe 18 (B-Feld eines geraden Stromfadens) Gegeben seien eine Länge R , ein Stromwert J und eine hinreichend glatte Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ der Form

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(\sqrt{y^2 + z^2})\mathbf{e}_x,$$

die den Bedingungen

$$\rho > R \implies j(\rho) = 0$$

und

$$2\pi \int_0^R j(\rho) d\rho = J$$

genügt.

Man zeige, daß das in Abschnitt 2.1.3 der Vorlesung ermittelte Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{J \mathbf{e}_x \times \mathbf{r}}{|\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}|^2} \quad \text{für } y^2 + z^2 > R$$

die einzige bzgl. der x -Achse rotationssymmetrische x -unabhängige Lösung der Grundgleichungen

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

der Magnetostatik ist, die im Unendlichen verschwindet.

Man zeige auch, daß dieses Ergebnis im Einklang mit dem LAPLACESchen Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \times d\mathbf{r}'$$

steht,¹⁸ wobei \mathcal{C} den orientierten Weg bezeichnet, längs dessen der konstante Strom J fließt (hier also die x -Achse).

Aufgabe 19 (Transformationsverhalten des elektromagnetischen Feldes)

Man zeige, daß das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v (\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t)), \\ \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') &= \gamma_v \left(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ bei Bezugssystemwechsel

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\parallel} &= \gamma_v \left(\mathbf{r}_{\parallel} - \frac{v}{c} ct \right); & \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp}, \\ ct' &= \gamma_v \left(ct - \frac{v}{c} \cdot \mathbf{r}_{\parallel} \right) \end{aligned} \quad (A.2)$$

tatsächlich aus dem LORENTZ-Tensor-Charakter von

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ +\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +\frac{1}{c}E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +\frac{1}{c}E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

folgt.

Version vom 26. März 2009

¹⁸Man beachte: $\frac{d}{dx} \frac{x}{d^2 + x^2} = (d^2 + x^2)^{-3/2}$.

Aufgabe 20 (Elektromotor) Eine starre, ebene Stromschleife werde mit der konstanten, vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_y$ in einem konstanten, homogenen Kraftflußfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$ gedreht. Der Flächenvektor des von der Stromschleife begrenzten ebenen Flächenstücks \mathcal{S}_t zur Zeit $t = 0$ sei $\mathbf{S} = F\mathbf{e}_x$.

- a) Man bestimme die in der Leiterschleife induzierte Umlaufspannung

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{S}_t} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}_r \quad (2.18)$$

- b) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$, für die das vorgegebene \mathbf{B} -Feld auf die Leiterschleife das konstante Drehmoment $\mathbf{M}_{\text{mech}} = -M\mathbf{e}_y$ ausübt und vergleiche die elektrische Leistung $U(t)I(t)$ mit der mechanischen, die solch ein 'Elektromotor' leistet.
- c) Man diskutiere die Auswirkung des OHMSchen Leiterwiderstandes auf die tatsächlich zu erbringende elektrische Leistung und deren Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω .

Aufgabe 21 (Quasi-zweidimensionale Probleme) Gegeben sei eine hinreichend gutartige statische Ladungsverteilung der Form $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y)$ in kartesischen Koordinaten x, y, z . Man zeige:

- a) Obwohl das COULOMB-Potential

$$\Phi_\rho(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{U_R(0)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

nicht existiert, existiert das COULOMB-Feld

$$\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}) = -\lim_{R \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{U_R(0)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{\mathbf{r}'}$$

und besitzt das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-2 \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) \rho(x', y') dx' \right) dy'.$$

- b) Es gilt daher das zweidimensionale Analogon

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \rho(x', y') dx' \right) dy' \\ & = 2\pi \rho(x, y) \end{aligned}$$

zur **Poissonschen** Gleichung, was man üblicherweise formal durch

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi \delta(x)\delta(y)$$

mitteilt.

Aufgabe 22 (Inneres DIRICHLET-Problem der Kugel) Man bestimme die GREENSche Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

für das **innere** DIRICHLET-Problem der Kugel

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| < R \} .$$

Entsprechend Abschnitt 1.3.2 der Vorlesung sind also folgende Bedingungen zu erfüllen:

- (i) $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist beliebig oft differenzierbar für $|\mathbf{r}| < R \geq |\mathbf{r}'|$,
- (ii) $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $|\mathbf{r}| < R = |\mathbf{r}'|$,
- (iii) $\Delta_{\mathbf{r}'} H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $|\mathbf{r}| < R \geq |\mathbf{r}'|$.

Man zeige, daß das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ im Inneren einer – nicht unbedingt leitenden – Hohlkugel vom Radius R , in deren Innerem die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ vorgegeben ist, für $r < R$ stets der Gleichung

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{\sqrt{|\mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - 2R^2 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} + R^4}} \right) \rho(\mathbf{r}') \, dV_{\mathbf{r}'} \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{G}} \Phi(\mathbf{r}') \frac{(|\mathbf{r}|^2 - R^2)}{R(|\mathbf{r}|^2 + R^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{3/2}} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{r}'} \end{aligned}$$

genügt.

Aufgabe 23 (Rotation eines Vektorfeldes in Kugelkoordinaten) Analog zu der in der Vorlesung gegebenen Herleitung des Ausdrucks für die Divergenz eines Skalarfeldes in Kugelkoordinaten bestimme man die Rotation eines allgemeinen (hinreichend gutartigen) Vektorfeldes \mathbf{j} in Kugelkoordinaten.

Man zeige also mithilfe der koordinatenunabhängigen Definition

$$\mathbf{e} \cdot \text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{S}_\epsilon|} \int_{\partial\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

der Rotation und mithilfe des Mittelwertsatzes für Wegintegrale sowie des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{j})^r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\varphi) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\vartheta, \\ (\text{rot } \mathbf{j})^\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\varphi), \\ (\text{rot } \mathbf{j})^\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^r. \end{aligned}$$

Aufgabe 24 (Multipolmomente eines homogen geladenen Stabes) Gegeben sei ein homogen geladener, unendlich dünner Stab der Länge L mit der Gesamtladung q .

- Man bestimme die in Abschnitt 1.4.2 der Vorlesung definierten Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ für den Fall, daß die Stabachse auf der Polarachse des Kugelkoordinatensystems und ein Stabende im Koordinatenursprung liegt.
- Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn man den Koordinatenursprung in den Stabmittelpunkt verlegt?
- Man gebe das elektrostatische Potential in Quadrupolnäherung an und diskutiere den zugehörigen Feldverlauf.

Aufgabe 25 (Potential eines homogen geladenen Kreisringes) Gegeben sei ein homogen geladener, unendlich dünner Kreisring mit dem Radius R und der Gesamtladung q . Man bestimme zunächst das zugehörige elektrostatische Potential auf der Symmetrieachse und zeige damit analog Abschnitt 1.4.2 der Vorlesung, daß das Potential im gesamten Raum durch

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \max\{r, R\}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \left(\frac{\min\{r, R\}}{\max\{r, R\}} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \right)$$

gegeben ist, wenn man die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ geeignet wählt.

Aufgabe 26 (Wechselwirkung elektrischer Dipole) Gegeben sei eine Folge von Ladungsverteilungen ρ_ϵ der Form

$$\rho_\epsilon(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon^{-4} \rho(\mathbf{r}/\epsilon),$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ eine beliebig differenzierbare, räumlich begrenzte Ladungsverteilung bezeichne mit:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} = 0.$$

- Man zeige, daß (im Sinne von Gl. (1.6) der Vorlesung)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left| \Phi_{\rho_\epsilon}(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_{\rho_\epsilon}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} \right| = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq 0$$

gilt, wobei $\mathbf{P}_{\rho_\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \rho_\epsilon(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}}$ jeweils das *elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung ρ_ϵ bezeichnet.

- b) Man zeige,¹⁹ daß die Kraft \mathbf{F} , die ein inhomogenes **äußeres** elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\text{äuß}}(\mathbf{r})$ auf die Ladungsverteilung $\rho_\epsilon(\mathbf{r})$ ausübt, im Limes $\epsilon \rightarrow +0$ durch

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}_{\text{äuß}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0}$$

gegeben ist, wobei:

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_{\rho_\epsilon} \text{ unabhängig von } \epsilon.$$

- c) Man zeige, daß das Drehmoment \mathbf{M}_{mech} , das ein **äußeres** elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\text{äuß}}(\mathbf{r})$ auf die Ladungsverteilung $\rho_\epsilon(\mathbf{r})$ ausübt, im Limes $\epsilon \rightarrow +0$ durch

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}_{\text{äuß}}(0)$$

gegeben ist.

- d) Man zeige: Wenn man die Ladungsverteilung ρ_ϵ als in sich starr, aber insgesamt um jeweils \mathbf{r} verschiebbar betrachtet, dann ist ihre potentielle Energie im äußeren elektrischen Feld $\mathbf{E}_{\text{äuß}}(\mathbf{r})$ für $\epsilon \rightarrow +0$:

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{äuß}}(\mathbf{r}).$$

- e) Man diskutiere qualitativ die Kräfte und Drehmomente, die zwei ideale elektrische Dipole aufeinander ausüben.

Aufgabe 27 (Magnetfeld einer Spule) Durch eine Spule der Länge l mit N Wicklungen und Radius R fließe ein (stationärer) Strom der Stärke I . Die Symmetrieachse der Spule sei die z -Achse und das Spulenzentrum stimme mit dem Koordinatenursprung überein.

- a) Man zeige, daß der Betrag H des Magnetfeldes auf der z -Achse (für bel. z) im Sinne von Abschnitt 3.1.1 der Vorlesung durch

$$H = \frac{NI}{2l} \left(\frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \right)$$

gegeben ist.

- b) Mit welcher Potenz von z fällt das Magnetfeld (auf der Symmetrieachse) im Unendlichen ab?

¹⁹Hierbei verwendet man zweckmäßig die in Abschnitt 1.4.2 der Vorlesung behandelte Multipolentwicklung.

Aufgabe 28 (Selbstinduktion in quasistationärer Näherung) In *quasistationärer Näherung* berechnet man das magnetische Feld zeitabhängiger Stromverteilungen nach den Regeln der Magnetostatik.

- Man zeige mithilfe des BIOT-SAVARTSchen (bzw. des LAPLACESchen) Gesetzes, daß in dieser Näherung die elektrische Induktionsspannung, die etwa eine Spule durch ihr eigenes Magnetfeld erzeugt, proportional zur Stromstärke²⁰ ist, wobei die Proportionalitätskonstante L (Induktivität) nur von der Geometrie der Stromverteilung abhängt.
- Man diskutiere die Auswirkung dieser Selbstinduktion auf den in Aufg. 20 betrachteten ‘Elektromotor’.

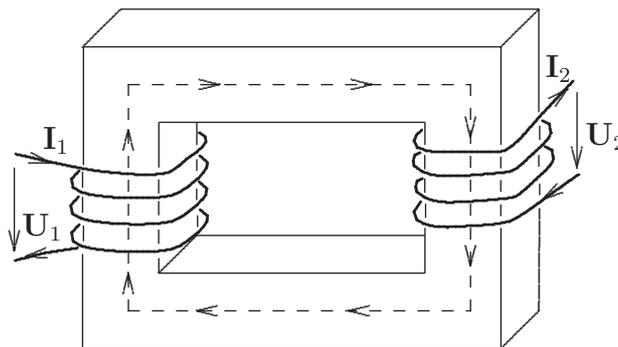
Aufgabe 29 (Selbstkraft und Selbstdrehmoment von Strömen) Gegeben sei eine **stationäre** Stromdichte \mathbf{j} mit $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, die gemäß BIOT-SAVARTSchem Gesetz das magnetische Kraftflußfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ erzeugt.

- Man zeige, daß die Gesamtkraft, die die Stromverteilung gemäß Gleichung (2.1) der Vorlesung auf sich selbst ausübt, Null ist:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dV_{\mathbf{r}} = 0.$$

- Man zeige, daß das Gesamtdrehmoment, das die Stromverteilung gemäß Gleichung (2.1) auf sich selbst ausübt, bzgl. jeden Drehpunktes Null ist.²¹
- Gilt entsprechendes auch im Falle $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$?

Aufgabe 30 (Transformator) Mit I_1 resp. U_1 sei der Strom resp. die Spannung der Primärwicklung, mit I_2 resp. U_2 der Strom resp. die Spannung der Sekundärwicklung eines Transformators bezeichnet (siehe Skizze).



Version vom 26. März 2009

²⁰Dabei sei der Strom zeitlich veränderlich, aber an jeder Stelle der Spule von gleichem Betrage.

²¹Mithilfe des Entwicklungssatzes und partieller Integration läßt sich das leicht zeigen.

Die Primärspule bestehe aus n_1 , die Sekundärspule aus n_2 dichten Wicklungen. Die magnetische Permeabilität des Eisenkerns sei μ . \mathcal{S} sei ein einfaches Flächenstück, dessen Rand $\partial\mathcal{S}$ (in der Skizze gestrichelt) sich durch folgende Eigenschaften auszeichne:

- $\partial\mathcal{S}$ verläuft innerhalb des Eisenkerns durch beide Spulen.
- $\partial\mathcal{S}$ stellt eine Feldlinie von \mathbf{H} dar, längs derer \mathbf{H} räumlich (nicht zeitlich) konstanten Betrag hat, der mit dem Mittelwert

$$\overline{H}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{S}'|} \int_{\mathcal{S}'} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathcal{S}_{\mathbf{r}}$$

über typische, zu \mathbf{H} senkrechte (etwa durch eine innere Wicklung berandete), Querschnittsflächen \mathcal{S}' (entspr. Orientierung) übereinstimmt (**streuungsfreier** Transformator).

- a) Man zeige, daß in **quasistationärer Näherung** (vgl. Aufg. 28) die Gleichung

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = (I_1 n_1 - I_2 n_2)$$

gilt, wenn man die Wirbelströme innerhalb des Eisenkerns vernachlässigen kann.

- b) Man zeige, daß für typische Querschnittsflächen o.a. Art

$$\int_{\partial\mathcal{S}'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\mu\mu_0 |\mathcal{S}'| \frac{d}{dt} \overline{H}(t)$$

gilt, wenn man die Hysterese unberücksichtigt läßt.

- c) Man zeige, daß aus a) und b) in guter Näherung die Gleichungen

$$U_i = \mu\mu_0 \frac{|\mathcal{S}'|}{|\partial\mathcal{S}|} n_i \left(n_1 \frac{d}{dt} I_1 - n_2 \frac{d}{dt} I_2 \right)$$

folgen, wenn man den OHMSchen Widerstand der Wicklungen vernachlässigen kann.²²

- d) Wie verändern sich die Verhältnisse qualitativ bei Berücksichtigung der Hysterese?
- e) Man erkläre, warum der Eisenkern eines Transformators gewöhnlich als Bündel dünner, fensterförmiger Eisenbleche konstruiert wird.
- f) Man erkläre, wie der typische Brummtone eines Transformators entsteht.

²²Man beachte, daß dann die angelegte Spannung U_i durch die jeweilige Induktionsspannung kompensiert wird.

Literaturverzeichnis

- Becker, R. und Sauter, F. (1969). *Theorie der Elektrizität*. B.G. Teubner, Stuttgart. [3](#)
- Gerlich, G. (1993). Klassische Feldtheorie (elektrodynamik). Manuskript zur Vorlesung, TU Braunschweig. [23](#), [74](#)
- Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics, Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York·London·Sydney. [23](#)
- Jackson, J. D. (2001). *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, Berlin·New York, 3 Auflage. [3](#)
- Lai, C. (1981). *Am. J. Phys.*, 49:841–843. [75](#)
- Landau, L. und Lifschitz, E. (1967). *Elektrodynamik der Kontinua*, Band VIII von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin. [21](#)
- Landau, L. D. und Lifschitz, E. M. (1966). *Klassische Feldtheorie*, Band II von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Akademie - Verlag, Berlin. [3](#), [74](#)
- Lücke, W. (1995). Solutions of the inhomogeneous wave equation with unusual propagation character and global solution of the Poisson equation. *J. Phys. A*, 28:5393–5400. [41](#)
- Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik. <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf>. [3](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [51](#), [79](#)
- Lücke, W. (ftm). Mathematische Methoden der Physik: Funktionentheoretische Methoden. <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ftm.pdf>. [70](#)
- Magnus, M. und Oberhettinger, F. (1949). *Special Functions of Mathematical Physics*. Chelsea, New York. [24](#)
- Morse und Feshbach (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York. [21](#)

- Okabayashi, T. (1984). *Nuov. Cim. A*, 80:12–26. **39**
- Rohrlich, F. (1965). *Classical Charged Particles*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts. **73**
- Schwartz, M. (1972). *Principles of Electrodynamics*. McGraw-Hill, New York etc. **3**

Index

- Ampere
 - Stromeinheit, 34, 50
- AMPERE
 - Gesetz, 49
- Bahn
 - Tangente, 81
- Bewegungsgleichung
 - relativistische, 97
- BIOT-SAVARTSches Gesetz, 46, 56, 105
- boosten, 88
- COULOMB
 - Eichung, 40
 - Feld, 10
 - Gesetz, 10
 - Potential, 10
- δ -Folgen, 95
- diamagnetische Stoffe, 66
- dielektrische Stoffe, 65
- Dielektrizitätskonstante, 65
- Dipol
 - näherung, 51
 - elektrischer, 103
 - Drehmoment, 104
 - Energie, 104
 - idealer, 94
 - Kraft, 104
 - Moment, 28
 - Potential, 28
- HERTZscher, 78
- magnetischer
 - Drehmoment, 56
 - Energie, 56
 - Kraft, 54
- Moment
 - elektrisches, 103
 - magnetisches, 52
- DIRICHLET
 - Problem der Kugel
 - inneres, 102
- Dispersion, 70
- Drehmoment
 - auf magnetischen Dipol, 56
- Eichung
 - COULOMB-, 40
 - LORENTZ-, 40, 58
 - Kovarianz der, 42
 - Strahlungs-, 41
 - Transformation, 40
 - vollständig kovariante, 39
- Eigenzeit, 90
- EINSTEIN
 - Summenkonvention, 35
- Elektromotor, 101
- FARADAY
 - Effekt, 95
 - Induktionsgesetz, 38
- Feld
 - COULOMB-, 10
 - elektrisches, 31
 - äußeres, 104
 - elektromagnetisches, 37
 - Energiedichte, 75
 - Energiestromdichte, 75
 - Impulsdichte, 77
 - Impulsstromdichte, 77
 - makroskopisches, 63
 - statisches, 45
 - Transformationsverhalten, 37

- elektrostatisches, 9
 - Gesamtenergie, 76
- konservatives, 10
- magnetisches, 48
 - einer Spule, 104
- magnetostatisches
 - Gesamtenergie, 76
- Feldstärke-Tensor, 34
- ferroelektrische Stoffe, 66, 69
- Funktion
 - charakteristische, 11
 - GREENsche, 22
 - verallgemeinerte, 11
- GAUSS
 - Gesetz, 9
 - Maßsystem, 49, 51, 91
- Gesetz
 - AMPERESches, 49
 - BIOT-SAVARTSches, 46, 56, 105
 - COULOMBSches, 10
 - GAUSSSches, 9
 - LAPLACESches, 46, 105
 - OHMSches, 64, 66
- GREEN
 - Funktion, 22
 - Reziprozitätstheorem, 96
 1. Identität, 14
 2. Identität, 21
 - Reziprozitätstheorem, 18
- Grenzflächen
 - Randbedingungen an, 64
- HERTZscher Dipol , 78
- Hysterese, 69
- Induktionsgesetz, 38
- Influenz
 - koeffizienten, 18, 96
 - vollständige, 19
- Inhomogenität, 41, 42
- Integral
 - Oberflächen-, 81
 - Weg-, 81
- Kapazität, 18, 19, 96
- Kausalitätsforderung, 57
- Kondensator, 19
- Kontinuitätsgleichung, 37, 62
- Konvergenz im L^2 -Mittel, 25
- Kraft
 - Dichte, 31
 - dichte
 - Vierer-, 35
 - flußdichte, magnetische, 31
 - auf elektrischen Dipol, 104
 - auf magnetischen Dipol, 54
 - Bild-, 15
- Kugelflächenfunktionen, 25
 - Additionstheorem, 25
 - Entwicklungssatz, 25
 - Orthonormalität, 25
- Kugelfunktionen
 1. Art, 24
 2. Art, 24
- Kugelwelle, 58
- Laborsystem, 87
- Ladung
 - Überschuß-, 64
 - Dichte
 - effektive, 62
 - Erhaltungssatz, 37
 - Flächendichte, 11
 - influenzierte, 12
 - Probe-, 9, 31
 - Punkt-, 10
 - Schein-, 16
 - Spiegel-, 15
 - Verteilung, 11
 - statische, 45
- LAPLACE
 - Gesetz, 46, 105
 - Gleichung, 14
 - Operator, 10, 24
- LAPLACE
 - Gleichung, 86
- LEGENDRE

- Differentialgleichung, 25
- Polynome
 - zugeordnete, 24
- Leistungsdichte, 34
- Leiter
 - system, 18
 - idealer, 11
 - realer, 12
- Leitfähigkeit, spezifische, 65
- LENZsche Regel, 66
- LIÉNARD-WIECHERT-Potentiale, 74
- LORENTZ
 - Eichung, 40, 58
 - Kovarianz der, 42
 - Kontraktion, 34, 87
 - Kraftdichte, 31
 - Transformation
 - spezielle, 33, 36, 88
- Maßsystem
 - elektromagnetisches cgs-, 93
 - elektrostatisches cgs-, 93
 - GAUSSSches, 49, 51, 91
 - HEAVISIDE-, 92
 - kohärentes, 91
 - MKSA-, 92
 - nichtrationales, 91
 - praktisches, 49, 51, 96
 - rationales, 91
- Magnetisierung, 62, 65
- MAXWELL
 - Gleichungen
 - für das Vakuum, 35, 36, 42
 - freie, 45, 75
 - partikuläre Lösung der, 45
 - Spannungstensor, 77
- MINKOWSKI
 - Länge, 88
- Multipol
 - Entwicklung, 28
 - Momente, 28, 103
- Nahewirkungstheorie, 73
- Oberflächenintegral, 81
- OHMScher Widerstand, 101, 106
- OHMSches Gesetz, 64, 66
- Parabelmethode
 - THOMSONSche, 99
- paraelektrische Stoffe, 65
- paramagnetische Stoffe, 66
- Permeabilitätskonstante, 65
- POINCARÉ
 - Konstruktion, 39
- POISSONSche Gleichung, 86
- POISSONSche Gleichung, 10, 59
 - 2-dim. Analogon, 101
- Polarisation
 - dielektrische, 62, 64
- Potential
 - COULOMB-, 10
 - elektrostatisches
 - Kreisring, 103
 - Skalar-, 40
 - Vektor-, 41
- Potentiale
 - elektromagnetische, 40
 - Eichtransformation, 40
 - LIÉNARD-WIECHERT, 74
 - retardierte, 58
- POYNTING
 - Theorem, 75
 - Vektor, 79
- Quadrupol, 29
 - Näherung, 103
- quasistationäre Näherung, 105, 106
- Randwertproblem
 - DIRICHLETSches, 20
 - NEUMANNsches, 20
- Raum
 - Inhalt, 83
- relativistische
 - Bewegungsgleichung, 97
 - Energie
 - Gesamt-, 97

- kinetische, 97
 - Ruhe-, 98
- retardiert, 58
- Ruhemasse, 90
- Ruhsystem, 33, 88, 90
- Selbst-
 - Drehmoment von Strömen, 56, 105
 - Induktion, 105
 - Kraft von Strömen, 105
- Skalar
 - Potential, 85
- Solenoid, 47
- Spannung, 19
- Spannungstensor
 - MAXWELLScher, 77
- Strahlungs
 - Eichung, 41
 - Leistung, 80
 - Reaktion, 32
 - Reaktionskraft, 73
- Strom
 - dichte
 - Vierer-, 33, 35
 - Dichte
 - effektive, 62
 - Einheit, 34
 - Einheit Ampere, 50
 - stationärer, 32
 - Verteilung
 - stationäre, 45
- Suszeptibilität
 - elektrische, 65
 - magnetische, 65
- Synchrotronstrahlung, 73
- Tensor
 - 2. Stufe
 - kontravarianter, 34
 - Feldstärke-, 34
- THOMSONSche Parabelmethode], 99
- Transformator, streuungsfreier, 106
- Vektor
 - Potential, 85
 - Tangenten-, 81
- Vierer-
 - Beschleunigung, 88
 - Ereignisvektor, 88
 - Geschwindigkeit, 88
 - Kraftdichte, 35
 - Stromdichte, 33, 35, 88
 - Vektor
 - kontravarianter, 42
- Volumen
 - Integral, 82
- Weg
 - Integral, 81
 - Länge, 83
- Welle
 - elektromagnetische, 73
- Wellengleichung
 - homogene, 41, 58
 - inhomogene, 41, 58
- Wellenzone, 79
- Zeit
 - Dilatation, 88
 - Synchronisation, 87
 - Eigen-, 90