

# Mathematische Methoden der Physik

Technische Universität Clausthal  
WS 1979/80 – SS 2005

W. Lücke



## Vorwort

Ziel dieser Vorlesung ist es, an einfachen physikalischen Systemen zu zeigen, wie mathematische Strukturen in der Natur in verschiedenster Gestalt näherungsweise realisiert sind und zu physikalischen Schlußfolgerungen herangezogen werden können. Dabei dient die Vorlesung gleichzeitig als Einführung in die **elementaren** mathematischen Methoden der Physik, soweit sie für die Vorlesungen *Theoretische Mechanik* und *Elektrodynamik* benötigt werden. Jedoch ist das eigentliche Anliegen nicht die Mathematik selbst, sondern der kreative Umgang damit – was sicherlich nicht bei jedem Studenten auf Gegenliebe stoßen wird. Dementsprechend wird auch bei Beweisen so weit wie möglich physikalisch-anschaulich argumentiert. Die Einübung in präzise formale Beweisführung soll den Mathematikvorlesungen vorbehalten bleiben. Wer einmal gelernt hat, wie ein strenger mathematischer Beweis zu führen ist, wird keine Schwierigkeiten haben, die hier gegebenen Beweisskizzen entsprechend umzusetzen.

### Warnungen:

1. Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium gedacht.
2. Für Leute, die sich mit Halbwissen zufrieden geben, ist diese Vorlesung denkbar ungeeignet.

Der in der Vorlesung abgehandelte mathematische Stoff sollte als Pensum aufgefaßt werden, das es bis zum Vordiplom abzuarbeiten gilt.

**Wichtig:** Auch im zweiten Studienabschnitt sollte man sich den Stoff dieser Vorlesung immer wieder ins Gedächtnis rufen, da er auch in den höheren Vorlesungen stets benötigt wird.

**Literaturempfehlung:** (Zeidler, 2003; Grosche et al., 2003; Fischer und Kaul, 2001; Fischer und Kaul, 2004)



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Vektor-Algebra-Methoden</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Vektorraum-Strukturen</b>	<b>11</b>
1.1	Physikalische Dreier-Vektoren . . . . .	11
1.1.1	Räumliche Translationen . . . . .	11
1.1.2	Vektorregeln für Translationen . . . . .	12
1.1.3	Überlagerung von Geschwindigkeiten . . . . .	13
1.1.4	Überlagerung von Federkräften . . . . .	14
1.1.5	Natürliche Zuordnungen verschiedenartiger Vektoren . . . . .	16
1.1.6	Zusammenfassung . . . . .	17
1.2	Mathematische Betrachtungen . . . . .	17
1.2.1	Allgemeine reelle Vektorräume . . . . .	17
1.2.2	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren . . . . .	18
1.2.3	Endlichdimensionale reelle Vektorräume . . . . .	19
1.2.4	Spalten-Schreibweise für Vektore . . . . .	20
1.3	Physikalische Anwendungsbeispiele . . . . .	21
1.3.1	Schiefe ‘Ebene’ . . . . .	21
1.3.2	Landeanflug . . . . .	22
1.3.3	Seilspannungen (Spezialfall) . . . . .	23
<b>2</b>	<b>EUKLIDISCHE REELLE VEKTORRÄUME</b>	<b>25</b>
2.1	Das Skalarprodukt . . . . .	25
2.1.1	Motivation . . . . .	25
2.1.2	Mathematische Betrachtungen . . . . .	28
2.1.3	Seilspannungen (allgemeiner Fall) . . . . .	32
2.2	Das Vektorprodukt im 3-dim. EUKLID. Raum . . . . .	33
2.2.1	Motivation (Hebelgesetz) . . . . .	33
2.2.2	Bestimmung des Vektorproduktes . . . . .	35
2.2.3	Drehmomentbilanzen . . . . .	36
2.2.4	Anwendungsbeispiel (Dreibeiniger Tisch) . . . . .	38
2.3	Nützliche Formeln . . . . .	40
2.3.1	Teilzusammenfassung . . . . .	40
2.3.2	Mehrfachprodukte . . . . .	40
2.3.3	Reziproke Basis und CRAMERSche Regel . . . . .	41

2.3.4	Komplexe Zahlen . . . . .	43
<b>II</b>	<b>Vektor-Analysis-Methoden</b>	<b>47</b>
<b>3</b>	<b>Raumkurven</b>	<b>49</b>
3.1	Bahnkurve eines Körperpunktes . . . . .	49
3.1.1	Beschreibung durch Vektorfunktionen . . . . .	49
3.1.2	Geradlinige Bewegung . . . . .	50
3.1.3	Elliptische Bewegung . . . . .	51
3.1.4	Parabolische Bewegung . . . . .	54
3.1.5	Hyperbolische Bewegung . . . . .	55
3.2	Geschwindigkeit eines Körperpunktes . . . . .	57
3.2.1	Mittlere Geschwindigkeit . . . . .	57
3.2.2	Momentangeschwindigkeit . . . . .	58
3.2.3	Differentiationsregeln . . . . .	60
3.2.4	Anwendungsbeispiel (harmonische Schwingung) . . . . .	63
3.3	Beschleunigung eines Körperpunktes . . . . .	64
3.3.1	Definitionen und einfache Beispiele . . . . .	64
3.3.2	Eindeutige Bestimmtheit der Bahnkurve . . . . .	67
3.3.3	Eigenschaften des Integrals und Konsequenzen . . . . .	71
3.3.4	Die NEWTONsche Bewegungsgleichung . . . . .	72
3.4	Erhaltungssätze für Massenpunktsysteme . . . . .	74
3.4.1	Impulssatz/Schwerpunktsatz . . . . .	74
3.4.2	Drehimpulssatz/Flächensatz . . . . .	75
3.4.3	Innere und äußere Kräfte . . . . .	78
3.4.4	Energiesatz . . . . .	79
3.5	Zentralfeld-Probleme . . . . .	81
3.5.1	Harmonischer Oszillator . . . . .	81
3.5.2	Gravitationsgesetz . . . . .	82
3.5.3	KEPLER-Problem . . . . .	84
3.5.4	Allgemeines Zentralpotential . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Skalar- und Vektorfelder</b>	<b>93</b>
4.1	Richtungsableitung . . . . .	93
4.1.1	Grundlegendes . . . . .	93
4.1.2	Der Gradient eines Skalarfeldes . . . . .	95
4.1.3	Taylor-Entwicklung . . . . .	99
4.2	Wegintegrale . . . . .	104
4.2.1	Definitionen . . . . .	104
4.2.2	Eigenschaften des Wegintegrals . . . . .	107
4.2.3	Wegintegrale über konservative Vektorfelder . . . . .	108
4.2.4	Beispiel: Entropie . . . . .	111

4.3	Oberflächenintegrale . . . . .	113
4.3.1	Definitionen . . . . .	113
4.3.2	Beispiele geeigneter Flächenparametrisierungen . . . . .	116
4.3.3	Eigenschaften des Oberflächenintegrals . . . . .	119
4.3.4	Der Satz von STOKES . . . . .	121
4.4	Volumenintegrale . . . . .	124
4.4.1	Definitionen . . . . .	124
4.4.2	Anwendungsbeispiel (Trägheitstensor) . . . . .	126
4.4.3	Eigenschaften des Volumenintegrals . . . . .	130
4.4.4	Der Satz von GAUSS . . . . .	131
4.4.5	Die POISSONSche Gleichung . . . . .	136
4.4.6	Der Satz von EARNSHAW . . . . .	137
4.5	Nützliche Formeln . . . . .	139
4.5.1	Teilzusammenfassung . . . . .	139
4.5.2	Algebra des NABLA-Operators . . . . .	140
4.5.3	Konstruktion von Vektorpotentialen . . . . .	142
4.5.4	Funktionentheoretische Hilfsmittel . . . . .	146

**III Differentialgleichungen 153**

**5 Gewöhnliche Differentialgleichungen 155**

5.1	Vektorielle Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	155
5.1.1	Motivation und Definitionen . . . . .	155
5.1.2	Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	157
5.1.3	Existenz der Flußlinien . . . . .	158
5.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	160
5.2.1	2. Ordnung zur Orientierung . . . . .	160
5.2.2	Allgemeine Definition . . . . .	161
5.2.3	Rückführung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	161
5.3	Lineare vektorielle Differentialgleichungen . . . . .	162
5.3.1	Fundamentales Lösungssystem . . . . .	162
5.3.2	Partikuläre Lösung des inhomogenen Problems . . . . .	163
5.3.3	Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft . . . . .	164

**6 Lineare partielle Differentialgleichungen 167**

6.1	Kleine Schwingungen einer Saite . . . . .	167
6.1.1	Bewegungsgleichung . . . . .	167
6.1.2	Energiesatz und Anfangswertproblem . . . . .	170
6.1.3	Lösungen für die fest eingespannte Saite . . . . .	171
6.2	FOURIER-Theorie . . . . .	172
6.2.1	FOURIER-Reihen . . . . .	173
6.2.2	FOURIER-Integrale . . . . .	175

6.3	Feldgleichungen . . . . .	176
6.3.1	Freie elektromagnetische Wellen . . . . .	176
6.3.2	Wärmeleitung . . . . .	177
<b>A</b>	<b>Tensoren</b>	<b>179</b>
A.1	Der Dualraum . . . . .	179
A.1.1	Linearformen . . . . .	179
A.1.2	Die duale Basis . . . . .	180
A.1.3	Basiswechsel . . . . .	181
A.2	Allgemeine Tensoren . . . . .	181
A.2.1	Definitionen . . . . .	181
A.2.2	Komponenten-Darstellung von Tensoren . . . . .	184
A.2.3	Natürliche Zuordnungen . . . . .	186
A.2.4	Physikalische Tensoren . . . . .	188
A.3	Antisymmetrische Tensoren . . . . .	189
A.3.1	Volumenformen . . . . .	189
A.3.2	Orientierung endlichdimensionaler Vektorräume . . . . .	191
A.3.3	Allgemeine antisymmetrische Tensoren . . . . .	193
<b>B</b>	<b>Beweise zur FOURIER-Theorie</b>	<b>197</b>
B.1	Integral-Sinus und Folgen vom Typ Delta . . . . .	197
B.2	DIRICHLETSche Formel . . . . .	199
B.3	Konvergenz der FOURIER-Reihen . . . . .	202
B.4	Zum FOURIER-Integral . . . . .	205
<b>C</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>207</b>
<b>D</b>	<b>Lösungsvorschläge</b>	<b>239</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>317</b>
	<b>Index</b>	<b>321</b>



**Teil I**

**Vektor-Algebra-Methoden**



# Kapitel 1

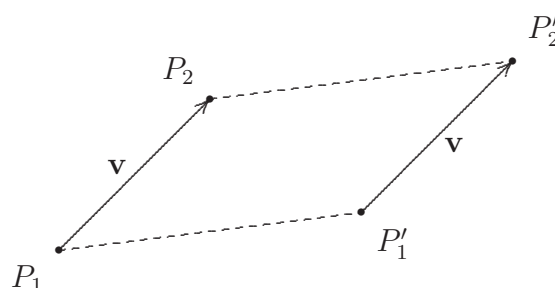
## Vektorraum-Strukturen

### 1.1 Physikalische Dreier-Vektoren

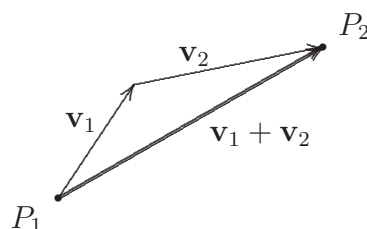
#### 1.1.1 Räumliche Translationen

- (i)  $\mathbf{v}$  bezeichne die einfachste Vorschrift, von  $P_1$  nach  $P_2$  zu gelangen: In entsprechende **Richtung** eine Strecke entsprechender **Länge** zurücklegen.

Dieselbe Vorschrift (durch einen Pfeil entsprechender Richtung und Länge veranschaulicht) läßt sich natürlich auf jeden anderen Ausgangspunkt  $P'_1$  anwenden:

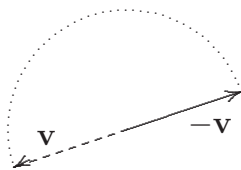


- (ii)  $\mathbf{v}_1 \triangleright \mathbf{v}_2$  bezeichne die kompliziertere Vorschrift: Erst  $\mathbf{v}_1$ , danach auch noch  $\mathbf{v}_2$  ausführen.
- (iii)  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  bezeichne die **einfachste** Vorschrift, von einem gegebenen Anfangspunkt  $P_1$  zum gleichen Ausgangspunkt  $P_2$  zu gelangen wie gemäß  $\mathbf{v}_1 \triangleright \mathbf{v}_2$ :

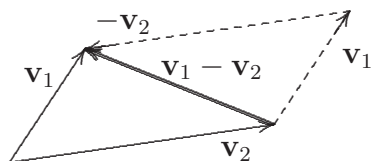


- (iv) Für  $\lambda \geq 0$  bezeichne  $\lambda \mathbf{v}$  die Vorschrift: In Richtung von  $\mathbf{v}$  das  $\lambda$ -fache der  $\mathbf{v}$  entsprechenden Strecke zurücklegen.

- (v)  $-\mathbf{v}$  bezeichne die Vorschrift: In zu  $\mathbf{v}$  entgegengesetzter Richtung die  $\mathbf{v}$  entsprechende Strecke zurücklegen:



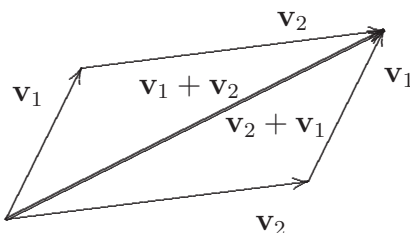
- (vi) Statt  $-(\lambda\mathbf{v})$  wird auch  $(-\lambda)\mathbf{v}$  oder  $-\lambda\mathbf{v}$  und statt  $\mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$  auch  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  geschrieben:



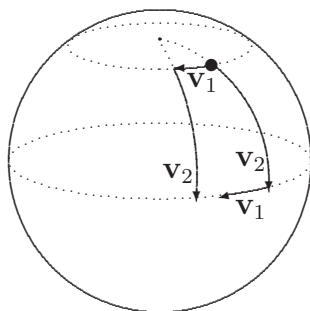
### 1.1.2 Vektorregeln für Translationen

In der Praxis wird keine Abweichung von folgenden Regeln bemerkt:

- (V1):  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ , anschaulich:

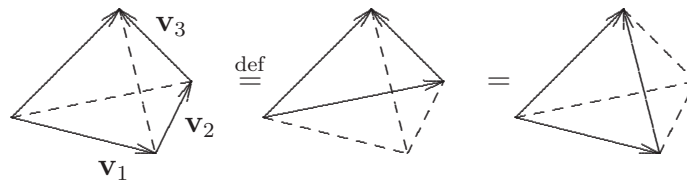


**Anmerkung:** Es ist mehr als zweifelhaft, ob sich für die reale Welt die Begriffe 'gleiche Richtung' und 'gleiche' Strecke konkret so definieren lassen, daß (V1) **streng** gilt. Die Art der Schwierigkeit kann man sich verdeutlichen, indem man auf der Erdoberfläche die Gleichheit von Richtungen an verschiedenen Ausgangspunkten  $P_1, P_1'$  mit der Kompaßnadel überprüft:



Richtung von  $\mathbf{v}_1$ : Westen,  
Richtung von  $\mathbf{v}_2$ : Süden.

(V2):  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ , anschaulich:



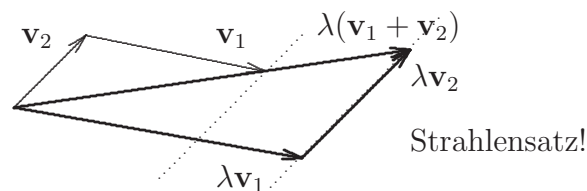
(V3):  $0\mathbf{v}_1 = 0\mathbf{v}_2$

(V4):  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

(V5):  $\lambda_1\lambda_2\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{v})$  für reelle  $\lambda_1, \lambda_2$

(V6):  $\lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1\mathbf{v}) + (\lambda_2\mathbf{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{v}$  für reelle  $\lambda_1, \lambda_2$

(V7):  $\lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  für reelle  $\lambda$ , anschaulich:



### Anmerkungen:

- Für Vektoren  $\mathbf{v}$  und reelle Zahlen  $\lambda$  werden wir mitunter auch  $\mathbf{v}\lambda$  für  $\lambda\mathbf{v}$  oder (falls  $\lambda \neq 0$ )  $\frac{\mathbf{v}}{\lambda}$  bzw.  $\mathbf{v}/\lambda$  für  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$  schreiben.
- Im Folgenden werden wir, im Sinne von (V3) für  $0\mathbf{v}$  i.a. nur  $0$  schreiben.

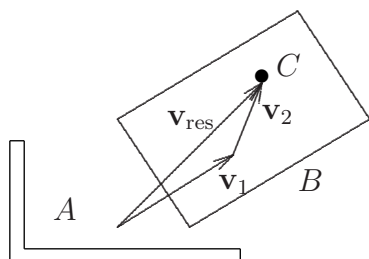
### 1.1.3 Überlagerung von Geschwindigkeiten

Auch eine (gleichförmige) Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  läßt sich durch Angabe einer **Richtung** und einer **Länge** charakterisieren, wenn eine Zeiteinheit festgelegt ist:<sup>1</sup>

Richtung von  $\mathbf{v}$ : Bewegungsrichtung ,  
 Länge von  $\mathbf{v}$ : pro Zeiteinheit zurückgelegte Strecke .

Bei der Erklärung der Addition von Geschwindigkeiten wird besonders deutlich, daß sich die Charakterisierung von Geschwindigkeiten (ebenso wie die räumlicher Translationen) stets auf ein vereinbartes **starres** Bezugssystem bezieht.<sup>2</sup>

Seien also  $A, B$  vorgegebene starre Bezugssysteme, die sich relativ zueinander gleichförmig drehungsfrei bewegen (z.B.  $A$  =Hafen,  $B$  =Fähre), und sei  $C$  ein physikalisches Objekt:



$\mathbf{v}_1$  : gleichf. Geschw. von  $B$  bzgl.  $A$ ,  
 $\mathbf{v}_2$  : gleichf. Geschw. von  $C$  bzgl.  $B$ ,  
 $\mathbf{v}_{\text{res}}$  : gleichf. Geschw. von  $C$  bzgl.  $A$ ,  
 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{res}}$ .

Mit  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  wird dann i.a. die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich  $C$  bzgl.  $A$  bewegt.

Mit  $\lambda \mathbf{v}$ , wobei  $\lambda \geq 0$ , wird die Geschwindigkeit bezeichnet, der die gleiche Richtung wie  $\mathbf{v}$ , jedoch die  $\lambda$ -fache Länge zukommt.

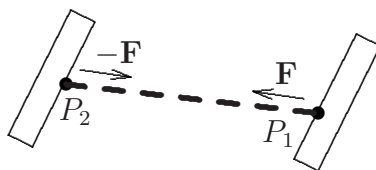
Mit  $-\mathbf{v}$  wird die Geschwindigkeit bezeichnet, der die gleiche Länge wie  $\mathbf{v}$ , jedoch die entgegengesetzte Richtung zukommt.

Die Schreibweisen (vi) aus 1.1.1 finden auch für Geschwindigkeitsvektoren Anwendung.

Dann werden für Geschwindigkeiten, deren Betrag klein im Vergleich zu demjenigen der Vakuumlichtgeschwindigkeit ( $\approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ) ist, in der Praxis keine Abweichungen von den Regeln (V1)–(V7) aus 1.1.2 festgestellt.<sup>3</sup>

### 1.1.4 Überlagerung von Federkräften

Eine Feder sei zwischen zwei feste Punkte  $P_1, P_2$  eines starren Bezugssystems **gespannt**:



Dann greift die Feder bei  $P_1$  mit einer Kraft  $\mathbf{F}$  an, die durch Angabe von **Richtung** und **Stärke**<sup>4</sup> zu charakterisieren ist, wobei:

Richtung von  $\mathbf{F}$  : Richtung von  $P_1$  nach  $P_2$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Aus der speziellen Relativitätstheorie muß man allerdings folgern, daß **absolut** starre Körper prinzipiell **nicht** existieren können.

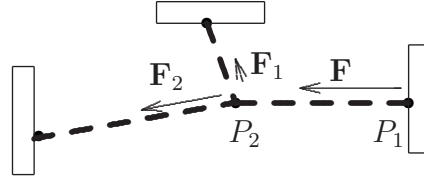
<sup>3</sup>Für höhere Geschwindigkeiten bereiten dagegen die unterschiedlichen Bezugssysteme  $A, B$  Schwierigkeiten.

<sup>4</sup>Siehe weiter unten.

Mit  $-\mathbf{F}$  bezeichnet man in diesem Falle die Kraft, mit der die Feder (vernachlässigbarer Masse) bei  $P_2$  angreift.

Wird die Kraftwirkung der betr. Feder bei  $P_2$  durch zwei weitere Federn kompensiert, die bei  $P_2$  mit den Kräften  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  angreifen, dann definiert man

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} :$$



Weiterhin definiert man induktiv

$$\begin{aligned} 1 \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}, \\ (n+1) \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} n \mathbf{F} + \mathbf{F} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

und schließlich  $\frac{n}{m} \mathbf{F}$  als diejenige Kraft, deren  $m$ -faches mit  $n \mathbf{F}$  übereinstimmt.

Man wählt nun eine **Standard-Feder** und legt die Stärke der Kraft, die diese Feder bei **Standard-Auslenkung** ausübt, als **Krafteinheit** fest. Dann definiert man:

$$\text{Stärke von } \frac{n}{m} \mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{m} \text{ Krafteinheit, falls Stärke von } \mathbf{F} = \text{Krafteinheit.}$$

Damit läßt sich eine Federwaage herstellen, an der man die Federstärke ablesen kann.

$\lambda \mathbf{F}$  kann man nun für bel.  $\lambda \geq 0$  als diejenige Federkraft definieren, der die gleiche Richtung wie  $\mathbf{F}$ , jedoch die  $\lambda$ -fache Stärke zukommt. Mit  $-\mathbf{F}$  bezeichnet man die Kraft der in entgegengesetzte Richtung mit gleicher Auslenkung gespannten Feder.

Schließlich seien wieder die Schreibweisen (vi) aus 1.1.1 vereinbart.

Dann bemerkt man wiederum in der Praxis keine Abweichung von den Regeln (V1)–(V7) aus 1.1.2.

**Anmerkung:** Auf den ersten Blick mögen die Regeln (V1)–(V7) für Federkräfte selbstverständlich erscheinen. Tatsächlich ist aber bereits der experimentell gefundene Sachverhalt, daß sich die gemeinsame Kraftwirkung zweier Federn stets durch die einer einzigen Feder (in hinreichend guter Näherung) kompensieren läßt, keinesfalls eine logische Notwendigkeit.

### 1.1.5 Natürliche Zuordnungen zwischen physikalischen Dreier-Vektoren<sup>5</sup> unterschiedlicher Art

Für einen Kraftvektor  $\mathbf{F}$  und einen Translationsvektor  $\mathbf{x}$  schreibt man auch

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \frac{\text{Krafteinheit}}{\text{Längeneinheit}}$$

sowie

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \frac{\text{Längeneinheit}}{\text{Krafteinheit}},$$

falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{F}$  entspr. Richtungen stimmen überein.
2. Es existiert ein  $\lambda \geq 0$  mit:

$$\text{Stärke von } \mathbf{F} = \lambda \text{ Krafteinheit}$$

und

$$\mathbf{x} \text{ entspr. Strecke} = \lambda \text{ Längeneinheit.}$$

Dann stellt man in der Praxis keine Abweichungen von folgenden Regeln<sup>6</sup> fest:

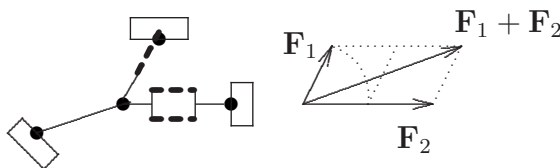
$$\left( \mathbf{x}_1 \frac{\text{Krafteinh.}}{\text{Längeneinh.}} \right) + \left( \mathbf{x}_2 \frac{\text{Krafteinh.}}{\text{Längeneinh.}} \right) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \frac{\text{Krafteinh.}}{\text{Längeneinh.}}, \quad (1.1)$$

$$\left( \mathbf{F}_1 \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Krafteinh.}} \right) + \left( \mathbf{F}_2 \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Krafteinh.}} \right) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Krafteinh.}}, \quad (1.2)$$

$$(\lambda \mathbf{x}) \frac{\text{Krafteinh.}}{\text{Längeneinh.}} = \lambda \left( \mathbf{x} \frac{\text{Krafteinh.}}{\text{Längeneinh.}} \right), \quad (1.3)$$

$$(\lambda \mathbf{F}) \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Krafteinh.}} = \lambda \left( \mathbf{F} \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Krafteinh.}} \right). \quad (1.4)$$

Aufgrund dieser Tatsache läßt sich die Überlagerung von Kräften mithilfe räumlicher Translationen **richtungstreu** und **längentreu** darstellen (**Kräfteparallelogramm**):



Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Der Übergang zum (physikalisch) dimensionslosen Einheitsvektor gleicher Richtung wird oft durch ein  $\hat{\phantom{r}}$  über dem Vektorsymbol mitgeteilt. Dann gilt also z.B.  $\hat{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  (im Sinne von 2.1.1).

Wir werden jedoch das  $\hat{\phantom{r}}$ , wie vielfach in der Quantenoptik üblich, nur zur Kennzeichnung von Operatoren verwenden.

<sup>6</sup>Man kann zeigen, daß diese Regeln äquivalent sind zur Isotropie der Überlagerungsgesetze für Kräfte. Man beachte in diesem Zusammenhang auch Aufgabe 10.



Entsprechende Zusammenhänge — die die Grundlage für viele physikalische Anwendungen der Vektorrechnung bilden — gelten z.B. <sup>7</sup>auch zwischen Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und räumlichen Translationen  $\mathbf{x}$ .

### 1.1.6 Zusammenfassung

In der Physik treten vielfach gerichtete Größen (wie z.B. räuml. Translationen, Geschwindigkeiten, Federkräfte usw.) auf, für die sowohl Addition als auch Multiplikation mit reellen Zahlen in ‘natürlicher’ Weise so erklärt sind, daß die Regeln (V1)–(V7) aus 1.1.2 in weiten Bereichen bedenkenlos angewendet werden können. Dabei lassen sich natürliche Zuordnungen zwischen Vektoren unterschiedlicher physikalischer Natur vorteilhaft ausnutzen.

## 1.2 Mathematische Betrachtungen

### 1.2.1 Allgemeine reelle Vektorräume

Entspr. 1.1.6 ist es von Interesse, die durch die Regeln (V1)–(V7) aus 1.1.2 beschriebene Struktur allgemein zu untersuchen und dazu zunächst zu bezeichnen:

**Definition 1.2.1** *Unter einem **reellen Vektorraum** versteht man eine Menge  $V$  zusammen mit einer Additionsvorschrift und einer Vorschrift zur Multiplikation mit reellen Zahlen derart, daß*

$$\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V \text{ für alle } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \text{ und bel. reelle } \lambda$$

und

$$(V1)–(V7) \text{ aus } 1.1.2$$

gelten. Die Elemente von  $V$  nennt man **Vektoren**<sup>8</sup>.

Version vom 26. März 2009

<sup>7</sup>Vektoren wie z.B.  $\frac{\mathbf{x}}{\text{Längeneinheit}}$  oder  $\frac{\mathbf{F}}{\text{Krafteinheit}}$  bezeichnen wir als **physikalisch dimensionslos**.

<sup>8</sup>Die Charakterisierung als *gerichtete Größen* betrifft höchstens eine kleine Unterkategorie von Vektoren.

## 1.2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

**Definition 1.2.2** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum und sei  $T$  eine Teilmenge von  $V$ . Als **lineare Hülle** von  $T$  bezeichnet man dann die Menge  $\mathcal{L}(T)$  aller Vektoren  $\mathbf{v} \in V$ , die sich in der Form<sup>9</sup>

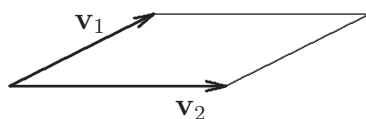
$$\mathbf{v} = \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda^n \mathbf{v}_n$$

mit reellen  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in T$  darstellen lassen, wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

**Definition 1.2.3** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Dann heißen die Vektoren einer Teilmenge  $T$  von  $V$  **linear unabhängig** voneinander, falls  $\mathcal{L}(T') \neq \mathcal{L}(T)$  für jede **echte** Teilmenge  $T'$  von  $T$  gilt. Andernfalls heißen die Vektoren von  $T$  (insgesamt) **linear abhängig** (voneinander). Unter einer **Basis** von  $V$  versteht man eine Menge  $T \subset V$  linear unabhängiger Vektoren mit  $\mathcal{L}(T) = V$ .

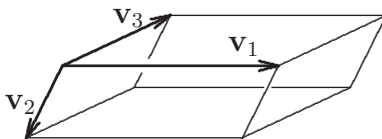
**Anschaulich** (für räumliche Translationen):

- (i) Zwei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sind genau dann linear unabhängig voneinander, wenn das ihnen entspr. Parallelogramm



nicht entartet ist, d.h. von Null verschiedenen Flächeninhalt hat.

- (ii) Drei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sind genau dann linear unabhängig voneinander, wenn der ihnen entsprechende **Spat**



nicht entartet ist, d.h. von Null verschiedenes Volumen hat.

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Nach (V2) ist die Verwendung von Klammern zur Festlegung einer Additionsreihenfolge auf der rechten Seite überflüssig. Die hochgestellten Ziffern sind gewöhnlich als **Indizes** aufzufassen, also z.B.:  $a^3 \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} a \cdot a \cdot a$ .

**Lemma 1.2.4**

- Gegeben: (i) reeller Vektorraum  $V$   
(ii) Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$

Behauptung: Die  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  sind genau dann linear unabhängig, wenn zu jedem  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\})$  genau ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $(a^1, \dots, a^n)$  existiert mit:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{v}_1 + \dots + a^n \mathbf{v}_n.$$

**Beweis:** Siehe z.B. (van der Waerden, 1966, § 19). ■

**1.2.3 Endlichdimensionale reelle Vektorräume**

Für die bisher betrachteten Anschauungsmodelle reeller Vektorräume ist intuitiv klar, daß jeweils eine endliche Basis von  $V$  existiert. Solche Vektorräume lassen sich besonders leicht allgemein abhandeln; daher:

**Definition 1.2.5** Ein (reeller) Vektorraum  $V$  heißt **endlichdimensional**, falls eine endliche Zahl von Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  existiert, für die

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V$$

gilt. Falls mindestens ein Vektor  $\mathbf{v} \in V$  existiert, für den  $\mathbf{v} \neq 0 \mathbf{v}$  gilt,<sup>10</sup> bezeichnet man das dabei kleinstmögliche  $n$  als die **Dimension** ( $\dim V$ ) von  $V$ .

**Beispiele:**

- (i)  $\dim V = 2$  für  $V = \{\text{Translat. i.d. Ebene}\}$   
(ii)  $\dim V = 3$  für  $V = \{\text{bel. gleichf. Geschwindigk.}\}$   
(iii) Für den Teilraum  $V' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\{\mathbf{v}\})$  von  $V$  gilt

$$\dim V' = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{v} = 0 \text{ (genauer: } 0\mathbf{v}\text{)}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 1.2.6**

- Gegeben: (i) endlichdim. (reeller) Vektorraum  $V$   
(ii) **linear unabhängige** Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$

Behauptung: Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:

<sup>10</sup>Sonst setzt man  $\dim V = 0$ .

1.  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  ist eine **Basis** von  $V$ .
2.  $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V$ .
3.  $\dim V = n$ .

**Beweis:** Siehe z.B. (van der Waerden, 1966, § 20). ■

### 1.2.4 Spalten-Schreibweise für Vektoren

Sei  $V$  ein  $n$ -dim. reeller Vektorraum. Dann läßt sich nach Definition 1.2.5 und Lemma 1.2.6 eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  fest wählen. Nach Lemma 1.2.4 existiert dazu für jeden Vektor  $\mathbf{x} \in V$  genau ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $(x^1, \dots, x^n)$  mit:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{b}_1 + \dots + x^n \mathbf{b}_n.$$

Vereinbart man unter diesen Voraussetzungen, auch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x}$$

zu schreiben, so erkennt man aus (V1)–(V7) leicht:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

(Beweis als Übungsvorschlag).

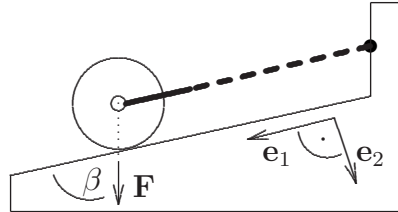
In dieser Darstellungsweise haben offensichtlich alle  $n$ -dim. Vektorräume zu festem  $n$  die gleiche Struktur!

Die natürliche Verallgemeinerung o.a. Spalten-Schreibweise mit physikalischen Größen  $x^1, \dots, x^n$  gleicher Art und beliebigen physikalischen Größen  $\lambda$  ist offensichtlich.

## 1.3 Physikalische Anwendungsbeispiele für die allgemeinen Vektorregeln

### 1.3.1 Schiefe ‘Ebene’

**Aufgabe:** Ein Rad werde folgendermaßen auf einer schrägen Schiene festgehalten:



Man bestimme die Stärke der Federkraft aus dem Winkel  $\beta$  und der Schwerkraft  $\mathbf{F}$ , die auf das Rad einwirkt.

**Lösung:** Mit den Bezeichnungen

$\mathbf{F}_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kraft, die die Feder auf das Rad ausübt,}$

$\mathbf{F}_Z \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kraft, die die Schiene auf das Rad ausübt}$

gilt mit geeigneten Kraftstärken  $F$ ,  $F_F$ ,  $F_Z$  bzgl. der dimensionslosen Einheitsvektoren  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_F &= -F_F \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{F}_Z &= -F_Z \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F} &= F (\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_Z + \mathbf{F}_F = 0$$

folgt somit

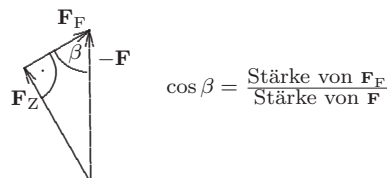
$$(F \cos \beta - F_F) \mathbf{e}_1 + (\dots) \mathbf{e}_2 = 0$$

und daraus mit Lemma 1.2.4 das Ergebnis:

$$\text{Stärke von } \mathbf{F}_F = (\cos \beta) \text{ Stärke von } \mathbf{F}.$$

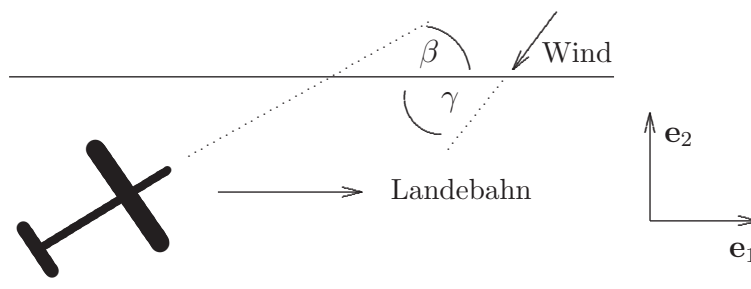
**Warnung:** Dieses Ergebnis gilt i.a. **nicht** für den Fall, daß die Federkraft außerhalb des Radmittelpunktes angreift. Dann stimmt nämlich die Richtung von  $\mathbf{F}_Z$  nicht mehr mit derjenigen von  $-\mathbf{e}_2$  überein!

Aus Gründen der Systematik vermiedene **Schnell-Lösung:**



### 1.3.2 Landeanflug

**Aufgabe:** Ein Flugzeug befinde sich in der letzten Phase des Landeanflugs:



Der Geschwindigkeitsmesser an Bord des Flugzeugs zeige  $80 \frac{\text{km}}{\text{Stunde}}$  an. Man bestimme die Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von den Winkeln  $\beta, \gamma$ .

**Lösung:** Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Geschw. d. Flugzeugs relativ zur Luft,} \\ \mathbf{v}_L &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Windgeschwindigkeit,} \\ \mathbf{v} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Geschw. d. Flugzeugs relativ zur Landebahn} \end{aligned}$$

gilt nach 1.1.3

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_L. \quad (1.7)$$

Bzgl. der dimensionslosen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  gilt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_F = 80 \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{Stunde}}, \quad \mathbf{v}_L = v_L \begin{pmatrix} -\cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

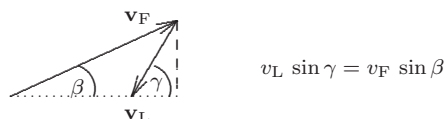
mit geeigneten Geschwindigkeitsbeträgen  $v, v_L$ , d.h. (1.7) nimmt die Form

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \cos \beta \frac{\text{km}}{\text{Stunde}} - v_L \cos \gamma \\ 80 \sin \beta \frac{\text{km}}{\text{Stunde}} - v_L \sin \gamma \end{pmatrix}$$

an. Daraus folgt  $v_L = 80 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \frac{\text{km}}{\text{Stunde}}$  und somit nach (1.8) das Ergebnis:

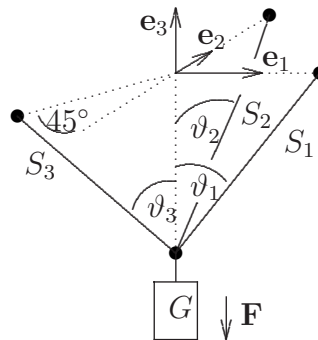
$$\text{Windgeschwindigkeit} = 80 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \frac{\text{km}}{\text{Stunde}}.$$

Aus Gründen der Systematik vermiedene **Schnell-Lösung:**



### 1.3.3 Seilspannungen (Spezialfall)

**Aufgabe:**<sup>11</sup> Ein Gewicht  $G$  sei folgendermaßen an drei Seilen  $S_1, S_2, S_3$  aufgehängt:



Man bestimme die Stärke der Kräfte  $\mathbf{F}_j$ , die die Seile  $S_j$  auf  $G$  ausüben, also die **Seilspannungen**, aus den Winkeln  $\vartheta_j$  und der Schwerkraft  $\mathbf{F}$ , die auf  $G$  einwirkt.

**Lösung:** Die Seile  $S_j$  sind in Richtung der dimensionslosen Einheitsvektoren  $\mathbf{b}_j$  gespannt, für die in der Spaltenschreibweise von 1.2.4 bzgl. der dimensionslosen Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1 \\ 0 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_3 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

gilt. Entsprechend 1.1.5 gilt

$$\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_3, \quad F_j = F_j \mathbf{b}_j \quad (1.10)$$

mit:

$$\text{Stärke von } \mathbf{F}_{(j)} = F_{(j)}.$$

Aufgrund der Definitionen von 1.1.4 gilt

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}.$$

Mit (1.10) und (1.1),(1.3) folgt hieraus

$$F_1 \mathbf{b}_1 + F_2 \mathbf{b}_2 + F_3 \mathbf{b}_3 = F \mathbf{e}_3. \quad (1.11)$$

Unsere Aufgabe besteht also darin, einen vorgegebenen Vektor, nämlich  $-F \mathbf{e}_3$ , nach einer vorgegebenen **schiefwinkligen** Basis, hier  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , zu entwickeln! Durch die spezielle Wahl der Aufhängung ist die Lösung dieser Aufgabe hier besonders elementar:

Mit (1.9) und (1.5),(1.6) folgt

$$\begin{aligned} F_1 \sin \vartheta_1 - F_3 \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \vartheta_3 &= 0, \\ F_2 \sin \vartheta_2 - F_3 \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \vartheta_3 &= 0, \\ F_1 \cos \vartheta_1 + F_2 \cos \vartheta_2 + F_3 \cos \vartheta_3 &= F. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Man kann das Gleichungssystem natürlich mit dem GAUSSschen Algorithmus oder der CRAMERSchen Regel<sup>12</sup> lösen. Man sieht aber auch sofort, daß die ersten beiden Gleichungen für

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} F \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \right), \\ F_2 &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} F \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \right), \\ F_3 &= \frac{1}{\lambda} (F \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) \end{aligned}$$

erfüllt sind und mit der Wahl

$$\lambda = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \underbrace{(\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}_{=\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)} \sin \vartheta_3$$

auch die dritte der Gleichungen (1.12) erfüllt ist. Nach Lemma 1.2.4 ist die Lösung eindeutig.

Eine anschauliche Schnell-Lösung ist hier schon nicht mehr so naheliegend.



# Kapitel 2

## EUKLIDISCHE REELLE VEKTORRÄUME

### 2.1 Das Skalarprodukt

#### 2.1.1 Motivation

In den bisherigen Anschauungsmodellen für reelle Vektorräume war jedem Vektor in natürlicher Weise eine Maßzahl zugeordnet, die wir mit  $\|\mathbf{v}\|$  (*Norm* von  $\mathbf{v}$ ) bezeichnen wollen, nämlich:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| \text{ Längeneinheit} &= \text{ entspr. d. räuml. Transl. } \mathbf{x} \text{ zurückgel. Strecke,} \\ \|\mathbf{v}\| \text{ Geschwindigkeitseinheit} &= \frac{\text{pro Zeiteinh. zurückgel. Strecke}}{\text{Zeiteinheit}}, \\ \|\mathbf{F}\| \text{ Krafteinheit} &= \text{ Stärke der Kraft } \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Für physikalische Anwendungen ist es oft vorteilhafter, die *Beträge*

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}| &\stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{x}\| \text{ Längeneinheit,} \\ |\mathbf{v}| &\stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{v}\| \text{ Geschwindigkeitseinheit,} \\ |\mathbf{F}| &\stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{F}\| \text{ Krafteinheit} \\ &\text{ usw.}\end{aligned}$$

zu verwenden.<sup>1</sup> Dafür gilt<sup>2</sup>

$$|\mathbf{b}| = \|\mathbf{b}\| \iff \mathbf{b} \text{ physikalisch dimensionslos.}$$

und<sup>3</sup>

$$|\mathbf{b} E| = |\mathbf{b}| E$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Hier bezeichnet natürlich  $\mathbf{x}$  eine räuml. Translation,  $\mathbf{v}$  eine Geschwindigkeit und  $\mathbf{F}$  eine Kraft.

<sup>2</sup>Gemäß Fußnote 7 von Kapitel 1.

<sup>3</sup>Entsprechend den Vereinbarungen von 1.1.5.

für alle physikalischen Dreier-Vektoren  $\mathbf{b}$  und physikalischen Einheiten  $E (> 0)$ .  
Für räumliche Translationen ist ‘anschaulich’ klar, daß der *Satz von PYTHAGORAS* gilt:<sup>4</sup>

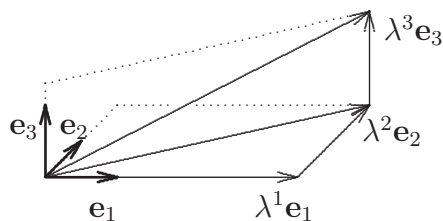
$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 \text{ falls } \mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2 .$$

Nach 1.1.5 gilt die entspr. Beziehung dann auch für Geschwindigkeiten, Kräfte usw.

**Anschauliche Folgerung:** Für jedes der bisherigen Anschauungsmodelle für reelle Vektorräume existiert eine *Orthonormalbasis*  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , d.h. es gilt

$$\|\lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 + \lambda^3 \mathbf{e}_3\| = |\lambda^1|^2 + |\lambda^2|^2 + |\lambda^3|^2$$

für alle (physikalisch dimensionslosen) reellen  $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ .



Es gilt also

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|a^1|^2 + |a^2|^2 + |a^3|^2} \text{ falls: } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \text{ bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

$(a^1, a^2, a^3 \text{ phys. dimensionslos}) .$

**Häufige Aufgabe:**<sup>5</sup> Gegeben sei ein Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  (d.h.  $\|\mathbf{e}\| = 1$ ) und ein beliebiger Vektor  $\mathbf{v}$  gleicher physikalischer Dimension.

Man zerlege  $\mathbf{v}$  in eine Vielfaches von  $\mathbf{e}$  und einen zu  $\mathbf{e}$  senkrechten Vektor:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}, \mathbf{v}) \mathbf{e} + \mathbf{v}_\perp .$$

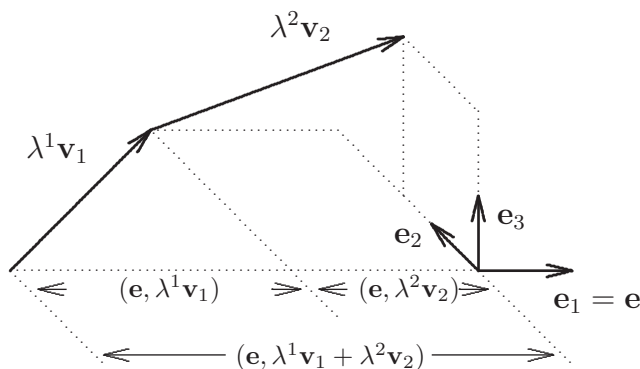
Anschaulich ist klar, daß  $(\mathbf{e}, \mathbf{v})$  linear von  $\mathbf{v}$  abhängt, d.h.:

$$\boxed{(\mathbf{e}, \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \lambda^2 \mathbf{v}_2) = \lambda^1 (\mathbf{e}, \mathbf{v}_1) + \lambda^2 (\mathbf{e}, \mathbf{v}_2) .} \quad (\text{S1})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup> $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$  meint: die  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  zugeordneten Richtungen sind orthogonal (senkrecht). Entspr. für Geschwindigkeiten, Kräfte usw.

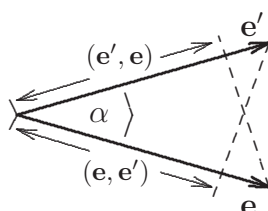
<sup>5</sup>Vgl. etwa 1.3.1.



Außerdem ist anschaulich klar, daß

$$(e', e) = (e, e')$$

für bel. Einheitsvektoren  $e, e'$  gilt:



Daher ist es zweckmäßig,

$$(p', v) \stackrel{\text{def}}{=} \|p'\| \left( \frac{1}{\|p'\|} p', v \right)$$

für bel.  $p', v$  zu definieren, denn dann gilt

$$\boxed{(p', v) = (v, p')} \tag{S2}$$

für bel.  $p', v$ , so daß  $(p', v)$  auch von  $p'$  linear abhängt.<sup>6</sup>

Für eine Orthonormalbasis gilt natürlich

$$\boxed{(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \tag{ON}$$

woraus mit (S1) folgt, daß:

$$(a, b) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \text{ falls: } a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \text{ bzgl. } (e_1, e_2, e_3),$$

$$(a^1, \dots, b^3 \text{ phys. dimensionslos}).$$

<sup>6</sup>Man nennt die Zuordnung  $p', v \rightarrow (p', v)$  daher eine (symmetrische) *Bilinearform*.

Daraus folgt insbesondere

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 \text{ für alle } \mathbf{v}$$

und somit

$$\boxed{(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ falls } \mathbf{v} \neq 0.} \quad (\text{S3})$$

## 2.1.2 Mathematische Betrachtungen

**Definition 2.1.1** Unter einem **EUKLIDischen** (reellen) **Vektorraum**  $V$  versteht man einen reellen Vektorraum  $V$ , in dem ein (reelles) **Skalarprodukt** ('metrische Bilinearform') erklärt ist, d.h. eine Zuordnung

$$\underbrace{\mathbf{p}', \mathbf{v}}_{\in V} \longrightarrow \underbrace{(\mathbf{p}', \mathbf{v})}_{\in \mathbb{R}},$$

die den Bedingungen (S1) – (S3) aus 2.1.1 genügt (für alle  $\mathbf{e}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ).

**Definition 2.1.2** Eine Basis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  eines  $n$ -dimensionalen, EUKLIDischen (reellen) Vektorraumes  $V$  nennt man eine **Orthonormalbasis**, falls sie die Bedingung (ON) aus 2.1.1 erfüllt.

**Definition 2.1.3** Zwei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  eines EUKLIDischen reellen Vektorraumes  $V$  nennt man **senkrecht** zueinander (in Zeichen:  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ ), falls  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$  gilt. Einen Vektor  $\mathbf{v} \in V$  nennt man senkrecht zu einer Teilmenge  $T$  von  $V$  (in Zeichen:  $\mathbf{v} \perp T$ ), falls  $(\mathbf{v}, \mathbf{p}') = 0$  für alle  $\mathbf{p}' \in T$  gilt.

### Lemma 2.1.4

- Gegeben: (i) EUKLIDischer reeller Vektorraum  $V$   
 (ii) Teilmenge  $T$  von  $V$   
 (iii) Vektor  $\mathbf{v} \neq 0$  aus  $V$

Behauptung:  $\mathbf{v} \perp T \implies \mathbf{v} \perp \mathcal{L}(T) \implies \mathbf{v} \notin \mathcal{L}(T)$ .

**Beweisskizze:** Die erste Implikation folgt aus (S1), die zweite (indirekt) aus (S3).

■

**Lemma 2.1.5**

- Gegeben: (i) EUKLIDischer (reeller) Vektorraum  
(ii) endlichdim. Teilraum  $V'$  von  $V$   
(iii) Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  von  $V'$

Behauptung: Zu jedem Vektor  $\mathbf{v} \in V$  existiert genau ein Vektor  $\mathbf{v}_{\parallel} \in V'$ , die sog. (Orthogonal-) **Projektion** von  $\mathbf{v}$  auf  $V'$ , mit  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}) \perp V'$ . Dieser ist gegeben durch:

$$\mathbf{v}_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}) \mathbf{e}_j.$$

**Beweis:** Der angegebene Vektor  $\mathbf{v}_{\parallel}$  besitzt offensichtlich nach (S1) und (S2) die gewünschten Eigenschaften. Sei  $\mathbf{v}'_{\parallel}$  ein weiterer solcher Vektor. Dann ist einerseits  $\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}'_{\parallel} \in V'$ , andererseits nach (S1)

$$\left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}'_{\parallel}) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}) \right) = (\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}'_{\parallel}) \perp V'.$$

Nach Lemma 2.1.4 muß dann  $\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}'_{\parallel} = 0$ , d.h.  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$  sein. ■

**Anmerkung:** Anwendung von Lemma 2.1.5 auf den Spezialfall  $V' = V$  zeigt:

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ Orthonormalbasis von } V \\ \implies & \mathbf{v} = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{e}_{\nu}, \mathbf{v}) \mathbf{e}_{\nu} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

**Folgerung 2.1.6** Jede Orthonormalbasis eines Teilraumes  $V'$  eines  $n$ -dimensionalen EUKLIDischen (reellen) Vektorraumes  $V$  läßt sich zu einer Orthonormalbasis von  $V$  ergänzen.

**Beweis:** Der Fall  $V' = V$  ist trivial. Sei also  $V' \neq V$ . Dann existiert ein  $\mathbf{v} \in V \setminus V'$  und dafür ist nach Lemma 2.1.5

$$\mathbf{e}_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}\|} \perp V'.$$

Falls also  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  Orthonormalbasis von  $V'$  ist, so ist  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m+1}\}$  Orthonormalbasis von

$$V'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(V' \cup \{\mathbf{e}_{m+1}\}) \subset V.$$

Falls  $V'' \neq V$ , dann existiert nach dem gleichen Argument ein  $\mathbf{e}_{m+2}$ , für das  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m+2}\}$  Orthonormalbasis von

$$V''' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(V' \cup \{\mathbf{e}_{m+2}\})$$

ist. Nach  $n - m$  solchen Schritten ergibt sich entspr. Lemma 1.2.6 die gesuchte Orthonormalbasis von  $V$ . ■

**Lemma 2.1.7**

- Gegeben: (i) endlichdim., EUKLID. (reeller) Vektorraum  $V$   
(ii) Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  von  $V$   
(iii) Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

Behauptung: Mit

$$v_j^k \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_j) \quad \text{für } j = 1, 2 \text{ und } k = 1, \dots, n$$

gilt in der Spalten-Schreibweise bzgl.  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$

$$\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^n \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 1, 2$$

und

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = v_1^1 v_2^1 + v_1^2 v_2^2 + \dots + v_1^n v_2^n.$$

In der Spalten-Schreibweise bzgl. einer Orthonormalbasis haben also alle EUKLIDISCHEN (reellen) Vektorräume gleicher **endlicher** Dimension die gleiche Struktur!

**Definition 2.1.8** Als (EUKLIDISCHE) **Norm** des Vektors  $\mathbf{v}$  eines EUKLIDISCHEN (reellen) Vektorraumes bezeichnet man die reelle Zahl<sup>7</sup>

$$\|\mathbf{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

**Lemma 2.1.9**

- Gegeben: (i) EUKLID. reeller Vektorraum  $V$   
(ii)  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

Version vom 26. März 2009

<sup>7</sup>Vgl. 2.1.1. Eine EUKLIDISCHE Norm  $\|\cdot\|$  erfüllt stets die sog. **Parallelogrammgleichung**

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 = \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 \right)$$

und bestimmt das zugehörige innere Produkt des **reellen** Vektorraumes  $V$  gemäß

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 - \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 \right).$$

Behauptung: *Es gelten der **Satz von** PYTHAGORAS<sup>8</sup>*

$$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \implies \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2,$$

die **Dreiecksungleichung**

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$$

und die **SCHWARZsche Ungleichung<sup>9</sup>**

$$|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| \leq \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|.$$

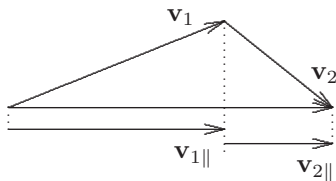
*In den beiden Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  linear abhängig sind.*

**Beweisskizze:**

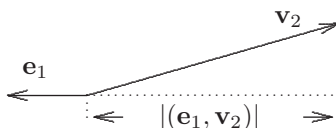
Zum Satz von PYTHAGORAS:

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \text{ für bel. } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

Zur Dreiecksungleichung:



Zur SCHWARZschen Ungleichung:



**Abschließende Bemerkung:** Im Sinne von 1.1.5 verwendet man für beliebige räumliche Translationen  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  und bel. physikalische Einheiten  $E_1, E_2$  oft zweckmäßig das physikalische innere Produkt

$$(\mathbf{x}_1 E_1) \cdot (\mathbf{x}_2 E_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) E_1 E_2 (\text{Längeneinheit})^2$$

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Die Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS gilt zwar in reellen, nicht aber in komplexen Vektorräumen mit Skalarprodukt.

<sup>9</sup>Aus der SCHWARZschen Ungleichung folgt, daß zu je zwei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  jeweils genau ein Winkel  $\alpha \in [0, \pi]$  existiert mit  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \alpha$ . Aber nur für das natürliche Skalarprodukt physikalischer Dreier-Vektoren gilt  $\alpha = \angle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ .

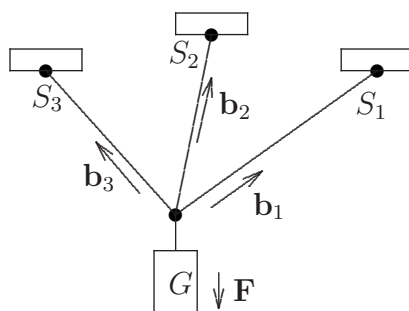
anstelle des mathematischen  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Dann hat z.B.<sup>10</sup>

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{F}| \cos \angle \mathbf{x}, \mathbf{F}$$

die physikalische Dimension ‘Leistung’, falls  $\mathbf{v}$  eine Geschwindigkeit und  $\mathbf{F}$  eine Kraft ist.

### 2.1.3 Seilspannungen (allgemeiner Fall)

**Aufgabe:** Ein Gewicht  $G$  hänge an drei Seilen, die in Richtung der linear unabhängigen (physikalisch dimensionslosen) Einheitsvektoren  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  gespannt seien:



Man bestimme die entspr. Seilspannungen in Abhängigkeit von der Schwerkraft  $\mathbf{F}$ , die auf  $G$  wirkt.

**Lösung:** Wegen

$$\mathbf{F}_j \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{F}_j| \mathbf{b}_j = \text{Kraft, die } S_j \text{ auf } G \text{ ausübt,}$$

lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathbf{F} + |\mathbf{F}_1| \mathbf{b}_1 + |\mathbf{F}_2| \mathbf{b}_2 + |\mathbf{F}_3| \mathbf{b}_3 = 0.$$

Insbesondere gilt also

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F} + |\mathbf{F}_1| \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_1 + |\mathbf{F}_2| \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_2 + |\mathbf{F}_3| \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = 0 \quad \forall \mathbf{e}_3$$

und somit

$$|\mathbf{F}_3| = -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_3}, \quad \text{falls } \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \neq \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_3. \quad (2.1)$$

<sup>10</sup>Es ist also eigentlich das (gewählte) **mathematische** innere Produkt, das von der Wahl der physikalischen Einheiten abhängt.



Ein geeignetes  $\mathbf{e}_3$  erhält man z.B., indem man zunächst eine Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  von  $\mathcal{L}(\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\})$  wählt und diese dann zu einer Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  erweitert:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{e}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{e}_1}{|\mathbf{b}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{e}_1|}, \\ \mathbf{e}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_3 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}_3) \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{b}_3) \mathbf{e}_2}{|\mathbf{b}_3 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}_3) \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{b}_3) \mathbf{e}_2|}.\end{aligned}$$

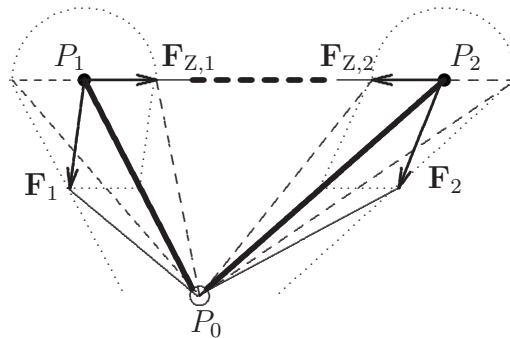
Die Spannung  $|\mathbf{F}_3|$  von Seil  $S_3$  ergibt sich nun durch Einsetzen in (2.1). Die übrigen Seilspannungen ergeben sich schließlich aus der resultierenden Formel durch Permutation der Indizes 1,2,3.

Wir verzichten auf eine explizite Angabe der Lösung, da sich  $\mathbf{b}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b}_3}$  mithilfe des Vektorproduktes in vereinfachter Form ergeben wird.<sup>12</sup>

## 2.2 Das Vektorprodukt im 3-dim. EUKLID. Raum

### 2.2.1 Motivation (Hebelgesetz)

**Aufgabe:** Zwei starre masselose Stangen seien im Punkt  $P_0$  frei drehbar gelagert. Die anderen beiden Enden bei  $P_1, P_2$  seien durch eine unendlich starke masselose Feder verbunden:<sup>13</sup>



Welche ‘äußeren’ Kräfte  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  dürfen in den Punkten  $P_1, P_2$  angreifen, wenn das System in Ruhe bleiben soll?

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Vgl. Beweis von Folgerung 2.1.6.

<sup>12</sup>Das angegebene Verfahren zur Konstruktion der Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  bezeichnet man als **SCHMIDT'sches Orthogonalisierungsverfahren**.

<sup>13</sup>In der Zeichnung haben  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  weder gleiche Richtung noch gleichen Betrag!

**Lösung:** Da  $\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{Z,j}$  in Richtung von  $P_j$  nach  $P_0$  (oder entgegengesetzt) zeigen muß und da  $|\mathbf{F}_{Z,1}| = |\mathbf{F}_{Z,2}|$  gelten muß, hat im Gleichgewichtsfall das von  $\overrightarrow{P_0P_1}$  und  $\mathbf{F}_1$  aufgespannte Parallelogramm den gleichen Flächeninhalt wie das von  $\overrightarrow{P_0P_2}$  und  $\mathbf{F}_2$  aufgespannte. Dabei liegen beide Parallelogramme in einundderselben Ebene. Außerdem müssen die zur Feder parallelen Komponenten von  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  entgegengesetzt gerichtet sein.

All das läßt sich zusammenfassen in der Aussage:

$$\text{Gleichgewicht} \iff \overrightarrow{P_0P_1} \times \mathbf{F}_1 + \overrightarrow{P_0P_2} \times \mathbf{F}_2 = 0.$$

Dabei ist das **physikalische Vektorprodukt**  $\times$  durch

$$(\mathbf{x}_1 E_1) \times (\mathbf{x}_2 E_2) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] E_1 E_2 \text{ Längeneinheit}$$

für bel. räuml. Transl.  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  und bel. phys. Einheiten  $E_1, E_2$

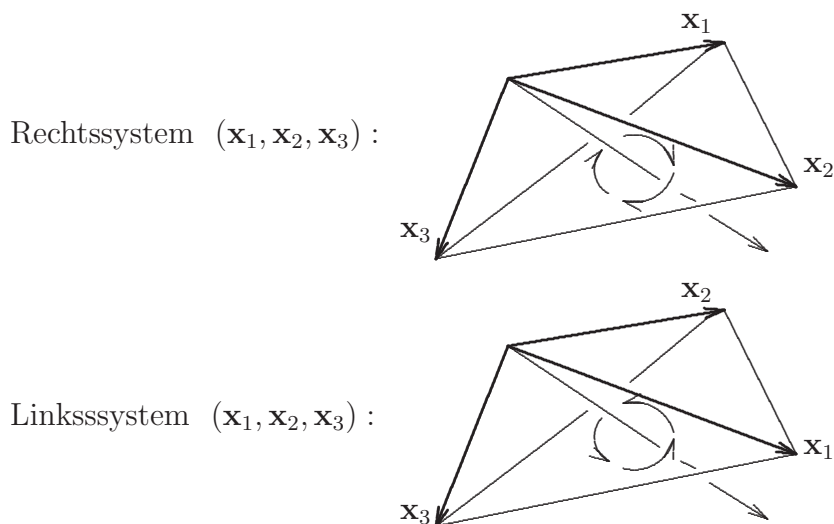
mithilfe des **mathematischen Vektorproduktes**  $[\cdot, \cdot]$  definiert, das seinerseits (anschaulich) durch folgende vier Bedingungen charakterisiert ist:<sup>14</sup>

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V \implies [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \in V, \quad (2.2)$$

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \perp \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \quad (2.3)$$

$$\|[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]\| \text{ (Längeneinh.)}^2 = \text{Fläche d. v. } \mathbf{x}_1 \text{ u. } \mathbf{x}_2 \text{ aufgesp. Parallelogr.}, \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]) \text{ Rechtssystem, falls } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ lin. unabh.} \quad (2.5)$$



<sup>14</sup>Es gilt also z.B.:

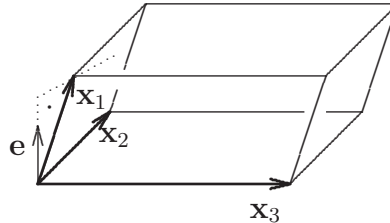
$$|\mathbf{x} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot |\sin \angle \mathbf{x}, \mathbf{F}|.$$

### 2.2.2 Bestimmung des Vektorproduktes

Durch Kombination von Skalar- und Vektorprodukt ergibt sich das sog. **Spatprodukt**. Für dieses gemischte Produkt gilt offenbar<sup>15</sup>

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) = \sigma_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3} \text{Volumen des entspr. Spats} \quad (2.6)$$

für bel. räuml. Transl.  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ :



Dabei ist

$$\sigma_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \text{ ein Rechtssystem ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach (2.6) ist anschaulich sofort klar, daß

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_3 \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \quad (2.7)$$

für bel. räuml. Transl.  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  gilt. Mit (S1) und (S2) folgt daraus

$$\mathbf{x} \cdot ((\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = \alpha \mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

für bel. räuml. Transl.  $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  und bel. reelle  $\alpha, \beta$ . Mit Lemma 2.1.7 folgt daraus die Linearitätseigenschaft

$$\boxed{[\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta [\mathbf{b}, \mathbf{c}].} \quad (K1)$$

Direkt anschaulich klar sind die Beziehungen

$$\boxed{[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]} \quad (K2)$$

und<sup>16</sup>

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2 \\ [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3 \\ [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j] = 0 \end{array} \right\} \text{für jedes orthonormale} \quad (K3)$$

Rechtssystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

<sup>15</sup>Mit dem dimensionslosen Einheitsvektor  $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3|}$  ergibt sich für die Höhe  $h = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e}$ . Nach (2.4) ist die Grundfläche  $|\mathcal{S}| = |\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3|$ . Für das Volumen  $h|\mathcal{S}|$  ergibt sich damit (2.6).

<sup>16</sup>Aus mathematischer Sicht sind Rechtssysteme vor Linkssystemen nicht grundsätzlich ausgezeichnet. Deshalb müßte man präzise folgendermaßen vorgehen: Man wählt ein Orthonormalsystem willkürlich heraus, erklärt dieses zum Rechtssystem und definiert die Vektorprodukte dafür gemäß (K3). Durch (K1) und (K2) wird dann diese Definition für beliebige Vektoren erweitert. Für das so definierte Skalarprodukt ist dann  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  definitionsgemäß genau dann ein Rechtssystem, wenn  $\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) > 0$  ist. Damit gelten (K3) und (2.8) für alle orthonormalen Rechtssysteme (Beweis als Übungsvorschlag).

Aus (K1-3) ergibt sich für jedes orthonormale Rechtssystem  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  von  $V$  und beliebige  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \implies [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (e_1, e_2, e_3). \quad (2.8)$$

Falls die  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  physikalisch dimensionslos sind, gilt (2.8) für beliebige physikalische 3-er Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  mit dem physikalischen Vektorprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  anstelle des mathematischen Vektorprodukts  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

### 2.2.3 Drehmomentbilanzen

Nach dem Ergebnis der Aufgabe von 2.2.1 ist für die Wirkung einer Kraft durchaus wesentlich, in welchem Punkte sie angreift! Falls eine Kraft  $\mathbf{F}$  im Punkt  $P$  angreift, den man von  $P_0$  aus durch die räumliche Translation  $\mathbf{x}$  erreicht, nennt man

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} \times \mathbf{F}$$

das von  $\mathbf{F}$  bzgl.  $P_0$  erzeugte *Drehmoment*<sup>17</sup>.

**Merkhilfe** für die Reihenfolge der Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{F}$  :

Erst muß der  $\mathbf{x}$  entsprechende Hebelarm vorhanden sein, bevor man daran die Kraft  $\mathbf{F}$  ausüben kann.

Streng genommen bildet die Menge aller Drehmomente einen neuen Vektorraum, der jedoch in natürlicher Weise entspr. 1.1.5 demjenigen der räumlichen Translationen zugeordnet ist.

Das Ergebnis der Aufgabe aus 2.2.1 macht folgende Erfahrungstatsache verständlich:

Ein starrer Körper kann nur dann im Ruhezustand verharren, wenn

1. die Vektorsumme aller am Körper angreifenden (äußeren) Kräfte verschwindet und
2. die Vektorsumme aller (äußeren) Drehmomente für jeden Bezugspunkt  $P_0$  verschwindet.

(Bzgl. der Aufteilung in äußere und innere Kräfte vgl. 3.4.3)

<sup>17</sup>Wir wollen aus Sicherheitsgründen den Bezugspunkt  $P_0$  immer explizit angeben, auch wenn die Darstellung dadurch — oberflächlich betrachtet — unnötig kompliziert erscheint.

**Anmerkung:** Der allgemeinste Bewegungszustand, der beiden Bedingungen genügt, ist derjenige des sog. *kräftefreien Kreisels*, der erst in der Vorlesung *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik* behandelt wird; siehe Kapitel 2 von (Lücke, mech).

Es gilt nämlich:

### Lemma 2.2.1

- Gegeben: (i) Punkte  $P_0, P'_0, P_1, \dots, P_n$   
(ii) Kräfte  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ , die in den Punkten  $P_1, \dots, P_n$  angreifen

Behauptung: Im Falle  $\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n = 0$  stimmt die Vektorsumme aller Drehmomente bzgl.  $P_0$  mit der Vektorsumme aller Drehmomente bzgl.  $P'_0$  überein.

**Beweis:**<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \left( \overrightarrow{P'_0 P_\nu} \times \mathbf{F}_\nu \right) &= \sum_{\nu=1}^n \left( \left( \overrightarrow{P'_0 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_\nu} \right) \times \mathbf{F}_\nu \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left( \overrightarrow{P_0 P_\nu} \times \mathbf{F}_\nu \right) + \underbrace{\overrightarrow{P'_0 P_0} \times \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_\nu}_{=0}. \end{aligned}$$

■

Außerdem gilt:

### Lemma 2.2.2

- Gegeben: (i) Punkte  $P_1, \dots, P_n$   
(ii) positive Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_n$

Behauptung: Es existiert genau ein Punkt  $P_s$ , mit folgender Eigenschaft:

Für bel.  $P_0, \mathbf{F}$  stimmt die Vektorsumme der Drehmomente bzgl.  $P_0$ , die die in den Punkten  $P_\nu$  angreifenden Kräfte  $\mathbf{F}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_\nu \mathbf{F}$  erzeugen, mit dem Drehmoment bzgl.  $P_0$  überein, das eine in  $P_s$  angreifende Kraft  $\mathbf{F}_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_1 + \dots + \mu_n) \mathbf{F}$  erzeugen würde.

**Beweisskizze:** Die Vektorsumme der Drehmomente der  $\mathbf{F}_j$  bzgl. eines beliebig vorgegebenen  $P_0$  ist

$$\sum_{\nu=1}^n \left( \overrightarrow{P_0 P_\nu} \times \mu_\nu \mathbf{F} \right) = \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\mu_\nu \overrightarrow{P_0 P_\nu}}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \right) \times (\mu_1 + \dots + \mu_n) \mathbf{F}.$$

<sup>18</sup>Mit  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  bezeichnen wir jeweils die räumliche Translation, die von  $P_1$  nach  $P_2$  führt.

Bzgl.  $P_0$  ist  $P_s$  also durch

$$\overrightarrow{P_0 P_s} = \frac{\mu_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{P_0 P_n}}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \quad (2.9)$$

festgelegt. Für einen beliebig vorgegebenen anderen Bezugspunkt  $P'_0$  gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'_0 P_s} &= \frac{\mu_1 \overrightarrow{P'_0 P_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{P'_0 P_n}}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \\ &= \frac{\mu_1 (\overrightarrow{P'_0 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_1}) + \dots + \mu_n (\overrightarrow{P'_0 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_n})}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \\ &= \frac{(\mu_1 + \dots + \mu_n) \overrightarrow{P'_0 P_0} + \mu_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{P_0 P_n}}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \\ &\stackrel{(2.9)}{=} \overrightarrow{P'_0 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_s}. \end{aligned}$$

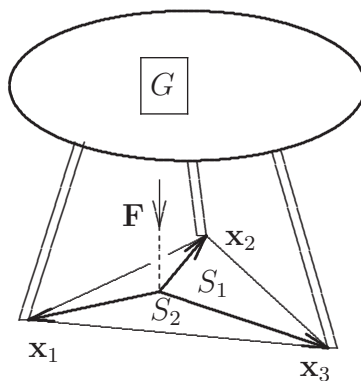
$P_s$  hängt also nicht vom Bezugspunkt  $P_0$  ab. ■

Lemma 2.2.2 macht folgende Erfahrungstatsache verständlich:

Jeder **starre** Körper besitzt genau einen Punkt, den sog. **Schwerpunkt**  $P_s$ , in dem man sich die gesamte, von einem **homogenen** Schwerefeld erzeugte, Schwerkraft angreifend denken kann.

## 2.2.4 Anwendungsbeispiel (Dreibeiniger Tisch)

**Aufgabe:** Ein Gewicht  $G$  stehe auf einem dreibeinigen Tisch:



Unter Vernachlässigung des Eigengewichts des Tisches<sup>19</sup> bestimme man die Auflagekräfte der drei Tischbeine.

<sup>19</sup>Bei Einbezug des Tischgewichtes ist lediglich der Auflagepunkt von  $G$  durch den Schwerpunkt des Gesamtsystems (senkrecht über  $P_0$ ) zu ersetzen.

**Lösung:** Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{an G angreifende Schwerkraft,} \\ \mathbf{F}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Zwangskraft des Bodens auf das } j\text{-te Tischbein}\end{aligned}$$

lauten die Gleichgewichtsbedingungen nach 2.2.3:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{x}_3 \times \mathbf{F}_3 = 0. \quad (2.11)$$

Aus (2.11) ergibt sich nach innerer Multiplikation mit  $\mathbf{x}_3$  aufgrund der Zyklicität des Spatproduktes

$$\mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1) + \mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_2) = 0.$$

Für die Auflagekräfte

$$F_j^{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} \cdot \mathbf{F}_j$$

gilt also

$$F_1^{\parallel} S_2 - F_2^{\parallel} S_1 = 0$$

und somit

$$F_2^{\parallel} = \frac{S_2}{S_1} F_1^{\parallel},$$

wobei die  $S_j$  die Dreiecksflächen gemäß obiger Skizze bezeichnen. Analog ergibt sich

$$F_3^{\parallel} = \frac{S_3}{S_1} F_1^{\parallel}.$$

Da außerdem nach (2.10)

$$F_1^{\parallel} + F_2^{\parallel} + F_3^{\parallel} = |\mathbf{F}|$$

gilt, erhalten wir schließlich das plausible Ergebnis

$$F_j^{\parallel} = \frac{S_j}{S_1 + S_2 + S_3} |\mathbf{F}|$$

zunächst für  $j = 1$  und somit, aufgrund der Irrelevanz der Wahl der Numerierung, auch für  $j = 2, 3$ .

## 2.3 Nützliche Formeln

### 2.3.1 Teilzusammenfassung

Bzgl. eines orthonormierten Rechtssystems<sup>20</sup>  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ohne physikalische Dimension gelten folgende Gleichungen:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j, \quad (2.12)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a^1 + \beta b^1 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 \\ \alpha a^3 + \beta b^3 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3, \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}. \quad (2.16)$$

Unabhängig von der Basis gelten die Beziehungen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \quad (2.17)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}| \quad (2.18)$$

und:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \implies |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \quad \text{PYTHAGORAS}, \quad (2.19)$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad \text{\textit{Dreiecksungleichung}}, \quad (2.20)$$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \quad \text{SCHWARZsche Ungleichung}. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Mehrfachprodukte

Man beweist leicht die folgenden einfachen Formeln:<sup>21</sup>

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad (2.22)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>20</sup>Die Rechtshändigkeit geht nur in (2.15) ein.

<sup>21</sup>Aufgrund der Zyklicität des Spatproduktes läßt sich (2.24) auf (2.23) zurückführen. Die Rückführbarkeit von (2.25) auf (2.23) ist noch evident.

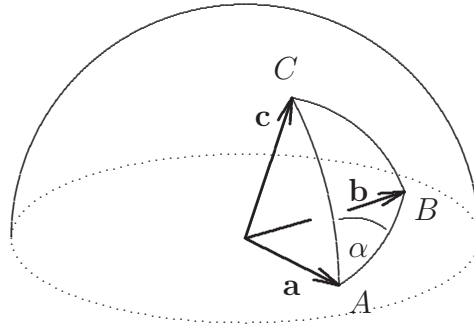


$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad \text{Entwicklungssatz}^{22}, \quad (2.23)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.24)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) \mathbf{a}. \quad (2.25)$$

Für das sphärische Dreieck  $ABC$  auf der Kugel (um  $P_0$ ) mit dem Radius  $R = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$



gilt z.B.<sup>23</sup>

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}, \quad (2.26)$$

$$|\sin \alpha| = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}. \quad (2.27)$$

Aus (2.26) z.B. ergibt sich mit (2.24) und (2.17), (2.18) folgende Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos \alpha |\sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{c})| = \cos(\angle \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Weitere Formeln dieses Typs findet man z.B. in (Bronstein et al., 2001).

### 2.3.3 Reziproke Basis und CRAMERSche Regel

Wenn die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_j$  nicht mehr paarweise orthogonal zueinander sind, gilt (2.12) i.a. nicht mehr! Dagegen gilt für jede beliebige Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^1) \mathbf{b}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^2) \mathbf{b}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^3) \mathbf{b}_3, \quad (2.28)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>22</sup>Nach (K1) und (K2) reicht es offensichtlich, den Entwicklungssatz für  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  (orthonormales Rechtssystem) zu überprüfen.

<sup>23</sup>Mit  $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$ ,  $\mathbf{e}' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}$  gilt nämlich nach (2.17) resp. (2.18)  $\cos \alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'$  resp.  $|\sin \alpha| = |\mathbf{e} \times \mathbf{e}'|$ .

wobei  $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\}$  die durch<sup>24</sup>

$$\mathbf{b}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}, \quad \mathbf{b}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2 \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)}, \quad \mathbf{b}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_3 \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)} \quad (2.29)$$

definierte *reziproke Basis* bezeichnet, die offensichtlich die Bedingungen

$$\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}^k = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.30)$$

erfüllt — aus denen (2.28) sofort folgt; zur Verallgemeinerung auf  $n$ -dimensionale komplexe Vektorräume siehe Aufgabe 16 von (Lücke, eine).

Nach Definition 2.1.2, (2.30) und (K3) gilt:

$$\mathbf{b}^j = \mathbf{b}_j \text{ für } j = 1, 2, 3 \iff \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \text{ dimensionslose Orthonormalbasis.} \quad (2.31)$$

Nach (2.29) und (2.25) gilt außerdem

$$\mathbf{b}^1 \cdot (\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3) = \frac{1}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)},$$

insbesondere also nach (2.6):

$$(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3) \text{ Rechtssystem} \iff (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \text{ Rechtssystem.}$$

(2.28) gibt die Lösung des (im Prinzip bereits in 2.1.3 gelösten) Problems der Entwicklung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{a}$  nach einer beliebig vorgegebenen Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  in besonders übersichtlicher Weise mithilfe der reziproken Basis an. In der Spaltenschreibweise bzgl. eines orthonormalen **Rechtssystems**<sup>25</sup>  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  nimmt (2.28) die Form

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^1 b_1^1 + x^2 b_2^1 + x^3 b_3^1 \\ x^1 b_1^2 + x^2 b_2^2 + x^3 b_3^2 \\ x^1 b_1^3 + x^2 b_2^3 + x^3 b_3^3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

an mit

$$\begin{aligned} x^1 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^1 && \stackrel{(2.29)}{=} && \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}, \\ x^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^2 && \stackrel{(2.29)}{=} && \frac{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}, \\ x^3 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^3 && \stackrel{(2.29)}{=} && \frac{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{a})}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

<sup>24</sup>Die drei Definitionen unterscheiden sich nur durch zyklische Permutation der Indizes 1,2,3.

<sup>25</sup>Diese Voraussetzung ist wichtig für die folgende Gleichung (2.34).

Daraus erkennt man, daß (2.28) für **linear unabhängige**  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  auch die Lösung, nämlich (2.33), des Gleichungssystems (2.32) mit den drei Unbekannten  $x^1, x^2, x^3$  angibt.<sup>26</sup>

Mit der allgemeinen Definition<sup>27</sup>

$$\det \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (2.34)$$

$$\stackrel{(2.15),(2.14)}{=} \begin{cases} a^1 b^2 c^3 + b^1 c^2 a^3 + c^1 a^2 b^3 \\ -a^1 c^2 b^3 - b^1 a^2 c^3 - c^1 b^2 a^3 \end{cases}$$

nimmt (2.33) die Form der sog. CRAMERSCHEN *Regel* an:

$$x^1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ a^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ a^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix}}, \quad x^2 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1^1 & a^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & a^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & a^3 & b_3^3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix}}, \quad x^3 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & a^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & a^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & a^3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix}}.$$

### 2.3.4 Komplexe Zahlen

Der Körper der *komplexen Zahlen* läßt sich als ein reeller EUKLIDISCHER Vektorraum  $\mathbb{C}$  der Dimension 2 auffassen, in dem eine (physikalisch dimensionslose) Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  ausgezeichnet und dazu zusätzlich die *komplexe* Multiplikation

$$(x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2)(x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \mathbf{e}_2$$

erklärt ist. Dann benutzt man für die Vektoren auch die Schreibweise

$$x + i y \stackrel{\text{def}}{=} x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

und bezeichnet die  $x + i y$  als *komplexe Zahlen*. So gesehen ist die komplexe Multiplikation

$$(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2.36)$$

eine konsistente Verallgemeinerung der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen und die Additionsvorschrift für komplexe Zahlen ist:

$$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2), \quad (2.37)$$

Version vom 26. März 2009

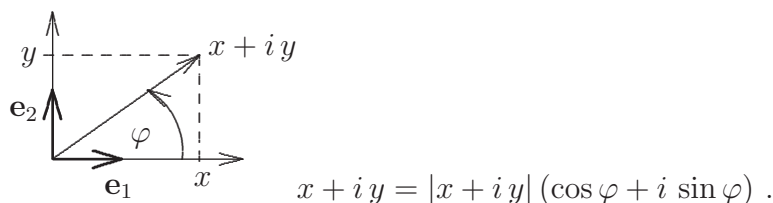
<sup>26</sup>Bzgl. linear abhängiger  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  siehe z.B. (Campbell und C. D. Meyer, 1991).

<sup>27</sup>Man werte  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  zunächst unter der Voraussetzung aus, daß die  $\mathbf{e}_j$  physikalisch dimensionslos sind.

Ein Spezialfall der komplexen Multiplikation ist

$$i^2 \stackrel{\text{def}}{=} i i = -1.$$

Eine nützliche Interpretation der komplexen Multiplikation erhält man durch den Übergang zur **Polardarstellung**:



Mithilfe der Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (2.38)$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.39)$$

ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & (e^{\lambda_1} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)) (e^{\lambda_2} (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) \\ & \stackrel{(2.36)}{=} e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \left( (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \right) \\ & = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \left( \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Daraus erkennt man:

Die komplexe Multiplikation von  $z_2$  mit  $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$  wirkt sich auf den  $z_2$  entsprechenden Vektor folgendermaßen aus:

1. Er wird um den Winkel

$$\arg(z_1) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \bmod 2\pi \quad (2.41)$$

gedreht<sup>28</sup> und

2. seine 'Länge' wird mit dem Faktor  $|z_1|$  multipliziert.

Version vom 26. März 2009

<sup>28</sup>Insbesondere die Multiplikation mit  $i$  bewirkt also eine Drehung um den Winkel  $\pi/2$  im mathematisch positiven Sinne (entgegen dem Uhrzeigersinn).

Aus den üblichen Definitionen<sup>29</sup>

$$\left. \begin{aligned} e^z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu \\ \cos z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu} \\ \sin z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} \end{aligned} \right\} \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.42)$$

ergibt sich die sog. **EULERSche Formel**

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}} \quad (2.43)$$

und daraus umgekehrt

$$\cos z = \frac{e^{+iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.44)$$

Aus der Definition der **Exponentialfunktion**  $\exp(z) = e^z$  folgt außerdem

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.45)$$

und daraus mit der EULERSchen Formel

$$\boxed{e^{\lambda} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{\lambda+i\varphi} \quad \forall \lambda, \varphi \in \mathbb{R}.} \quad (2.46)$$

**Anmerkung:** Man beachte, daß aus (2.40) auch unmittelbar aus (2.45) und (2.46) folgt. Mit (2.45) sind also bereits die Additionstheoreme (2.38) und (2.39) erfaßt.

Gemäß (2.46) ist anschaulich klar:

$$\boxed{e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi = 0 \bmod 2\pi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.} \quad (2.47)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Die hier angegebenen Potenzreihen  $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$  sind für alle  $z \in \mathbb{C}$  **absolut konvergent**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{n' > n} \sum_{\nu=n}^{n'} |c_\nu z^\nu| = 0.$$

Oft werden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \Re(x + iy) &\stackrel{\text{def}}{=} x && \text{\textit{Realteil}} \text{ von } x + iy, \\ \Im(x + iy) &\stackrel{\text{def}}{=} y && \text{\textit{Imaginärteil}} \text{ von } x + iy, \\ |x + iy| &= |x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2| && \text{\textit{Betrag}} \text{ von } x + iy, \\ (x + iy)^* &\stackrel{\text{def}}{=} x - iy && \text{zu } x + iy \text{ \textit{konjugiert komplexe} Zahl} \end{aligned}$$

(für  $x, y \in \mathbb{R}$ ) und die einfachen Regeln

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2} = +\Re(z^*), \quad (2.48)$$

$$\Im(z) = \frac{z - z^*}{2i} = -\Im(z^*), \quad (2.49)$$

$$(z^*)^* = z, \quad (2.50)$$

$$|z|^2 = z^* z, \quad (2.51)$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \quad (2.52)$$

$$(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^* = z_1^* \frac{z_2}{|z_2|^2} \quad (2.53)$$

sowie

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1, \\ z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3, \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \\ |1/z| &= 1/|z|, \\ \arg(z^*) &= -\arg z \pmod{2\pi} = \arg(1/z) \end{aligned}$$

benutzt. Abschließend sei noch auf folgende Gleichungen hingewiesen:

$$\Re\left((x_1 + iy_1)^* (x_2 + iy_2)\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\Im\left((x_1 + iy_1)^* (x_2 + iy_2)\right) = \text{3. Komponente von } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

**Warnung:** Man beachte, daß  $e^z$  mit  $z \in \mathbb{C}$  nur eine Kurzschreibweise für  $\exp(z)$ , den Wert der Exponentialfunktion an der Stelle  $z$  ist. Dagegen hat  $\lambda^z$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  i.a. nur für ganzzahliges  $z$  eine eindeutige natürliche Definition!

## Teil II

# Vektor-Analyse-Methoden





# Kapitel 3

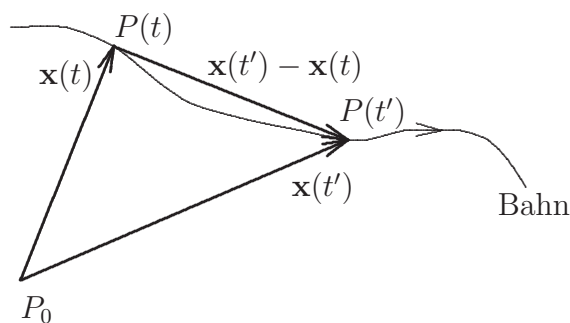
## Raumkurven

### 3.1 Bahnkurve eines Körperpunktes

#### 3.1.1 Beschreibung durch Vektorfunktionen

**Problem:** Die Position eines (etwa durch einen Farbtupfer) markierten Körperpunktes  $\underline{P}$  soll in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  beschrieben werden.

**Beschreibungsverfahren:** Man wählt ein festes Bezugssystem, in dem man die Vektorregeln für räumliche Translationen i.w. als gültig ansehen kann. In diesem Bezugssystem wählt man einen festen Bezugspunkt  $P_0$ . Dann beschreibt man den Aufenthaltsort  $P(t)$  von  $\underline{P}$  zur Zeit  $t$  durch Angabe des sog. Ortsvektors  $\mathbf{x}(t)$ , d.h. durch diejenige räumliche Translation, die von  $P_0$  aus zu diesem Ort führt:



Da ein noch so fein gekennzeichnete Körperpunkt ohnehin kein Punkt im mathematischen strengen Sinne ist, wird man in der Praxis die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  stetig wählen können, d.h.:

$P(t')$  liegt nahe bei  $P(t)$ , wenn  $t'$  nahe genug bei  $t$  liegt.

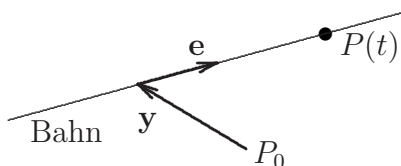
Mathematisch formuliert:

$\mathbf{x}(t)$  heißt (überall) **stetig**, falls zu jedem  $t$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit:<sup>1</sup>

$$|t - t'| < \delta \implies |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t')| < \epsilon.$$

### 3.1.2 Geradlinige Bewegung

Man sagt,  $\underline{P}$  führe eine **geradlinige Bewegung** (bzgl. des gewählten Bezugssystems) aus, falls die Positionen von  $\underline{P}$  nur mit Punkten einer festliegenden Geraden identifiziert werden:



Das ist (per Def. ) genau dann der Fall, wenn  $\mathbf{x}(t)$  von der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} + f(t)\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \neq 0, \quad (3.1)$$

ist. Die zugehörige Funktion  $f(t)$  nennt man stetig, falls  $\mathbf{x}(t)$  stetig ist.

Äquivalente Formulierung:

Eine Funktion  $f(t)$  heißt (überall) **stetig**, falls zu jedem  $t$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit:

$$|t - t'| < \delta \implies |f(t) - f(t')| < \epsilon.$$

**Anschauliche Konsequenz** der Stetigkeit für die geradlinige Bewegung:

$\underline{P}$  kann auf dem Wege von  $P(t)$  nach  $P(t')$  keinen Punkt der Verbindungsstrecke überspringen.

Die exakte Formulierung dieses Sachverhaltes beinhaltet der

#### Satz 3.1.1 (Zwischenwertsatz)

- Gegeben:
- (i) *stetige Funktion*  $f(t)$
  - (ii) *Zeitpunkte*  $t_1, t_2$
  - (ii) *reelle Zahl*  $f_0$  *zwischen*  $f(t_1)$  *und*  $f(t_2)$

Behauptung: *Es existiert*<sup>2</sup> *ein Zeitpunkt*  $t'$  *zwischen*  $t_1$  *und*  $t_2$  *mit*  $f(t') = f_0$ .

<sup>1</sup>Für  $\epsilon$  und  $\delta$  wird stillschweigend jeweils die passende physikalische Dimension vorausgesetzt.

**Beweisskizze:** O.B.d.A. kann  $f(t_1) \leq f(t_2)$  angenommen werden. Dafür sieht man leicht, daß

$$t' \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ t \in [t_1, t_2] : f(t) \geq f(t') \right\}$$

das kleinste  $t'$  mit der gewünschten Eigenschaft ist. ■

Ganz allgemein sieht man leicht:

### Lemma 3.1.2

- Gegeben: (i) Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$   
(ii) Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$

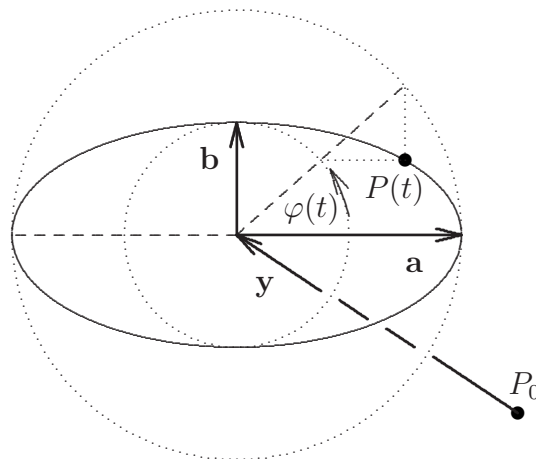
Behauptung:  $\mathbf{x}(t)$  ist genau dann stetig, wenn die drei Funktionen  $x^j(t)$  der Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$$

stetig sind.

### 3.1.3 Elliptische Bewegung

Man sagt,  $\underline{P}$  führe eine **elliptische Bewegung**<sup>3</sup> (bzgl. des gewählten Bezugssystems) aus, falls die Positionen von  $\underline{P}$  nur mit Punkten einer festliegenden Ellipse identifiziert werden:



Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Im Falle  $t_1 < t_2$ ,  $f(t_1) < f(t_2)$  ist z.B.  $t' \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{t \in (t_1, t_2) : f(t) < f_0\}$  ein solcher Zeitpunkt.

<sup>3</sup>Im Falle  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$  nennt man die Bewegung von  $\underline{P}$  **kreisförmig**.

Das ist genau dann der Fall, wenn räumliche Translationen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{y}$  und eine reellwertige Funktion  $\varphi(t)$  existieren mit<sup>4</sup>

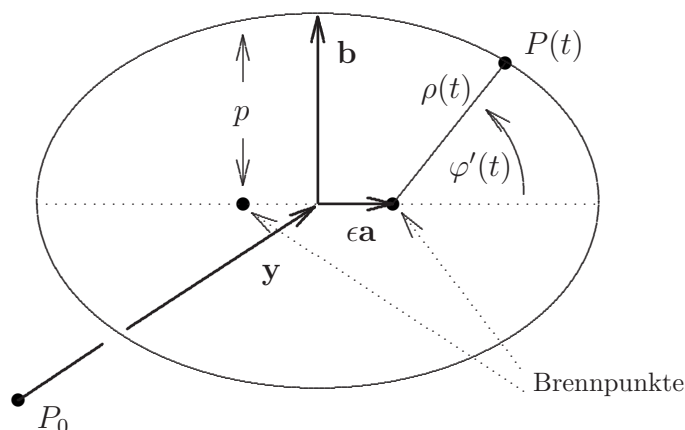
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} + \cos \varphi(t) \mathbf{a} + \sin \varphi(t) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}| > 0. \quad (3.2)$$

In diesem Falle ist die Stetigkeit der Bahnkurve äquivalent dazu, daß sich die—nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  bestimmte—Funktion  $\varphi(t)$  **stetig** wählen läßt.<sup>5</sup>

Aus dem Zwischenwertsatz folgt wieder im Falle der Stetigkeit, daß  $\underline{P}$  auf dem Wege von  $P(t)$  nach  $P(t')$  keinen Punkt des verbindenden Ellipsenstücks auslassen kann.

Im Hinblick auf das KEPLER-Problem ist es wichtig, die Ellipsengleichung auch in der **Polarform**

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} + \epsilon \mathbf{a} + \overbrace{\rho(t)}^{\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \cos \varphi'(t) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \sin \varphi'(t) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right)} \quad (3.3)$$



zu kennen, wobei

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2}}{|\mathbf{a}|} \quad (3.4)$$

die sog. **numerische Exzentrizität** bezeichnet. Die Exzentrizität ist so definiert, daß aus (3.2)

$$\rho(t) + |2\epsilon \mathbf{a} + \rho(t)| = 2|\mathbf{a}| \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Mit  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$  bzgl.  $\left\{ \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right\}$  gilt also für die elliptische Bewegung:

$$\left( \frac{\xi(t)}{|\mathbf{a}|} \right)^2 + \left( \frac{\eta(t)}{|\mathbf{b}|} \right)^2 = 1.$$

<sup>5</sup>Vgl. Lemma 3.1.

folgt.<sup>6</sup>

**Beweis:** Mit den Definitionen

$$\rho_{-}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(t), \quad \rho_{+}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(t) + 2\epsilon \rho(t)$$

folgt aus (3.2)

$$\begin{aligned} |\rho_{\pm}(t)|^2 &= |(\cos \varphi(t) \pm \epsilon) \mathbf{a} + \sin \varphi \mathbf{b}|^2 \\ &\stackrel{2.1.3.b}{=} (\cos^2 \varphi \pm 2\epsilon \cos \varphi) |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + \sin^2 \varphi |\mathbf{b}|^2 \\ &= \cos^2 \varphi \underbrace{(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)}_{\stackrel{2.1.3.b}{=} \epsilon^2 |\mathbf{a}|^2} + (1 \pm 2\epsilon \cos \varphi) |\mathbf{a}|^2 \\ &= (1 \pm \epsilon \cos \varphi)^2 |\mathbf{a}|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$|\rho_{\pm}(t)| = (1 \pm \epsilon \cos \varphi) |\mathbf{a}|.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Durch Vergleich von (3.3) und (3.2) ergibt sich die Bedingung

$$\left( \epsilon + \frac{\rho(t)}{|\mathbf{a}|} \cos \varphi'(t) \right)^2 + \left( \frac{\rho(t)}{|\mathbf{b}|} \sin \varphi'(t) \right)^2 = 1,$$

die offensichtlich (mit  $\rho(t) > 0$  nur) für

$$\boxed{\rho(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi'(t)} \quad \left( \epsilon < 1 \right)} \quad (3.5)$$

erfüllt ist,<sup>7</sup> wenn

$$\boxed{p = |\mathbf{b}|^2 / |\mathbf{a}|}. \quad (3.6)$$

den sog. **Halbparameter** bezeichnet.

Setzt man  $|\mathbf{b}|^2$  entspr. (3.6) in (3.4) ein und löst nach  $|\mathbf{a}|$  auf, so ergibt sich

$$|\mathbf{a}| = \frac{p}{1 - \epsilon^2}. \quad (3.7)$$

Die Stetigkeit von (3.3) ist äquivalent dazu, daß sich  $\varphi'(t)$  stetig wählen läßt.

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>Das entspricht der bekannten Darstellung der Ellipse als Kegelschnitt (vgl. z.B. REIDT-WOLFF, *Die Elemente der Mathematik, Kurzausgabe Oberstufe*, S. 137, Schöningh, Paderborn 1962).

<sup>7</sup>Wegen  $\epsilon^2 = 1 - (|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|)^2$  ist die Bedingung nämlich äquivalent zu

$$1 = \left( \frac{|\mathbf{a}| \rho}{|\mathbf{b}|^2} \right)^2 (1 - (\epsilon \cos \varphi')^2) + 2 \frac{|\mathbf{a}| \rho}{|\mathbf{b}|^2} \epsilon \cos \varphi'.$$

Die irrelevante Lösung ist  $\rho(t) = \frac{-p}{1 - \epsilon \cos \varphi'(t)}$ .

### 3.1.4 Parabolische Bewegung

Indem man einen Brennpunkt sowie den Halbparameter  $p$  festhält und den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 1$  (d.h.  $|\mathbf{a}| \rightarrow \infty$ ) betrachtet, erhält man die Polarform der allgemeinen Parabelgleichung (2. Ordnung)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}' + \overbrace{\frac{p}{1 + \cos \varphi'(t)} (\cos \varphi'(t) \mathbf{e} + \sin \varphi'(t) \mathbf{e}') }^{\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} } , \quad -\pi < \varphi'(t) < +\pi, \quad (3.8)$$

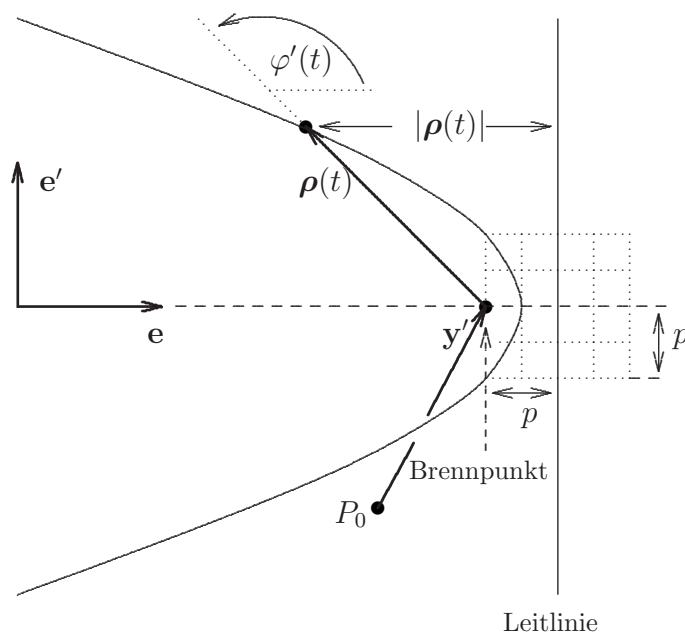
mit

$$\rho(t) = \frac{p}{1 + \cos \varphi'(t)}, \quad p > 0, \quad (3.9)$$

aus der sich

$$|\rho(t)| = p - \rho(t) \cdot \mathbf{e} \quad (3.10)$$

ergibt:



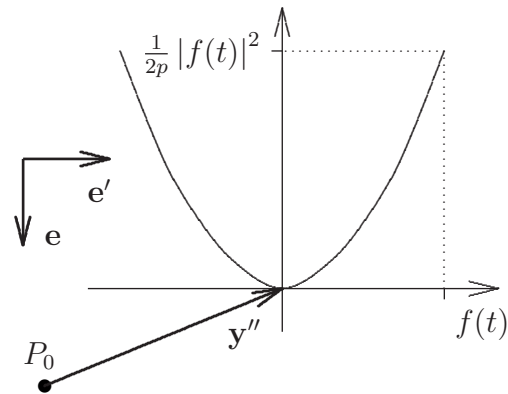
Entsprechend sagt, man  $\underline{P}$  führe eine **parabolische Bewegung** aus, falls die zugehörige Ortsvektorfunktion von der Form (3.8)/(3.9) ist.

Eine vielleicht bekanntere Form der Parabelgleichung ist:<sup>8</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}'' - \frac{1}{2p} |f(t)|^2 \mathbf{e} + f(t) \mathbf{e}'. \quad (3.11)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Die Äquivalenz zu (3.8) folgt aus  $\frac{p}{2} - \frac{p \cos \varphi'(t)}{1 + \cos \varphi'(t)} = \frac{p}{2} \frac{1 - \cos \varphi'(t)}{1 + \cos \varphi'(t)} = \frac{1}{2p} \left( \frac{p \sin \varphi'(t)}{1 + \cos \varphi'(t)} \right)^2$ .

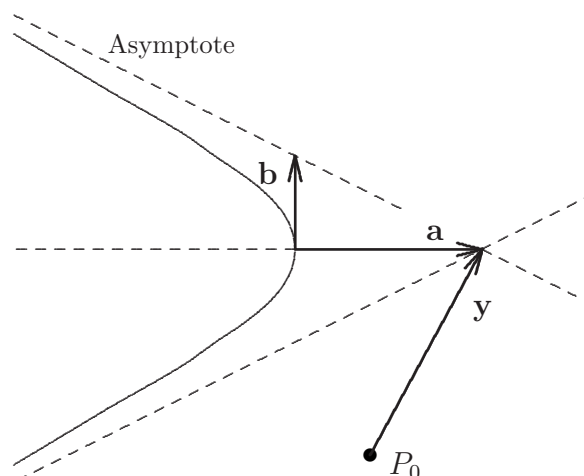


In dieser Darstellung ist die Stetigkeit von  $\mathbf{x}(t)$  äquivalent zur Stetigkeit von  $f(t)$ .

Es gilt wieder die entsprechende Folgerung aus dem Mittelwertsatz.

### 3.1.5 Hyperbolische Bewegung

Man sagt,  $\underline{P}$  führe eine **hyperbolische Bewegung** (bzgl. des gewählten Bezugssystems) aus, falls die Positionen von  $\underline{P}$  nur mit Punkten eines festliegenden Hyperbelzweigs identifiziert werden:



Das ist (per Def. ) genau dann der Fall, wenn räumliche Translationen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{y}$  und eine Funktion  $f(t)$  existieren mit:<sup>9</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} - \cosh f(t) \mathbf{a} + \sinh f(t) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0 \neq |\mathbf{b}|. \quad (3.12)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Dementsprechend bezeichnet man

$$\sinh \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(\lambda) - \exp(-\lambda)}{2} \quad \text{resp.} \quad \cosh \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(\lambda) + \exp(-\lambda)}{2}$$

als **Hyperbelsinus** resp. **Hyperbelkosinus**. Diese Funktionen genügen der Gleichung

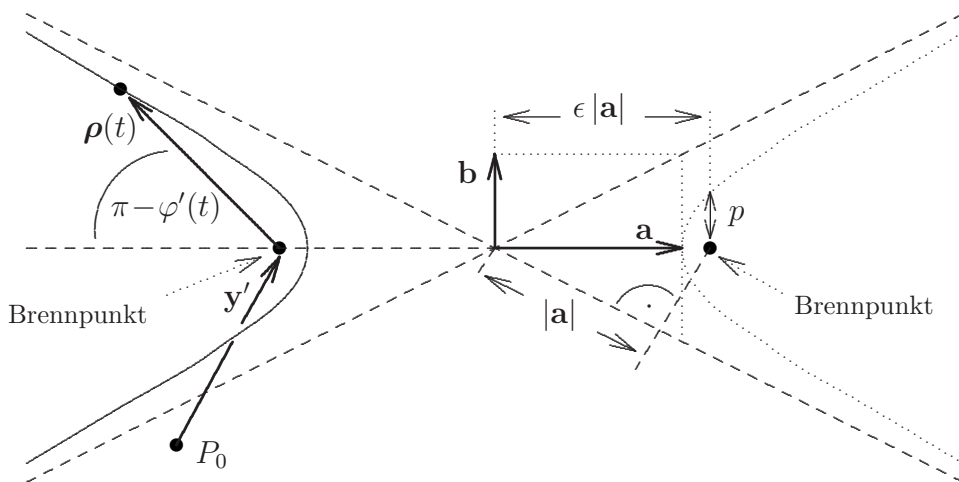
$$(\cosh \lambda)^2 - (\sinh \lambda)^2 = 1.$$

Im Hinblick auf das KEPLER-Problem ist es wieder wichtig, die entsprechende Polarform

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{y} - \epsilon \mathbf{a}}_{\mathbf{y}' \stackrel{\text{def}}{=} } + \overbrace{\rho(t) \left( \cos \varphi'(t) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \sin \varphi'(t) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right)}^{\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} } \quad (3.13)$$

zu kennen, wobei

$$-\pi + \arctan \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} < \varphi'(t) < +\pi - \arctan \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$



Mit<sup>10</sup>

$$\epsilon = \frac{\sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}}{|\mathbf{a}|} \quad (3.14)$$

ergibt sich durch Vergleich von (3.13) und (3.12)

$$\left( -\epsilon + \frac{\rho(t)}{|\mathbf{a}|} \cos \varphi'(t) \right)^2 - \left( \frac{\rho(t)}{|\mathbf{b}|} \sin \varphi'(t) \right)^2 = 1$$

und daraus

$$\rho(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi'(t)}, \quad \left( \epsilon \stackrel{(3.14)}{>} 1 \right), \quad (3.15)$$

Version vom 26. März 2009

Mit  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$  bzgl.  $\left\{ \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right\}$  gilt also für die hyperbolische Bewegung:

$$\left( \frac{\xi(t)}{|\mathbf{a}|} \right)^2 - \left( \frac{\eta(t)}{|\mathbf{b}|} \right)^2 = 1.$$

<sup>10</sup>Mit (3.14), (3.13) und (3.12) gilt, der Darstellung der Hyperbel als Kegelschnitt entsprechend:

$$|\rho(t) - 2\epsilon\mathbf{a}| - |\rho(t)| = 2|\mathbf{a}|.$$



wieder mit dem Halbparameter<sup>11</sup>

$$p = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|}. \quad (3.16)$$

Setzt man  $|\mathbf{b}|^2$  entspr. (3.16) in (3.14) ein und löst wieder nach  $|\mathbf{a}|$  auf, so ergibt sich nun

$$|\mathbf{a}| = \frac{-p}{1 - \epsilon^2}. \quad (3.17)$$

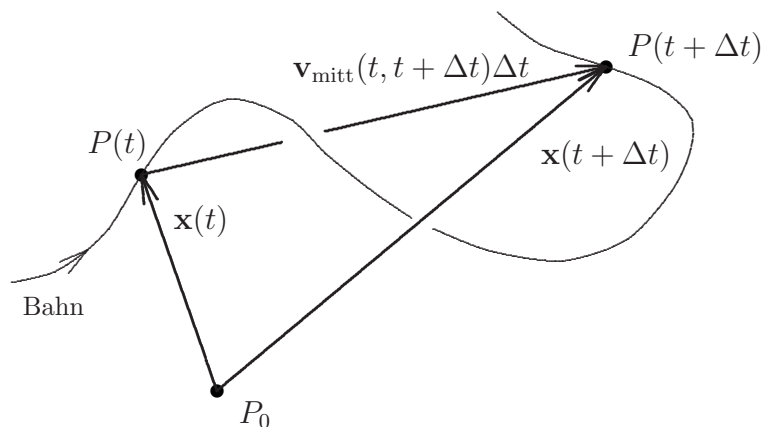
Die Stetigkeit von (3.13) ist äquivalent zur Stetigkeit von  $\varphi'(t)$ .

## 3.2 Geschwindigkeit eines Körperpunktes

### 3.2.1 Mittlere Geschwindigkeit

Sei  $\underline{P}$  wieder ein Körperpunkt, dessen Position zur Zeit  $t$  jeweils mit dem Raumpunkt  $P(t)$  (bzgl. eines festen Bezugssystems entspr. 3.1.1) identifiziert werde.

Als *mittlere Geschwindigkeit* von  $\underline{P}$  während des Zeitintervalls  $[t, t + \Delta t]$  bezeichnet man diejenige **gleichförmige** (nur solche wurden in 1.1.3 betrachtet) Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{mitt.}}(t, t + \Delta t)$ , mit der man von  $P(t)$  aus nach der Zeitdauer  $\Delta t$  den Punkt  $P(t + \Delta t)$  erreicht:



Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Die zweite, der Kegelschnitt-Bedingung

$$|\boldsymbol{\rho}(t)| - |\boldsymbol{\rho}(t) - 2\epsilon\mathbf{a}| = 2|\mathbf{a}|$$

entsprechende, Lösung ist

$$\rho(t) = -\frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi'(t)}.$$

Sie beschreibt den zweiten Hyperbelast (gepunktete Kurve) und ist für die sog. RUTHERFORD-Streuung wichtig.

Äquivalente Definition:

$$\mathbf{v}_{\text{mitt.}}(t, t + \Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}, \quad (3.18)$$

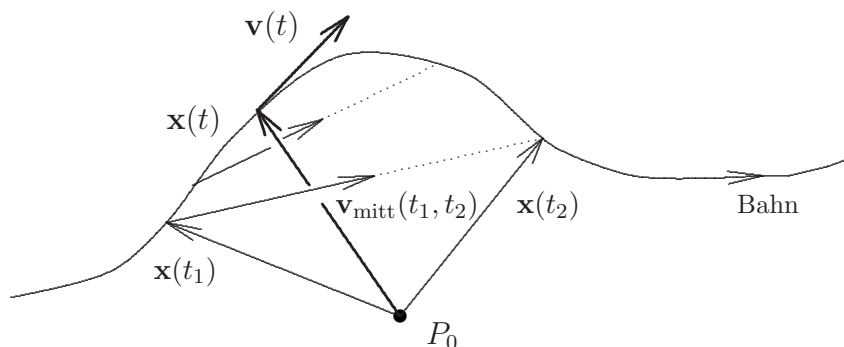
wobei  $\mathbf{x}(t)$  wieder den Ortsvektor von  $\underline{P}$  zur Zeit  $t$  bezeichnet. Die mittlere Geschwindigkeit ist natürlich **nicht** vom Bezugspunkt, wohl aber vom Bezugssystem abhängig.

### 3.2.2 Momentangeschwindigkeit

In der Praxis wird man die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  sogar differenzierbar voraussetzen können d.h.:

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  existiert ein Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(t)$ , die sog. **Momentangeschwindigkeit** von  $\underline{P}$  zum Zeitpunkt  $t$ , mit<sup>12</sup>

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' \neq t}} \frac{\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t)}{t' - t}. \quad (3.19)$$



Eine gewöhnliche Funktion  $f(t)$  nennt man (überall) differenzierbar, wenn die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  der geradlinigen Bewegung (3.1) mit bel.  $\mathbf{y}, \mathbf{e}$  differenzierbar ist. Äquivalente Formulierung:

Eine Funktion  $f(t)$  heißt (überall) **differenzierbar**, falls zu jedem  $t$  der Grenzwert

$$\dot{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' \neq t}} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \quad (3.20)$$

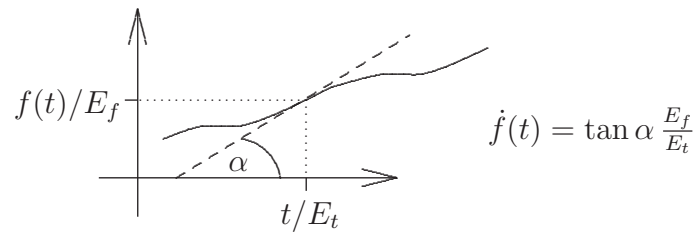
Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>Präzise formuliert, meint (3.19): Zu jedem  $t$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit:

$$0 \neq |t' - t| < \delta \implies \left| \mathbf{v}(t) - \frac{\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t)}{t' - t} \right| < \epsilon.$$

Die Schreibweise  $\dot{f}$  für  $\frac{d}{dt}f$  stammt von NEWTON (Sommerfeld, 1964, Seite 5).

existiert, den man dann als die **Ableitung**  $f(t)$  an der Stelle  $t$  bezeichnet.



Mit dieser Definition gilt:

### Lemma 3.2.1

- Gegeben: (i) Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$   
(ii) Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$

Behauptung:  $\mathbf{x}(t)$  ist genau dann differenzierbar, wenn die drei Funktionen  $x^j(t)$  der Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$$

differenzierbar sind. Im Falle der Differenzierbarkeit gilt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}.$$

Anschauliche Konsequenz der Differenzierbarkeit für die **geradlinige** Bewegung (3.1):

In jedem Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  muß mindestens ein Zeitpunkt  $t'$  liegen, für den  $\mathbf{v}(t') = \mathbf{v}_{\text{mitt.}}(t_1, t_2)$  gilt.

Exakte mathematische Formulierung:

### Satz 3.2.2 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

- Gegeben: (i) differenzierbare Funktion  $f(t)$   
(ii) Zeitpunkte  $t_1, t_2$

Behauptung: Es existiert mindestens ein Zeitpunkt  $t'$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  mit

$$\dot{f}(t') = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

**Beweisskizze:** Da

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t) - \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} (t - t_1)$$

die Eigenschaften  $g(t_2) = g(t_1) = 0$  und

$$\dot{g}(t) = 0 \iff \dot{f}(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

besitzt, genügt der Nachweis des Satzes von ROLLE, d.h. der Beweis von Satz 3.2.2 für  $f(t_2) = f(t_1) = 0$  :

Für konstantes  $f$  ist nichts zu beweisen. Wenn  $f$  nicht konstant ist, dann muß, weil  $f$  stetig ist, eine Stelle im Inneren des Intervalls zwischen  $t_1$  und  $t_2$  existieren, an der die Funktion entweder ihr Maximum oder ihr Minimum (bzgl. des abgeschlossenen Intervalls) annimmt. An einer solchen Stelle haben aber links- und rechtsseitige Ableitung unterschiedliches Vorzeichen, müssen also verschwinden, um entsprechend der Differenzierbarkeitsbedingung gleich zu sein. ■

**Warnung:** Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt **nicht** für Vektorfunktionen.<sup>13</sup>

### 3.2.3 Differentiationsregeln

Die wichtigsten Differentiationsregeln (unter offensichtlichen Voraussetzungen) sind:

1. **Linearität** der Zuordnung  $f(t) \rightarrow \dot{f}(t)$ , d.h.:

$$\frac{d}{dt} (\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \dot{f}(t) + \beta \dot{g}(t), \quad (3.21)$$

2. **Produktregel:**

$$\frac{d}{dt} (f(t) g(t)) = \dot{f}(t) g(t) + f(t) \dot{g}(t), \quad (3.22)$$

3. **Quotientenregel:**

$$\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\dot{f}(t) g(t) - f(t) \dot{g}(t)}{(g(t))^2}, \quad (3.23)$$

4. **Kettenregel:**<sup>14</sup>

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \dot{g}(t) \dot{f}(t')|_{t'=g(t)}, \quad (3.24)$$

<sup>13</sup>Z.B. ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung der Betrag der mittleren Geschwindigkeit stets echt kleiner als der (konstante) Betrag der Momentangeschwindigkeit.

<sup>14</sup>Hier muß  $g(t)$  natürlich zeitwertig sein, wenn  $f$  eine Funktion der Zeit ist.

5. Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{d}{dt}f^{-1}(t) = \frac{1}{\dot{f}(f^{-1}(t))}. \quad (3.25)$$

**Anmerkung:** Für Variablen  $\xi$  beliebig festgelegter physikalischer Dimension und Funktionen  $f$  davon definiert man entsprechend:

$$f'(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\xi} f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \xi' \neq \xi}} \frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi}.$$

Dann gilt z.B. die entsprechende Kettenregel

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \dot{g}(t) f'(g(t))$$

für differenzierbares  $g$  entsprechender physikalischer Dimension.

Aus den Regeln (3.21)–(3.24) folgen mit Lemma 3.2.1 und (2.14), (2.15) folgende Regeln für die Differentiation von Vektorfunktionen:

$$\frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{x}(t) + \beta \mathbf{y}(t)) = \alpha \dot{\mathbf{x}}(t) + \beta \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt}(g(t) \mathbf{x}(t)) = \dot{g}(t) \mathbf{x}(t) + g(t) \dot{\mathbf{x}}(t), \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{x}(t)}{g(t)} \right) = \frac{g(t) \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{g}(t) \mathbf{x}(t)}{(g(t))^2}, \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(g(t)) = \dot{g}(t) \dot{\mathbf{x}}(t')|_{t'=g(t)}. \quad (3.31)$$

**Spezielle Ableitungen:**

(i) Aus<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} t_2^j - t_1^j &= \sum_{\nu=0}^{j-1} t_2^{j-\nu} t_1^\nu - \underbrace{\sum_{\nu=1}^j t_2^{j-\nu} t_1^\nu}_{=\sum_{\nu=1}^{j-1} t_2^{j-1-\nu} t_1^{\nu+1}} \\ &= (t_2 - t_1) \sum_{\nu=0}^{j-1} t_2^{j-1-\nu} t_1^\nu \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{d}{dt} t^j = j t^{j-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots\}. \quad (3.32)$$

(ii) Sei  $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$  mit Koeffizienten  $c_j$ , die für  $j \rightarrow \infty$  hinreichend schnell gegen Null konvergieren. Dann folgt aus der Linearitätseigenschaft:

$$\dot{f}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{d}{dt} t^j \stackrel{(3.32)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} j c_j t^{j-1}.$$

(iii) Angewandt auf  $f(\lambda) = e^\lambda$  liefert (ii) mit (2.42):

$$\frac{d}{d\lambda} e^\lambda = e^\lambda \quad (3.33)$$

für reelle, physikalisch dimensionslose  $\lambda$ .

(iv) Entsprechend ergibt sich

$$\frac{d}{d\lambda} \sin \lambda = \cos \lambda, \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \cos \lambda = -\sin \lambda. \quad (3.35)$$

(v) Für die durch

$$\ln(e^{\lambda'}) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

implizit gegebene Umkehrfunktion der Exponentialfunktion folgt aus (3.33) und (3.25)

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \lambda = \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0. \quad (3.36)$$

<sup>15</sup>Hier ist die hochgestellte Zahl jeweils ein Exponent, kein Index.

(vi) Mit

$$\lambda^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln \lambda} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \lambda > 0,$$

(für ganzzahliges  $\alpha$  die übliche Potenz von  $\lambda$ ) ergibt sich mit (3.33), (3.36) und (3.24) in (partieller) Verallgemeinerung von (3.32):

$$\frac{d}{d\lambda} \lambda^\alpha = \alpha \lambda^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \lambda > 0. \quad (3.37)$$

### 3.2.4 Anwendungsbeispiel (harmonische Schwingung)

Eine Bewegung der Form<sup>16</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} + \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{a} + \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad 0 < |\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}| \geq 0 \quad (3.38)$$

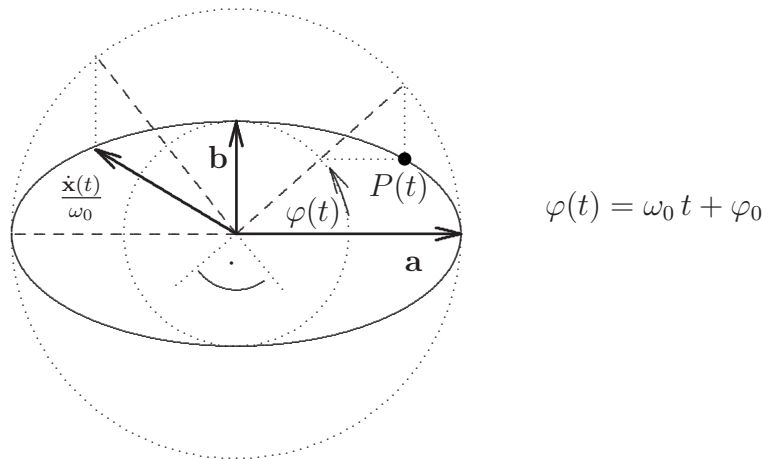
bezeichnet man als eine *harmonische Schwingung*.

Nach (3.34), (3.35) und Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} \sin \varphi(t) = \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), \quad \frac{d}{dt} \cos \varphi(t) = -\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t). \quad (3.39)$$

Die zu (3.38) gehörige Momentangeschwindigkeit ist also:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \omega_0 \left( -\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{a} + \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{b} \right). \quad (3.40)$$



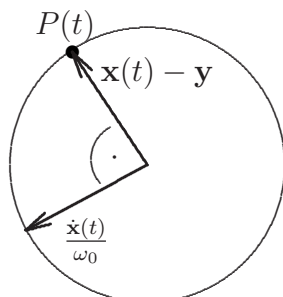
Man erkennt sofort:

$$\max_t \left| \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\omega_0} \right| = |\mathbf{a}|, \quad \min_t \left| \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\omega_0} \right| = |\mathbf{b}|.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>16</sup>Die Bewegung ist also im Falle  $|\mathbf{b}| > 0$  elliptisch (evtl. sogar kreisförmig), im Falle  $|\mathbf{b}| = 0$  linear.

Im Falle  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  bezeichnet man die harmonische Schwingung als **gleichförmige Kreisbewegung** zur **Kreisfrequenz**  $\omega_0$ :



Hier werden die Differentiationsregeln (3.39) anschaulich!

Im Falle  $\mathbf{b} = 0$  nennt man die harmonische Schwingung **linear**, im Falle  $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$  **elliptisch**.

### 3.3 Beschleunigung eines Körperpunktes

#### 3.3.1 Definitionen und einfache Beispiele

Sei  $\underline{P}$  wieder ein Körperpunkt, dessen Bahnkurve im Sinne von 3.1.1 durch die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  beschrieben werde. Dabei sei jetzt  $\mathbf{x}(t)$  **2-mal differenzierbar** vorausgesetzt, d.h. zusätzlich zu  $\mathbf{x}(t)$  sei auch  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  differenzierbar. Dann bezeichnet man

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}(t)$$

als die (Momentan-) **Beschleunigung** von  $\underline{P}$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Die Projektion<sup>17</sup>  $\ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t)$  von  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  auf die **Bahntangente** zur Zeit  $t$  (=Gerade durch  $P(t)$  parallel  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ) bezeichnet man als die **Bahnbeschleunigung** von  $\underline{P}$  zum Zeitpunkt  $t$ . Die zu  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  senkrechte Komponente  $\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\mathbf{x}}(t) - \ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t)$  von  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  bezeichnet man als die **Normalbeschleunigung** von  $\underline{P}$  zum Zeitpunkt  $t$ . In Formeln:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t)}_{\text{Bahnbeschl.}} + \underbrace{\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t)}_{\text{Normalbeschl.}}, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t) \propto \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad (3.41)$$

<sup>17</sup>Vgl. Lemma 2.1.5.



Man sieht sofort (für  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$ ):<sup>18</sup>

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t) = \left( \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \right) \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}, \quad (3.42)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)| \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}. \quad (3.43)$$

### Beispiele

(i) Allgemeine Kreisbewegung:

Die Ortsvektorfunktion einer allgemeinen Kreisbewegung ist von der Form

$$\mathbf{x}(t) = R \left( \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \right).$$

Durch Differentiation folgt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = R \dot{\varphi}(t) \left( \sin \left( \varphi(t) + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \cos \left( \varphi(t) + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_2 \right)$$

und somit

$$|\dot{\varphi}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}{R}.$$

Erneute Differentiation liefert

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{R \ddot{\varphi}(t) \left( \sin \left( \varphi(t) + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \cos \left( \varphi(t) + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_2 \right)}_{\ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t)} \\ &\quad + \underbrace{R \left( \dot{\varphi}(t) \right)^2 \left( \sin \left( \varphi(t) + \pi \right) \mathbf{e}_1 + \cos \left( \varphi(t) + \pi \right) \mathbf{e}_2 \right)}_{\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t)} \end{aligned}$$

und damit

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\perp} = - \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2}{R} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}. \quad (3.44)$$

Daher bezeichnet man allgemein

$$\frac{1}{\rho(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2} = \left| \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \right|$$

als (erste) **Krümmung** und  $\rho(t)$  als **Krümmungsradius** der Bahnkurve im Punkte  $P(t)$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>18</sup>Daß sich (3.42) und (3.43) zu  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  aufsummieren, erkennt man durch Anwendung der Produktregel auf  $\frac{d}{dt} \left( |\dot{\mathbf{x}}(t)| \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \right) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Daß (3.43) senkrecht zu  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  ist, folgt entspr. durch Differentiation von  $\left( \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \right) = 1$ .

(ii) Abrupter Krümmungswechsel:

Beim direkten Übergang von einer geraden in eine Kreisbahn ändert sich der Krümmungsradius abrupt (von  $\infty$  auf den Kreisradius). Das ist der Grund für den Ruck den Spielzeugeisenbahnen am Anfang (und Ende) jeder Schienenkurve erfahren.

(iii) Harmonische Schwingung um  $P_0$ :

Die Ortsvektorfunktion der harmonischen Schwingung ist von der Form

$$\mathbf{x}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{a} + \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{b}.$$

Nach (3.39) und (3.40) ist also die zugehörige Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -|\omega_0|^2 \mathbf{x}(t) \quad \left( \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} \ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) \right). \quad (3.45)$$

Die Hilfskreise der Ellipsenkonstruktion sind i.a. natürlich **nicht** geeignete Bahnapproximationen in den entsprechenden Berührungspunkten:

$$\mathbf{x}(t) = \pm \mathbf{a} \implies \rho(t) = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|},$$

$$\mathbf{x}(t) = \pm \mathbf{b} \implies \rho(t) = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{b}|}.$$

### Anmerkungen:

- (i) Die Darstellungen (3.42), (3.43), (3.44) gelten natürlich nur für Zeiten  $t$  mit  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$ .
- (ii) Alle mathematischen Überlegungen übertragen sich ohne weiteres auf den Fall, daß die Bahnpunkte einem anderen Parameter  $s$  statt der Zeit  $t$  zugeordnet werden. Nimmt man für  $s$  die längs der Bahn (von einem Ausgangspunkt aus) zurückgelegte Wegstrecke, so spricht man vom **Bahntangentenvektor** statt von der Momentangeschwindigkeit.
- (iii) Alle Überlegungen gelten natürlich auch bei Beschränkung auf ein endliches Zeitintervall  $I$ , wenn  $\mathbf{x}(t)$  nur in einer Umgebung von  $I$  bekannt ist—man denke sich einfach  $\mathbf{x}(t)$  außerhalb  $I$  für alle  $t$  fortgesetzt (gutartig, aber sonst beliebig).

### 3.3.2 Eindeutige Bestimmtheit der Bahnkurve durch Beschleunigung und Anfangsbedingungen

Mit dem Stichwort **Anfangsbedingungen** bezeichnen wir (wie in 3.2.4) stets die Vorgabe von Ortsvektor (bzgl.  $P_0$ ) und Momentangeschwindigkeit zu einem gegebenen ‘Anfangs’-Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.46)$$

Intuitiv ist klar, daß zwei verschiedene Bahnbewegungen, deren Momentangeschwindigkeiten zu **jedem** Zeitpunkt übereinstimmen, sich nur durch eine feste Translation unterscheiden können, d.h.:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \forall t \implies \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \text{ unabhängig von } t. \quad (3.47)$$

Aus Lemma 3.2.1 erkennt man, daß (3.47) äquivalent ist zu:

**Lemma 3.3.1** Für differenzierbare Funktionen  $f_1(t), f_2(t)$  mit

$$\dot{f}_1(t) = \dot{f}_2(t) \forall t$$

existiert stets eine Konstante  $C$  mit

$$f_1(t) = f_2(t) + C \quad \forall t.$$

**Beweisskizze:** Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und aufgrund der Linearität (3.21) der Differentiation gilt

$$(f_1(t) - f_2(t)) - \underbrace{(f_1(0) - f_2(0))}_{\stackrel{\text{def } C}{=}} \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=} \underbrace{(\dot{f}_1(t') - \dot{f}_2(t'))}_{=0} t$$

für geeignetes  $t' \in [0, t]$ . ■

Wendet man (3.47) auf  $\ddot{\mathbf{x}}$  anstelle von  $\dot{\mathbf{x}}$  an, so ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{x}}_1(t) = \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \forall t \implies \dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) \text{ unabhängig von } t. \quad (3.48)$$

**Folgerung:** Zwei Bahnbewegungen stimmen überein, wenn sie gleiche Anfangsbedingungen erfüllen und ihre Beschleunigungen zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen, d.h.:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{x}}_1(t) = \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \forall t \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_2(t_0) \\ \mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{x}_2(t_0) \end{array} \right\} \implies \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \forall t. \quad (3.49)$$

In der Praxis ist es natürlich ebenso wichtig, zu vorgegebenen Anfangsbedingungen (3.46) und zu vorgeg.  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  die Bahnkurve konkret zu **bestimmen**. Dazu untersuchen wir zunächst das folgende vereinfachte

**Problem:** Von einer differenzierbaren Funktion  $f(t)$  sei die Ableitung  $\dot{f}(t)$  bekannt und stetig.<sup>19</sup> Außerdem sei der Wert  $f(t_0)$  bekannt. Man bestimme  $f(t)$  für alle  $t > t_0$ .

**Lösung:** Für festes  $t > t_0$  und eine Unterteilung

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$$

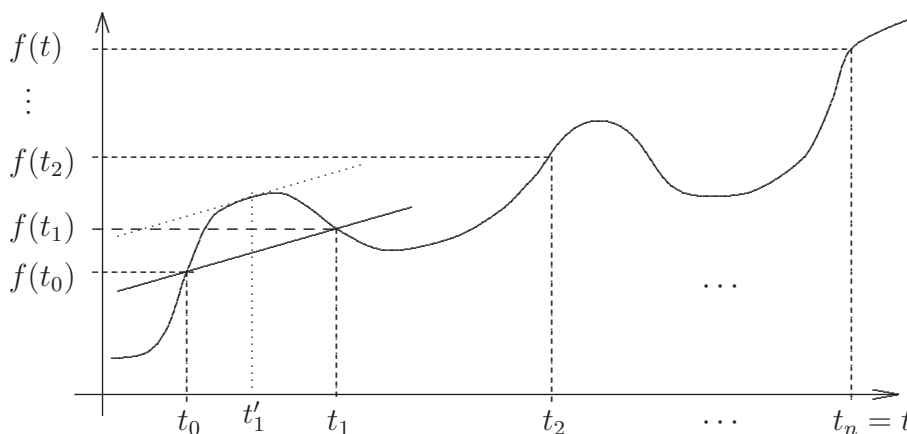
des Intervalls  $[t_0, t]$  gilt

$$f(t) - f(t_0) = \sum_{\nu=1}^n (f(t_\nu) - f(t_{\nu-1}))$$

und somit nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f(t) - f(t_0) = \sum_{\nu=1}^n \dot{f}(t'_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}) \quad (3.50)$$

mit geeigneten  $t'_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$ :



Mit feiner werdender Intervallunterteilung wird es immer unwesentlicher, welche  $t'_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$  man in (3.50) einsetzt; denn:

### Lemma 3.3.2

- Gegeben: (i) *stetige Funktion*  $g(t)$   
(ii) *Zeitintervall*  $[t_0, \bar{t}]$

Version vom 26. März 2009

<sup>19</sup>Die Stetigkeit von  $\dot{f}(t)$  ist nicht selbstverständlich, wie das Beispiel  $f(t) = t^2 \sin(t_0/t)$  zeigt.

Behauptung:  $g(t)$  ist **gleichmäßig stetig** auf  $[t_0, \bar{t}]$ , d.h. zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit:

$$\left. \begin{array}{l} t', t'' \in [t_0, \bar{t}] \\ |t' - t''| < \delta \end{array} \right\} \implies |g(t') - g(t'')| < \epsilon.$$

### Folgerung 3.3.3

Gegeben: (i)  $g(t), t_0, \bar{t}$  wie in Lemma 3.3.2  
(ii)  $\epsilon > 0$

Behauptung: Es existiert ein  $\delta > 0$  derart, daß für jede Intervalleinteilung  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = \bar{t}$  mit

$$|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta \text{ für } \nu = 1, \dots, n$$

( $n$  beliebig) und für jede Auswahl  $t'_\nu, t''_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$

$$\epsilon |t_0 - t| \geq \left| \sum_{\nu=1}^n g(t'_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}) - \sum_{\nu=1}^n g(t''_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}) \right|$$

gilt.

Zumindest für stetige  $g(t) = \dot{f}(t)$  gilt also:<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t g(t') dt' &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{t_0 < t_1 < \dots < t_n = t \\ t_\nu - t_{\nu-1} < \delta}} \sum_{\nu=1}^n \sup_{t'_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]} g(t'_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\substack{t_0 < t_1 < \dots < t_n = t \\ t_\nu - t_{\nu-1} < \delta}} \sum_{\nu=1}^n \inf_{t'_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]} g(t'_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}) \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$= f(t) - f(t_0) \text{ für } g = \dot{f}. \quad (3.52)$$

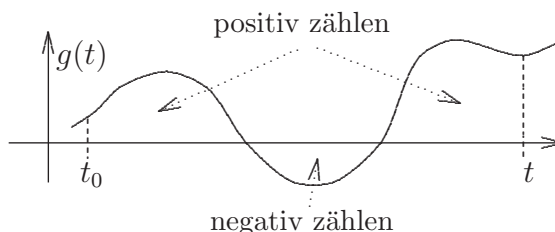
Allgemein nennt man eine Funktion  $g(t)$  **RIEMANN-integrierbar** (über  $[t_0, t]$ ), wenn in (3.51) beide Grenzwerte existieren und übereinstimmen. Den mit  $\int_{t_0}^t g(t') dt'$  bezeichneten Grenzwert nennt man dann das bestimmte **RIEMANN-Integral** von  $g$  über  $[t_0, t]$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>20</sup>Für jede stetige Funktion  $g(t)$  ist das bestimmte RIEMANN-Integral  $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t g(t') dt'$  (zu festem  $t_0$ ) eine **Stammfunktion** von  $g(t)$ , d.h. es gilt  $g(t) = \dot{f}(t)$  — wie in der *Hauptsatzkantate* von Friedrich Wille (Wille, 1992) besungen.

**Anmerkungen:**

1. Das Integral  $\int_{t_0}^t g(t') dt'$  läßt sich offensichtlich anschaulich als ‘Flächeninhalt’ deuten:



2. Die (hier nicht in dieser Allgemeinheit begründete) Aussage

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t g(t') dt' = g(t)$$

für RIEMANN-integrierte Funktionen  $g$ , die an der betrachteten Stelle  $t$  stetig sind, wird als **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bezeichnet.<sup>21</sup>

3. Bzgl. anderer Integralbegriffe siehe Kapitel 2 von (Lücke, fuan).

Mit der üblichen Definition

$$\int_{t_0}^t g(t') dt' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} - \int_t^{t_0} g(t') dt' & \text{für } t < t_0 \\ 0 & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

bleibt der Hauptsatz auch für  $t \leq t_0$  gültig!

Konsistent mit den bisherigen Ausführungen ist die — gemäß Lemma 3.3.1 erlaubte — Definition des sog. **NEWTON-Integrals**<sup>22</sup>

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} F(t_2) - F(t_1),} \quad (3.53)$$

**falls**  $F'(t) = f(t) \quad \forall t \in [\min\{t_1, t_2\}, \max\{t_1, t_2\}]$ ,

auf die wir uns im Folgenden beschränken wollen.

Version vom 26. März 2009

<sup>21</sup>Aber selbst für stetige Funktionen läßt sich die Stammfunktion nicht immer mithilfe elementarer Funktionen ausdrücken. Das ist z.B. für die Funktion  $\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}$  der Fall, deren bei 0 verschwindende Stammfunktion man als **Integralsinus** bezeichnet.

<sup>22</sup>Bzgl. der Verallgemeinerung auf Mehrfachintegrale siehe (Mutze, 2004).

### 3.3.3 Eigenschaften des Integrals und Konsequenzen für das Anfangswertproblem

Das Integral besitzt offensichtlich die Linearitätseigenschaft

$$\int_{t_0}^t (\alpha g_1(t') + \beta g_2(t')) dt' = \alpha \int_{t_0}^t g_1(t') dt' + \beta \int_{t_0}^t g_2(t') dt' \quad (3.54)$$

sowie die Additivitätseigenschaft

$$\int_{t_1}^{t_3} g(t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} g(t') dt' + \int_{t_2}^{t_3} g(t') dt' \quad \forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \quad (3.55)$$

hinsichtlich der Integrationswege. Außerdem folgt aus (3.51) (für  $t_1 < t_2$ )

$$\begin{aligned} h(t) &\geq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \\ \implies \inf_{t' \in [t_1, t_2]} g(t) \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} g(t)h(t) dt \leq \sup_{t' \in [t_1, t_2]} g(t') \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt \end{aligned} \quad (3.56)$$

und somit aufgrund des gewöhnlichen Mittelwertsatzes (für  $g(t)$ ):

#### Satz 3.3.4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

- Gegeben:
- (i) Zeitpunkte  $t_1 < t_2$
  - (ii) stetige Funktion  $g(t)$
  - (iii) **nichtnegative** RIEMANN-integrable Funktion  $h(t)$

Behauptung:  $\int_{t_1}^{t_2} g(t)h(t) dt = g(t') \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt$  für geeign.  $t' \in [t_1, t_2]$

Hieraus erkennt man (mit (3.54), (3.55)) z.B. die **stetige** Abhängigkeit des Integrals  $\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$  vom **Integranden**  $g(t)$  sowie von den Integrationsgrenzen  $t_1, t_2$ .

Für differenzierbares  $\mathbf{x}(t)$  ergibt sich mit der (3.53) entsprechenden Definition

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t') dt \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)} \quad (3.57)$$

für jede Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  gemäß (3.53) und Lemma 3.2.1:

$$\int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^1(t) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^3(t) dt \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}, \quad (3.58)$$

$$\text{wobei: } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}.$$

(3.57) auf  $\dot{\mathbf{x}}$  anstelle von  $\mathbf{x}$  angewandt liefert

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^t \ddot{\mathbf{x}}(t') dt'.$$

Setzt man das in (3.57) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \dot{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^t \ddot{\mathbf{x}}(t') dt' \right) dt$$

und daraus schließlich:

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_1) + (t_2 - t_1) \dot{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{t_1}^t \ddot{\mathbf{x}}(t') dt' \right) dt. \quad (3.59)$$

Mit o.a. Stetigkeitseigenschaften des Integrals erkennt man hieraus:

Man muß  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t')$  für  $t \in [t_0, t]$  nicht genau kennen, um  $\mathbf{x}(t)$  näherungsweise zu bestimmen.

**Anmerkung:** Analoge Definitionen und Resultate gelten natürlich auch für Integrationsvariable anderer physikalischer Dimension. Dementsprechend gilt z.B.

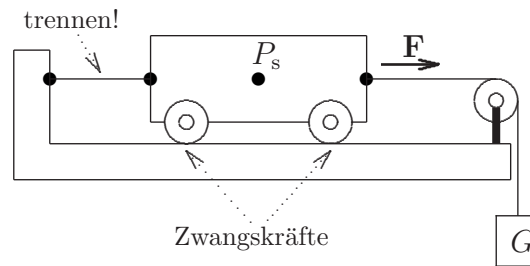
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f'(\xi) d\xi = f(\xi_1) - f(\xi_2)$$

im Sinne der Anmerkung zu den Differentiationsregeln in 3.2.3.

### 3.3.4 Die NEWTONSche Bewegungsgleichung

**Idealisiertes Experiment (in *Inertialsystemen*):** Ein starrer Körper  $\mathcal{K}$  mit dem Schwerpunkt  $\underline{P}_s$  (vgl. 2.2.3) werde durch die äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n, -\mathbf{F}$  in Ruhe gehalten. Dann werde als **einziger** experimenteller Eingriff die Wirkung der Kraft  $-\mathbf{F}$  ausgeschaltet.



**Beispiel:**

Hier müssen insbesondere folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- (i) Masse von  $G \ll$  Wagenmasse (wenn man nicht  $G$  zum Wagen zählt),
- (ii) Rollwiderstand vernachlässigbar,
- (iii) Bahn waagrecht,
- (iv) Seile entlang der Waagerechten (durch den Wagenschwerpunkt) gespannt,
- (v) Radmassen vernachlässigbar.

**Idealisiertes Beobachtungsergebnis:**

Die durch den experimentellen Eingriff bewirkte Momentanbeschleunigung von  $\underline{P}_s$  aus der Ruhelage ist für  $\mathcal{K}$  stets proportional zu  $\mathbf{F}$ .

Die entsprechende, für  $\mathcal{K}$  charakteristische, Proportionalitätskonstante  $m$  bezeichnet man als **träge (Ruhe-) Masse**<sup>23</sup> von  $\mathcal{K}$ :<sup>24</sup>

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{F} \quad \text{für } \dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0.$$

Der Begriff der Kraft auf einen Körper in **beliebigem** Bewegungszustand ist äußerst problematisch.<sup>25</sup>

Für diese Vorlesung sei angenommen, dieser Begriff sei in befriedigender Weise geklärt und es gelte (in hinreichender Näherung) die **NEWTONsche Bewegungsgleichung**:

$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t),$	
wobei: $m$ = vom Inertialsystem unabhängige träge (Ruhe-)Masse des Körpers,	
$\mathbf{x}(t)$ = Ortsvektorfunktion des Schwerpunktes,	(3.60)
$\mathbf{F}(t)$ = Vektorsumme aller auf den Körper zum Zeitpunkt $t$ einwirkenden Kräfte.	

Version vom 26. März 2009

<sup>23</sup>Ursprünglich wurde die Masse als *Menge der Materie* aufgefaßt (Sommerfeld, 1964, Seiten 3 und 4).

<sup>24</sup>Hier bezeichnet natürlich  $\mathbf{x}(t)$  die Ortsvektorfunktion von  $\underline{P}_s$  und  $t_0$  den Zeitpunkt des experimentellen Eingriffs.

<sup>25</sup>Das wird z.B. in der Speziellen Relativitätstheorie recht deutlich.

**Warnung:** Man darf (3.60) **nicht** als **Definition** der (Gesamt-) Kraft auf einen beliebig bewegten Körper auffassen! Ein solcher Kraftbegriff wäre ziemlich nutzlos und auch prinzipiell mit der relativistischen Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse unvereinbar.

Nach (3.59) und (3.60) hängt die Bahnkurve von  $\underline{P}_s$  offensichtlich nur von (Gesamt-) Masse, Gesamtkraft und Anfangsbedingungen ab. Die genaue Struktur von  $\mathcal{K}$  ist unwesentlich. Interessiert man sich nur für die Bewegung von  $\underline{P}_s$ , nicht jedoch für die zusätzlich möglichen Rotationsbewegungen des Körpers, so ist es also natürlich,  $\mathcal{K}$  idealisiert als **Massenpunkt** zu betrachten.

## 3.4 Erhaltungssätze für Massenpunktsysteme

### 3.4.1 Impulssatz/Schwerpunktsatz

Die Größe  $\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} m \dot{\mathbf{x}}(t)$  für einen Massenpunkt  $m$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  bezeichnet man als den **Impuls**<sup>26</sup> von  $m$  zur Zeit  $t$  (bzgl. des betr. Bezugssystems). Damit läßt sich (3.60) auch folgendermaßen formulieren:

Die Ableitung des Impulses nach der Zeit stimmt mit der Vektorsumme aller auf  $m$  einwirkenden Kräfte überein.

**Anmerkung:** In dieser Form gilt die Bewegungsgleichung (mit geschwindigkeitsabhängiger Masse) auch in der Speziellen Relativitätstheorie (siehe z.B. Kap. 3 von (Lücke, rel)).

Für Systeme von Massenpunkten<sup>27</sup>  $m_1, \dots, m_n$  mit den entspr. Ortsvektorfunktionen  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ , auf die entspr. Kräfte  $\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_n(t)$  wirken, folgt hieraus aufgrund der Linearität der Ableitung:

Die zeitliche Ableitung des **Gesamtimpulses**

$$\mathbf{P}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{p}_{\nu}(t) = m_{\nu} \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)$$

des Massenpunkt-Systems stimmt mit der Vektorsumme

$$\mathbf{F}_{\text{ges.}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_{\nu}(t)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>26</sup>Das Wort *Impuls* deutet auf den Kraftstoß hin, der zur Erzeugung des entsprechenden Bewegungszustands aus der Ruhelage heraus nötig ist. Dieser Zusammenhang bleibt auch in der Speziellen Relativitätstheorie erhalten.

<sup>27</sup>Wir identifizieren der Einfachheit halber die Massenpunkte mit ihren Massen.

aller auf die Massenpunkte einwirkenden Kräfte überein:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{F}_{\text{ges.}}(t).$$

Speziell ergibt sich daraus der

**Impulssatz:** Der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten ist zeitlich konstant, solange die Summe aller am System angreifenden Kräfte verschwindet.

Entspr. Lemma 2.2.2 definiert man den **Schwerpunkt** des Systems über seinen Ortsvektor

$$\mathbf{X}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + m_n \mathbf{x}_n(t)}{M}, \quad M \stackrel{\text{def}}{=} m_1 + \dots + m_n.$$

Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für die einzelnen Massenpunkte ergibt sich damit konsistenterweise<sup>28</sup> diejenige für das Gesamtsystem:

**Schwerpunktsatz:** Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so wie ein einzelner Massenpunkt, dessen Masse mit der Gesamtmasse des Systems übereinstimmt und auf den die Summe aller am System angreifenden Kräfte wirkt:

$$M \ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ges.}}(t).$$

### 3.4.2 Drehimpulssatz/Flächensatz

Die Größe  $\mathbf{l}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) \times \mathbf{p}(t)$  für einen Massenpunkt mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  (bzgl.  $P_0$ ) und dem Impuls  $\mathbf{p}(t)$  bezeichnet man als den **Drehimpuls** (bzgl.  $P_0$ ) dieses Massenpunktes. Gemäß (3.60) gilt dafür

$$\dot{\mathbf{l}}(t) = \mathbf{x}(t) \times \mathbf{F}(t).$$

Entsprechend bezeichnet man für ein Massenpunktsystem der in 3.4.1 betrachteten Art

$$\mathbf{L}_{\text{ges.}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \underbrace{\mathbf{l}_{\nu}(t)}_{=\mathbf{x}_{\nu}(t) \times m_{\nu} \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)}$$

als den **Gesamtdrehimpuls** (bzgl.  $P_0$ ). Dafür gilt (aufgrund der Linearität der Ableitung):

Version vom 26. März 2009

<sup>28</sup>Vgl. dazu auch 3.4.3.

Die zeitliche Ableitung des Gesamtdrehimpulses (bzgl.  $P_0$ ) stimmt für ein System von Massenpunkten mit der Vektorsumme

$$\mathbf{M}_{\text{ges}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{x}_{\nu}(t) \times \mathbf{F}_{\nu}(t)$$

aller Drehmomente (bzgl.  $P_0$ ) überein, die die an den Massenpunkten angreifenden Kräfte erzeugen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{ges.}}(t) = \mathbf{M}_{\text{ges}}(t) .}$$

Insbesondere ergibt sich daraus der sog.

**Drehimpulssatz:** Der Gesamtdrehimpuls (bzgl.  $P_0$ ) eines Systems von Massenpunkten ist zeitlich konstant, solange die Summe aller Drehmomente (bzgl.  $P_0$ ), die die an den Massenpunkten angreifenden Kräfte erzeugen, verschwindet.

Der Gesamtdrehimpuls stimmt i.a. nicht mit dem sog. **Bahndrehimpuls** (bzgl.  $P_0$ )

$$\mathbf{L}_{\text{Bahn}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}(t) \times \mathbf{P}(t),$$

$$\text{wobei: } \mathbf{P}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{p}_{\nu}(t) = (m_1 + \dots + m_n) \dot{\mathbf{X}}(t),$$

des Systems überein. Die Differenz

$$\mathbf{L}_{\text{eigen}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}_{\text{ges.}}(t) - \mathbf{L}_{\text{Bahn}}(t)$$

bezeichnet man als den **Eigendrehimpuls** des Systems. Für den Eigendrehimpuls ergibt sich somit<sup>29</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{eigen}}(t) &= \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{X}(t)) \times (m_{\nu} \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)) \\ &= \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{X}(t)) \times m_{\nu} (\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) - \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Er stimmt also mit dem Gesamtdrehimpuls bzgl. des Schwerpunktes überein<sup>30</sup> und ist von der Wahl des Inertialsystems unabhängig.

---

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Die zweite Gleichung folgt aus  $\sum_{\nu=1}^n m_{\nu} (\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{X}(t)) = 0$ .

<sup>30</sup>Diese Aussage entspricht dem sog. **STEINER'schen Satz** für Trägheitsmomente.

Konsistenterweise gilt für den Bahndrehimpuls

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{Bahn}}(t) = \mathbf{X}(t) \times \mathbf{F}_{\text{ges.}}(t)$$

und für den Eigendrehimpuls

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{eigen}}(t) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{X}(t)) \times \mathbf{F}_{\nu}(t).$$

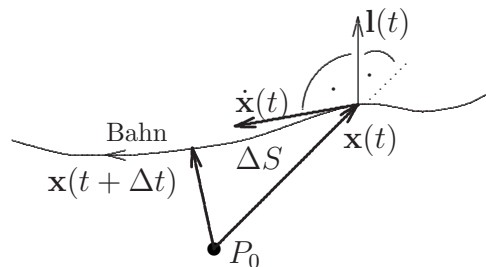
Ein (starrer) Körper  $\mathcal{K}$  läßt sich in beliebig guter Näherung als System von (starr zueinander angeordneten) Massenpunkten betrachten. Idealisiert man  $\mathcal{K}$  als Massenpunkt, so ist dessen Drehimpuls  $\mathbf{I}(t)$  also als Bahndrehimpuls des ausgedehnten Körpers anzusehen.

Für einen Massenpunkt  $m$  bezeichnet man

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{2m} \mathbf{I}(t)$$

als die **Flächengeschwindigkeit** bzgl.  $P_0$ ; denn:

$$\left| \frac{1}{2} \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) \right| = \begin{cases} \text{Betrag der zeitlichen Ableitung des Inhalts} \\ \text{der vom Ortsvektor überstrichenen Fläche.} \end{cases} \quad (3.62)$$



Damit ergibt sich der sog.

**Flächensatz** (für Massenpunkte): Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Die Flächengeschwindigkeit (bzgl.  $P_0$ ) ist zeitlich konstant.
2. Der Drehimpuls (bzgl.  $P_0$ ) ist zeitlich konstant.
3. Der Ortsvektor (bzgl.  $P_0$ ) bewegt sich in der zum Drehimpuls senkrechten Ebene (die  $P_0$  enthält) und überstreicht in gleichen Zeiträumen Flächen gleichen Inhalts.
4. Die Gesamtkraft ist eine **Zentralkraft** bzgl.  $P_0$ , d.h. sie zeigt stets entweder zu  $P_0$  hin oder von  $P_0$  weg.

### 3.4.3 Innere und äußere Kräfte

Betrachtet sei wieder ein System von Massenpunkten  $m_1, \dots, m_n$  mit den Ortsvektorfunktionen  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ . Mit  $\mathbf{F}_{\nu\mu}(t)$  sei jeweils die Kraft bezeichnet, die  $m_\mu$  auf  $m_\nu$  ausübt. Für die sog. **inneren Kräfte**

$$\mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{\nu\mu}(t) - \mathbf{F}_{\mu\nu}(t)) \quad \forall \nu, \mu \in \{1, \dots, n\}$$

gilt dann

$$\mathbf{F}_{\nu\mu}(t) = -\mathbf{F}_{\mu\nu}(t) \quad \forall \nu, \mu \in \{1, \dots, n\} \quad (3.63)$$

(Aktion = Reaktion<sup>31</sup>). Weiterhin definiert man die sog. äußeren Kräfte

$$\mathbf{F}_\nu^{\text{äuß}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_\nu(t) - \sum_{\mu=1}^n \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}$$

wobei jeweils  $\mathbf{F}_\nu(t)$  die Summe aller auf  $m_\nu$  wirkenden Kräfte bezeichnet. Dafür gilt

$$\sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_\nu(t) = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_\nu^{\text{äuß}}(t) \quad (3.64)$$

und

$$\sum_{\mu=1}^n \mathbf{x}_\nu(t) \times \mathbf{F}_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^n \mathbf{x}_\nu(t) \times \mathbf{F}_\nu^{\text{äuß}}(t), \quad (3.65)$$

falls  $\mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) = f_{\nu\mu}(t) (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_\mu(t))$  für  $\nu, \mu = 1, \dots, n$ .

**Beweisskizze zu (3.65):**

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{x}_\nu(t) \times \sum_{\mu=1}^n \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu=1}^n (\mathbf{x}_\nu(t) \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) + \mathbf{x}_\mu(t) \times \mathbf{F}_{\mu\nu}^{\text{inn}}(t)) \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu=1}^n \underbrace{(\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_\mu(t)) \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t)}_{=0 \text{ n. Vorauss.}}. \end{aligned}$$

■

Gemäß (3.64) sind bei Anwendung des Impulssatzes und gemäß (3.65) gewöhnlich auch bei Anwendung des Drehimpulssatzes nur die äußeren Kräfte zu beachten, die in aller Regel der physikalischen Intuition entsprechen. In diesem Sinne erklärt sich die in 2.2.3 hervorgehobene Erfahrungstatsache bzgl. gleichförmiger Bewegung starrer Körper.

<sup>31</sup>In der Elektrodynamik gilt das Prinzip *Aktion = Reaktion* für geladene Teilchen i.a. **nicht**, da die Wechselwirkung zwischen geladenen Massenpunkten durch Felder endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit (*retardiert*) vermittelt wird. Letzteres ist auch die Ursache für **Selbstwechselwirkungskräfte**, die z.B. in der relativistischen LORENTZ-DIRAC-Gleichung des Elektrons berücksichtigt sind.

### 3.4.4 Energiesatz

Zunächst sei wieder ein Massenpunkt  $m$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  betrachtet. Elementare Rechnung liefert dafür

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 \stackrel{(3.28)}{=} m \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) \stackrel{(3.60)}{=} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(t).$$

Mit (3.57) folgt daraus unmittelbar:

$$(3.60) \implies \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 - \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t_0)|^2 = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{x}}(t') \cdot \mathbf{F}(t') dt'. \quad (3.66)$$

Man bezeichnet  $\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2$  als die **kinetische Energie** des Massenpunktes  $m$  zur Zeit  $t$ . Das Skalarprodukt  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(t)$  bezeichnet man als die von der Gesamtkraft  $\mathbf{F}(t)$  zur Zeit  $t$  an  $m$  erbrachte **Leistung**, das Integral  $\int_{t_0}^t \dot{\mathbf{x}}(t') \cdot \mathbf{F}(t') dt'$  als die während des Zeitintervalls  $[t_0, t]$  an  $m$  verrichtete **Arbeit**. Damit besagt (3.66):

Die Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktes stimmt mit der an ihm verrichteten Arbeit überein.

Oft existiert eine sog. **Potential**-Funktion  $V(\mathbf{x})$  mit

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = -\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(t) \quad \text{für jeden Bewegungsablauf.} \quad (3.67)$$

**Beispiele:**<sup>32</sup>

Kraftquelle	$\mathbf{F}(t)$	$V(\mathbf{x}(t))$
homogenes Schwerfeld	$m \mathbf{g}$	$-m \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(t)$
ideale Feder	$-\kappa \mathbf{x}(t)$	$+\frac{\kappa}{2}  \mathbf{x}(t) ^2$
Schwerfeld einer Punktmasse $M$	$-G \frac{mM}{ \mathbf{x}(t) ^3} \mathbf{x}(t)$	$-G \frac{mM}{ \mathbf{x}(t) }$

Daß die für die ideale Feder und das inhomogene Schwerfeld angegebenen  $\mathbf{F}$ ,  $V$  der Bedingung (3.67) genügen, folgt aus der allgemeinen Beziehung<sup>33</sup>

$$\frac{d}{dt} U(|\mathbf{x}(t)|) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \frac{d}{dr} U(r)_{|r=|\mathbf{x}(t)|}. \quad (3.68)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>32</sup>Vgl. 3.5.1 und 3.5.3.

<sup>33</sup>Man beachte die Kettenregel und die daraus mit der Produktregel folgende Beziehung

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)} = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}.$$

Aus (3.67) und (3.66) folgt mit (3.57):

$$(3.60) \implies \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + V(\mathbf{x}(t)) \quad \text{unabhängig von } t. \quad (3.69)$$

Kräfte vom Typ (3.67) bezeichnet man dementsprechend als **konservativ**.  $V(\mathbf{x})$  bezeichnet man als die **potentielle Energie** des Massenpunktes am  $\mathbf{x}(t)$  entsprechenden Ort, da dieser Betrag gemäß (3.69) unter Umständen in kinetische Energie umgewandelt werden kann.

Unter der kinetischen Energie eines Systems von Massenpunkten  $m_1, \dots, m_n$  versteht man die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenpunkte:

$$E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \frac{m_{\nu}}{2} |\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)|^2.$$

Existieren zu den entsprechend 3.4.3 bezeichneten Kräften Potentialfunktionen  $V_{\nu}(\mathbf{x}), V_{\nu\mu}(\mathbf{x})$ , die den Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{\nu}(\mathbf{x}_{\nu}(t)) &= -\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) \cdot \mathbf{F}_{\nu}^{\text{äuss}}(t), \\ \frac{d}{dt} V_{\nu\mu}(\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{x}_{\mu}(t)) &= -(\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\mu}(t)) \cdot \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) \end{aligned} \quad (3.70)$$

für jeden Bewegungsablauf genügen, dann bezeichnet man

$$E_{\text{ges}}^{\text{pot}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n V_{\nu}(\mathbf{x}_{\nu}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^n V_{\nu\mu}(\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{x}_{\mu}(t))$$

als die potentielle Energie des Massenpunktsystems zum Zeitpunkt  $t$  und erhält in Verallgemeinerung von (3.69) den

**Energiesatz:** Wirken auf ein System von Massenpunkten nur Kräfte vom Typ (3.70), also nur **Potentialkräfte**, so ist die Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}}(t) = E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t) + E_{\text{ges}}^{\text{pot}}(t)$$

des Systems zeitlich konstant.

**Beweis:** Analog (3.66) ergibt sich

$$E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t_2) - E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t_1) = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) \cdot \mathbf{F}_{\nu}(t) dt \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Analog zum Beweis von (3.65) zeigt man:

$$\sum_{\nu=1}^n \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) \cdot \sum_{\mu=1}^n \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^n (\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\mu}(t)) \cdot \mathbf{F}_{\nu\mu}^{\text{inn}}(t).$$



Mit (3.70) folgt somit

$$\begin{aligned}
 & E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t_2) - E_{\text{ges}}^{\text{kin}}(t_1) \\
 &= - \sum_{\nu=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V_{\nu}(\mathbf{x}_{\nu}(t)) dt - \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt'} V_{\nu\mu}(\mathbf{x}_{\nu}(t) - \mathbf{x}_{\mu}(t)) dt \\
 &\stackrel{(3.57)}{=} - (E_{\text{ges}}^{\text{pot}}(t_2) - E_{\text{ges}}^{\text{pot}}(t_1))
 \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. ■

Die dem Massenpunktmodell entsprechende kinetische Energie

$$E_{\text{kin}}^{\text{trans}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2$$

stellt i.a. nur die *kinetische Energie der Translationsbewegung* dar; denn:

$$\begin{aligned}
 2(E_{\text{kin}}^{\text{ges}}(t) - E_{\text{kin}}^{\text{trans}}(t)) &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} |\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)|^2 - \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 \\
 &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} |\dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t)|^2 - 2 \underbrace{\sum_{\nu=1}^n m_{\nu} \dot{\mathbf{x}}_{\nu}}_{=\sum_{\nu=1}^n m_{\nu} \dot{\mathbf{X}}(t)} \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) + \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 \\
 &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} |\dot{\mathbf{x}}_{\nu} - \dot{\mathbf{X}}(t)|^2 \\
 &= \text{Energie der Bewegung relativ zum Schwerpunkt.}
 \end{aligned}$$

## 3.5 Zentralfeld-Probleme

### 3.5.1 Harmonischer Oszillator

Ein Massenpunkt  $m$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  sei durch eine *ideale Feder* der *Federstärke*  $\kappa > 0$  mit  $P_0$  verbunden, d.h. die Feder übe die Kraft

$$\mathbf{F}(t) = -\kappa \mathbf{x}(t) \quad (3.71)$$

auf den Massenpunkt aus. Falls dies die einzige Kraft ist, die auf  $m$  wirkt, nimmt die NEWTONsche Bewegungsgleichung (3.60) also die Form

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) + \kappa \mathbf{x}(t) = 0 \quad (3.72)$$

an. Da  $\mathbf{F}(t)$  im vorliegenden Falle konservativ ist, gilt entsprechend 3.4.4 der **Energiesatz** in der Form

$$(3.72) \implies \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}(t)|^2 \text{ unabhängig von } t. \quad (3.73)$$

Hieraus folgt:<sup>34</sup>

Zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$  existiert höchstens eine Lösung von (3.72).

Falls also auf einen Massenpunkt nur die Kraft (3.71) einer idealen Feder wirkt, führt dieser eine harmonische Schwingung<sup>35</sup> um  $P_0$  mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

aus:

$$\mathbf{x}(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t - t_0)\right) \mathbf{x}_0 + \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t - t_0)\right) \mathbf{v}_0$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) + \kappa \mathbf{x}(t) = 0 \quad \text{für alle } t,$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

### 3.5.2 Gravitationsgesetz

Aus Beobachtungen der Planetenbewegung schloß Johannes KEPLER (1571 - 1630), daß (näherungsweise) folgende drei (nach ihm benannte) Gesetze gelten:

1. Jeder Planet durchläuft eine **Ellipsenbahn**, in deren einem Brennpunkt die Sonne ‘steht’.
2. Die **Flächengeschwindigkeit** eines Planeten Ortsvektors bzgl. des Brennpunktes, in dem die Sonne steht, ist zeitlich **konstant**.
3. Das Verhältnis

$$\frac{(\text{Länge der großen Halbachse})^3}{(\text{Umlaufzeit})^2}$$

ist für alle Planetenbahnen gleich.

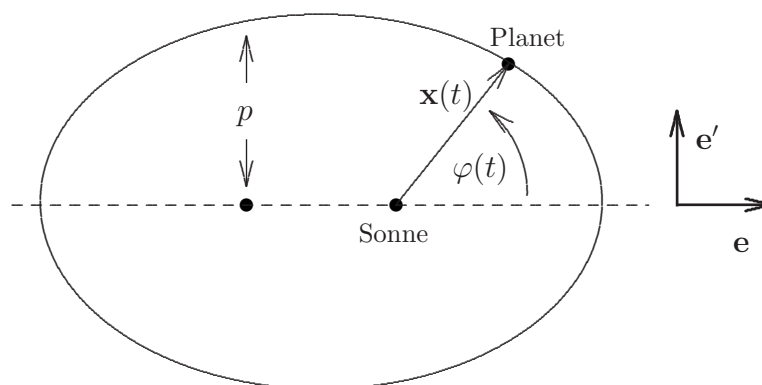
Das 1. KEPLERSche Gesetz besagt also, daß für einen Planeten die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  **bzgl. der Sonne** von der Form (3.3) ist:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi(t)} (\cos \varphi(t) \mathbf{e} + \sin \varphi(t) \mathbf{e}') . \quad (3.74)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>34</sup>Die Differenz zweier Lösungen zu gleichen Anfangsbedingungen ist eine Lösung von (3.72) mit Anfangsenergie 0, nach (3.73) also für alle Zeiten 0.

<sup>35</sup>Siehe Übungsaufgabe 22.



Die Ableitung von (3.74) ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{p} \dot{\varphi}(t) |\mathbf{x}(t)|^2 (-\sin \varphi(t) \mathbf{e} + (\epsilon + \cos \varphi(t)) \mathbf{e}') \quad (3.75)$$

(Beweis als Übungsvorschlag). Da **allgemein**

$$\mathbf{x}(t) = |\mathbf{x}(t)| (\cos \varphi(t) \mathbf{e} + \sin \varphi(t) \mathbf{e}') \implies |\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)| = |\dot{\varphi}(t) |\mathbf{x}(t)|^2| \quad (3.76)$$

gilt (Beweis als Übungsvorschlag), besagt das 2. KEPLERSche Gesetz:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\varphi}(t) |\mathbf{x}(t)|^2) = 0. \quad (3.77)$$

Aus (3.75) folgt damit

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= -\frac{1}{p} (\dot{\varphi}(t))^2 |\mathbf{x}(t)| \mathbf{x}(t) \\ &= -\frac{1}{p} \underbrace{(\dot{\varphi}(t) |\mathbf{x}(t)|^2)^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} \lambda} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}. \end{aligned}$$

Mit der NEWTONSchen Bewegungsgleichung (3.60) ergibt sich daraus die

**Folgerung 3.5.1** *Gemäß den ersten beiden KEPLERSchen Gesetzen ist die Gesamtkraft, die auf einen Planeten wirkt, von der Form*

$$\mathbf{F}(t) = -m\lambda \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3},$$

wobei:

$$\begin{aligned} m &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Masse des Planeten,} \\ \mathbf{x}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Ortsvektorfunktion des Planeten bzgl. der Sonne,} \\ \lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} |\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)|^2 \text{ zeitunabhängig,} \\ p &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Halbparameter der Bahnellipse.} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} T &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Umlaufzeit des Planeten,} \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Länge der großen Halbachse der Umlaufbahn} \end{aligned}$$

gilt<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} \pi a \sqrt{ap} &= \text{Ellipsenfläche} \\ &= T \cdot \text{Betrag der Flächengeschwindigkeit} \\ &= T \cdot \frac{1}{2} |\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)| \end{aligned}$$

und somit:

$$\lambda = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Nach dem 3. KEPLERSchen Gesetz ist also  $\lambda$  für alle Planeten gleich. Aus Symmetriegründen folgerte daraus Isaac NEWTON (1643-1727) das

**Gravitationsgesetz:** Ein Massenpunkt  $m_1$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}_1(t)$  übt auf einen weiteren Massenpunkt  $m_2$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}_2(t)$  die Anziehungskraft

$$\mathbf{F}(t) = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)}{|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)|^3}$$

aus, wobei  $G$  eine positive universelle **Gravitationskonstante** ist.<sup>37</sup>

### 3.5.3 KEPLER-Problem

#### Problem:

Bestimme alle (hinreichend gutartigen) Ortsvektorfunktionen  $\mathbf{x}(t)$ , die die Gleichung

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = -G m M \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3} \quad (3.78)$$

erfüllen.

Version vom 26. März 2009

<sup>36</sup>Als gestauchter Kreis hat die Ellipse mit den Halbachsen-Längen  $a, b$  die Fläche  $\pi a b = \pi a \sqrt{ap}$  (siehe auch Übungsaufgabe 39).  
(3.6)

<sup>37</sup>Den Wert  $\approx 6,68 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^3}$  für die Gravitationskonstante  $G$  erhält man z.B. durch Eingabe von 'G=' in die Suchmaske von <http://www.google.de>. Bzgl. Präzisionsmessungen von  $G$  siehe z.B. (Pohl, 1962, § 30).

Da die (3.78) entsprechende Kraft

$$\mathbf{F}(t) = G m M \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}$$

eine konservative Zentralkraft bzgl.  $P_0$  ist, lassen sich Energie- und Flächensatz anwenden:

$$(3.78) \implies E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 - \frac{G m M}{|\mathbf{x}(t)|} \text{ zeitlich konstant,} \quad (3.79)$$

$$(3.78) \implies \mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) \times m \dot{\mathbf{x}}(t) \text{ zeitlich konstant.} \quad (3.80)$$

Für eine Kegelschnittbewegung der Form (3.74) gilt

$$\left( \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} + \epsilon \mathbf{e} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \stackrel{(3.75)}{=} 0$$

und somit existiert eine Funktion  $\alpha(t)$  mit:

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} + \epsilon \mathbf{e} = \alpha(t) (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{L}). \quad (3.81)$$

Wegen

$$\begin{aligned} p &= |\mathbf{x}(t)| (1 + \epsilon \cos(\angle \mathbf{e}, \mathbf{x}(t))) \\ &= \left( \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} + \epsilon \mathbf{e} \right) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &\stackrel{(3.81)}{=} \alpha(t) (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &= \alpha(t) |\mathbf{L}|^2 / m \end{aligned}$$

muß  $\alpha(t)$  gemäß (3.80) unabhängig von  $t$  sein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} - \left( \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) \mathbf{x} \\ = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \epsilon \mathbf{e} \right) &\stackrel{(3.80), (3.81)}{=} \alpha \ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} \\ &\stackrel{(3.78)}{=} -\alpha G M \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.82)$$

und durch Vergleich mit

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \mathbf{L} = \frac{m}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \stackrel{(2.23)}{=} m \left( \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \right)$$

schließlich  $\alpha = \frac{1}{G m M}$ .

Diese Überlegungen führen auf folgende **Vermutung**:<sup>38</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>38</sup>Daß dies zunächst nur eine Vermutung ist, liegt daran, daß noch nicht gezeigt wurde, daß (3.78) nur Kegelschnittbewegungen zuläßt.

Unter der Voraussetzung (3.78) ist der sog. **RUNGE-LENZ-Vektor**<sup>39</sup>

$$\mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{L}}{G m M} - \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \quad (3.83)$$

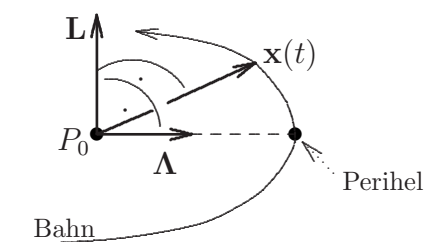
zeitlich konstant (eine Erhaltungsgröße) und mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +\angle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{x}(t) & \text{falls } (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{x}(t), \mathbf{L}) \text{ Rechtssystem,} \\ -\angle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{x}(t) & \text{falls } (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{x}(t), \mathbf{L}) \text{ Linkssystem} \end{cases} \\ \epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{\Lambda}|, \\ p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{L}|^2}{G m^2 M} \end{aligned} \quad (3.84)$$

gilt für den Fall  $\mathbf{L} \neq 0 \neq \mathbf{\Lambda}$ :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi(t)} \left( \cos \varphi(t) \frac{\mathbf{\Lambda}}{|\mathbf{\Lambda}|} + \sin \varphi(t) \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{\Lambda}}{|\mathbf{L} \times \mathbf{\Lambda}|} \right) \quad (3.85)$$

mit:  $1 + \epsilon \cos \varphi(t) > 0$ .



**Bestätigung:** Die zeitliche Konstanz des RUNGE-LENZ-Vektors folgt mit dem Flächensatz gemäß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{\Lambda} &= \frac{\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{G m M} - \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\ &\stackrel{(3.78)}{=} -\frac{\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} \mathbf{x} \\ &\stackrel{(2.23)}{=} -\frac{(\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$|\mathbf{x}| \stackrel{(3.83)}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{G m M} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{x} \stackrel{(3.84)}{=} p - \epsilon |\mathbf{x}| \cos \varphi,$$

d.h.

$$|\mathbf{x}| (1 + \epsilon \cos \varphi) = p > 0,$$

und damit auch (3.85). ■

Für  $\mathbf{L} \neq 0 \neq \mathbf{\Lambda}$  gilt im **Perihel** (Bahnpunkt mit  $\varphi = 0$ )

$$|\mathbf{x}| = \frac{p}{1 + \epsilon}$$

und, da die Geschwindigkeit dort senkrecht zum Ortsvektor (bzgl. des Brennpunktes), also  $|\mathbf{L}| = |\mathbf{x}|m|\dot{\mathbf{x}}|$  ist.<sup>40</sup>

$$\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 = \frac{|\mathbf{L}|^2}{2m|\mathbf{x}|^2} \stackrel{(3.84)}{=} \frac{G m M}{2|\mathbf{x}|^2} p.$$

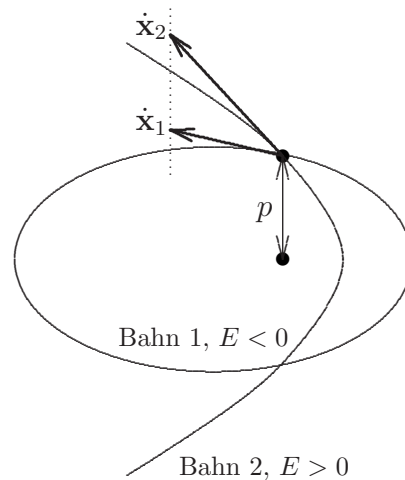
Gemäß (3.79) ergibt sich damit

$$E = \frac{G m M}{2p} (\epsilon^2 - 1). \quad (3.86)$$

Nach den Darlegungen von 3.1.3–3.1.5 gilt also:

<p>Für <math>\mathbf{L} \neq 0 \neq \mathbf{\Lambda}</math> :</p> $\text{Bahnkurve} = \begin{cases} \text{Ellipse,} & \text{falls } E < 0, \\ \text{Parabel,} & \text{falls } E = 0, \\ \text{Hyperbel,} & \text{falls } E > 0. \end{cases}$
--

Beispiel für Bahnen gleichen Drehimpulses.<sup>41</sup>



Für den Betrag der großen Halbachse einer Ellipse folgt aus (3.4) und (3.6):

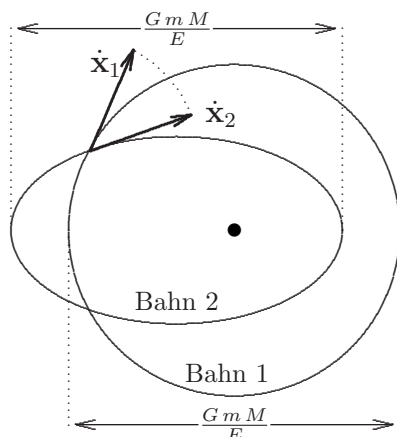
$$|\mathbf{a}| = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \stackrel{(3.86)}{=} -\frac{G m M}{2 E}$$

Version vom 26. März 2009

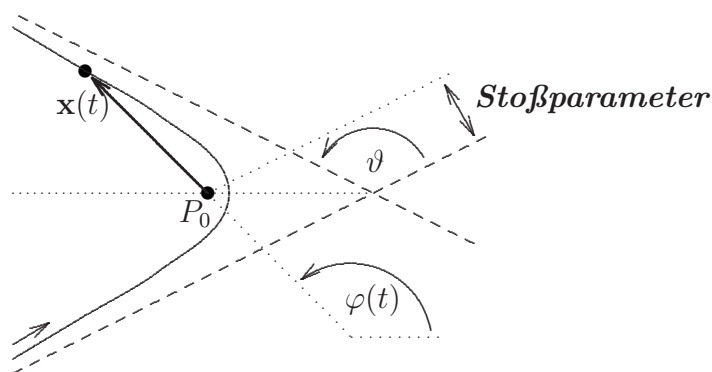
<sup>40</sup>Vgl. auch (3.89).

<sup>41</sup>Vgl. (3.84). I.a. müssen natürlich weder die Bahnebenen noch die Perihelausrichtungen übereinstimmen.

Damit ergibt sich als Beispiel für **gebundene Zustände** gleicher Energie ( $E < 0$ , Planeten):



Für **Streuzustände** ( $E > 0$ ) ergibt sich schließlich folgendes Bild:



Wegen

$$(1 + \epsilon \cos \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi \rightarrow \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

gilt dabei für den **Streuwinkel**  $\vartheta$ :

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

**Abschließende Bemerkungen:**

- (i) Im Falle  $\mathbf{L} = 0$  gilt  $\frac{d}{dt} |\mathbf{x}|^2 = 2\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 0$ , d.h. es liegt eine Kreisbahn vor. (3.83)
- (ii) Im Falle  $\mathbf{L} = 0$  ist  $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  zeitlich konstant, d.h. die Bahn liegt auf einer Geraden durch  $P_0$ . Nach dem Energiesatz kann die Ortsvektorfunktion dann nicht für alle Zeiten gutartig sein (divergierende Geschwindigkeit bei Annäherung an  $P_0$ ).



- (iii) Für  $\mathbf{L} \neq 0$  läßt sich  $\varphi(t)$ , vom Spezialfall der Kreisbahn abgesehen, nicht in geschlossener Form angeben, wohl aber implizit, indem man  $t$  als monoton wachsende Funktion von  $\varphi$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{GM}{p^3}} t & \stackrel{(3.84)}{=} \frac{|\mathbf{L}|}{m p^2} t = \int_0^t \frac{|\mathbf{x}(t') \times \dot{\mathbf{x}}(t')|}{p^2} dt' \\ & \stackrel{(3.76),(3.85)}{=} \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(t') dt'}{(1 + \epsilon \cos \varphi(t'))^2} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} \end{aligned}$$

Das Integral über  $\varphi$  läßt sich explizit angeben.<sup>42</sup> Damit (jedenfalls für  $\mathbf{L} \neq 0$ ) ist auch klar, daß die Lösung des KEPLER-Problem durch die Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt ist.

### 3.5.4 Allgemeines Zentralpotential

Sei nun  $\mathbf{F}(t)$  eine konservative Kraft mit einer **beliebigen** bzgl.  $P_0$  zentralsymmetrischen Potentialfunktion (Zentralpotential):

$$V(\mathbf{x}) = U(|\mathbf{x}|) \quad (3.87)$$

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = -\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(t) \quad \text{für jeden Bewegungsablauf} \quad (3.88)$$

Es soll wieder der allgemeinste mit der Newtonschen Bewegungsgleichung (3.60) verträgliche Bewegungsablauf bestimmt werden:

**Ganz allgemein**<sup>43</sup> gilt

$$\boxed{\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| \right)^2 + \frac{|\mathbf{L}(t)|^2}{2m |\mathbf{x}(t)|^2}} \quad (3.89)$$

Für einen Massenpunkt  $m$  unter dem Einfluß der Kraft  $\mathbf{F}(t)$  lautet damit der **Energiesatz**:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| \right)^2 + \frac{|\mathbf{L}(\mathbf{x}(t))|^2}{2m |\mathbf{x}(t)|^2} + V(\mathbf{x}(t)) = E \quad \text{zeitlich konstant}$$

Unabhängig von (3.87) folgt daraus unmittelbar

$$1 = \frac{\frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)|}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(\mathbf{x}(t)) - \frac{|\mathbf{L}(\mathbf{x}(t))|^2}{2m |\mathbf{x}(t)|^2} \right)}} \quad (3.90)$$

<sup>42</sup>Siehe (Zeidler, 2003, S. 175, Integral Nr. 340).

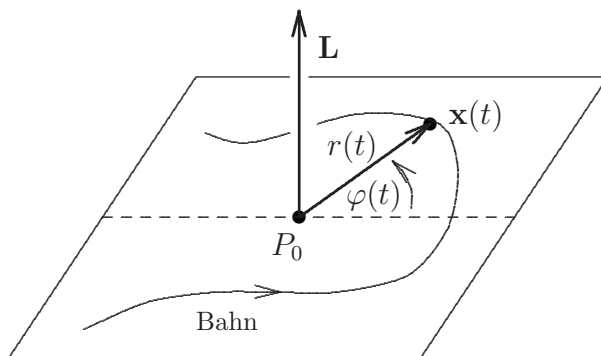
<sup>43</sup>Man beachte Fußnote 33 sowie die Regel (2.24).

Mit (3.87) ergibt sich aus (3.88) und (3.68)

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{d}{dr}U(r)|_{r=|\mathbf{x}(t)|} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}. \quad (3.91)$$

$\mathbf{F}(t)$  ist also eine Zentralkraft bzgl.  $P_0$ . Nach dem Flächensatz liegt also eine mit (3.60) verträgliche Bahnkurve stets in einer Ebene, die  $P_0$  enthält und senkrecht zum zeitlich konstanten Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  steht. Der Bewegungsablauf läßt sich also durch ebene Polarkoordinaten  $\varphi(t), r(t) = |\mathbf{x}(t)|$  beschreiben:

$$\mathbf{x}(t) = r(t) (\cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2).$$



Aus (3.90) folgt somit aufgrund der allgemeinen Formel<sup>44</sup>

$$\int_{t_0}^t \dot{r}(t') g(r(t')) dt' = \int_{r(t_0)}^{r(t)} g(r) dr \quad (3.92)$$

mit dem (3.53) und (3.87):

$$t - t_0 = \int_{|\mathbf{x}(t_0)|}^{|\mathbf{x}(t)|} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U(r) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (3.93)$$

falls  $E - U(r) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} > 0$  im Integrationsbereich.

Aufgrund der Drehimpulserhaltung kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\dot{\varphi}(t) \geq 0$  voraussetzen (entsprechende Orientierung der Polarkoordinaten). Falls der (zeitlich konstante) Drehimpuls und somit auch  $r(t)$  von Null verschieden ist, folgt aus (3.76).<sup>45</sup>

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{|\mathbf{L}|}{mr(t)^2} > 0;$$

<sup>44</sup>Nach (3.53) (wir setzen die Existenz einer Stammfunktion von  $G$  voraus) und der Kettenregel sind rechte und linke Seite von (3.92) beides Stammfunktionen von  $\dot{r}(t)g(r(t))$ . Da außerdem beide Stammfunktionen an der Stelle  $t = t_0$  verschwinden, müssen sie nach Lemma 3.3.1 übereinstimmen.

<sup>45</sup>Wir schreiben hier  $\varphi$  statt  $\varphi$ .

$\varphi(t)$  ist dann also eine streng monoton wachsende Funktion der Zeit, so daß eine Funktion  $\hat{r}$  mit  $r(t) = \hat{r}(\varphi(t))$  existiert. Gemäß Kettenregel gilt damit

$$\dot{r}(t) = \left( \frac{|\mathbf{L}|}{m\hat{r}(\varphi)^2} \frac{d}{d\varphi} \hat{r}(\varphi) \right) \Big|_{\varphi=\varphi(t)},$$

woraus mit (3.90)

$$1 = \left( \frac{d}{d\varphi} \hat{r}(\varphi) \right) \frac{|\mathbf{L}|}{\hat{r}(\varphi)^2 \sqrt{2m \left( E - U(\hat{r}(\varphi)) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2m|\hat{r}(\varphi)|^2} \right)}} \quad (3.94)$$

folgt. Mit der allgemeinen Substitutionsregel (3.92), auf  $\varphi$  statt  $t$  angewandt, ergibt sich daraus schließlich:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int_{\hat{r}(\varphi_0)}^{\hat{r}(\varphi)} \frac{|\mathbf{L}| d\hat{r}}{\hat{r}^2 \sqrt{2m \left( E - U(\hat{r}) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2m\hat{r}^2} \right)}}, \\ &\text{falls } E - U(\hat{r}) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2m\hat{r}^2} > 0 \text{ im Integrationsbereich.} \end{aligned}} \quad (3.95)$$

Aus (3.93) resp. (3.95) läßt sich  $t$  resp.  $\varphi$  als (i.a. mehrwertige) Funktion von  $r$  resp.  $\hat{r}$  bestimmen, wobei das Vorzeichen der Wurzel durch (3.90) resp. (3.94) festgelegt ist.  $\varphi(\hat{r})$  bestimmt  $\hat{r}(\varphi)$ , d.h. die Bahnkurve in Polarform.  $t(r)$  bestimmt  $r(t)$  und damit die Zeitabhängigkeit des Bahndurchlaufs (falls nicht ausgerechnet eine Kreisbahn vorliegt). Damit ist der gesamte Bewegungsablauf festgelegt.

Als Beispiel wollen wir (3.95) für das Potential

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{m\lambda}{|\mathbf{x}|}$$

auswerten. Mit den Definitionen

$$\xi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda m^2}{|\mathbf{L}|} - \frac{|\mathbf{L}|}{r}, \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2mE + \frac{\lambda^2 m^4}{|\mathbf{L}|^2}} > 0$$

ergibt sich gemäß (3.92) dafür

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\xi(\varphi_0)}^{\xi(\varphi)} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} = \arccos \left( \frac{\xi}{\alpha} \right) \Big|_{\xi(\varphi_0)}^{\xi(\varphi)}$$

und somit

$$\arccos \left( \frac{\xi(\varphi)}{\alpha} \right) = \varphi + \text{const.}$$

d.h.

$$\xi(\varphi) = -\alpha \cos(\varphi + \hat{\varphi}_0)$$

für geeignetes  $\hat{\varphi}_0$ . Einsetzen der Definitionen für  $\xi$  und  $\alpha$  liefert bei geeigneter Wahl des Ursprungs von  $\varphi$

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

wobei

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{L}|^2}{\lambda m^2}, \quad \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha p}{|\mathbf{L}|} = \sqrt{1 + \frac{2m p^2}{|\mathbf{L}|} E}.$$

Im Falle  $\lambda > 0$  ist das offensichtlich im Einklang mit unseren Ergebnissen für das KEPLER-Problem. Im Falle  $\lambda < 0$  entspricht das Potential dem COULOMB-Potential zweier Ladungen gleichen Vorzeichens. Dann ist  $p < 0$  und somit auch  $\epsilon < 0$ , d.h. nach den Ergebnissen von 3.1.5, daß die Bewegung hyperbolisch ist, jedoch auf dem vom Brennpunkt weiter entfernten Hyperbelzweig verläuft (RUTHERFORD-*Streuung*).

# Kapitel 4

## Skalar- und Vektorfelder

### 4.1 Richtungsableitung

#### 4.1.1 Grundlegendes

**Definition 4.1.1** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Dann versteht man unter einem **Skalarfeld** über  $V$  eine Abbildung  $\Phi$  von  $V$  in einen 1-dimensionalen reellen Vektorraum:

$$V \ni \mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^1 \cdot \text{phys. Einheit}.$$

Unter einem **Vektorfeld** über  $V$  versteht man eine Abbildung  $\mathbf{F}$  von  $V$  in sich:

$$V \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in V.$$

**Verabredung:** Wenn in dieser Vorlesung von Skalar- oder Vektorfeldern die Rede ist, so sind damit stets solche über dem Raum der **Ortsvektoren** gemeint. Multiplikation mit physikalischen Einheiten sei wieder wie üblich erklärt!

#### Beispiele:

- (i) Die in 3.4.4 angesprochenen Potentialfunktionen  $V(\mathbf{x})$  sind wichtige Beispiele für Skalarfelder.
- (ii) Weitere Beispiele für Skalarfelder sind etwa Dichte-Verteilungen  $\rho(\mathbf{x})$ , Temperaturverteilungen  $T(\mathbf{x})$ , Druckverteilungen  $p(\mathbf{x})$  usw. zu einem festen Zeitpunkt.
- (iii) Die in die NEWTONsche Bewegungsgleichung (3.60) eingehenden Kräfte  $\mathbf{F}(t)$  hängen oft nur indirekt von der Zeit ab, indem sie eigentlich durch Vektorfelder, sog. **Kraftfelder**  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  gegeben sind:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

wobei z.B.<sup>1</sup>

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\kappa\mathbf{x} & \text{für die Kraft einer idealen Feder,} \\ -\gamma\frac{mM}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} & \text{für die Schwerkraft zwischen zwei Massenpunkten.} \end{cases}$$

- (iv) Weitere wichtige Beispiele für Vektorfelder sind die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{H}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}(\mathbf{x})$  und Stromdichten  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  verschiedenster Art zu einem festen Zeitpunkt.

**Definition 4.1.2** Seien  $\mathbf{v}$  ein konstanter Vektor und  $\Phi$  ein Skalarfeld. Dann definieren wir<sup>2</sup>

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x} + t\mathbf{v})|_{t=0},$$

falls die betreffende Ableitung existiert. Wenn  $\mathbf{e}$  ein dimensionsloser Einheitsvektor (**Richtung**) ist, bezeichnet man  $(\mathcal{L}_{\mathbf{e}}\Phi)(\mathbf{x})$  als die **Richtungsableitung** von  $\Phi$  in Richtung von  $\mathbf{e}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ .

Analoge Definitionen gelten für Vektorfelder.

Man beachte:<sup>3</sup>

$$(\mathcal{L}_{\lambda\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x}) = \lambda(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Ein Skalarfeld  $\Phi(\mathbf{x})$  heißt (überall) **stetig**, wenn zu jedem  $\mathbf{x}$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit:<sup>4</sup>

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta \implies |\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}')| < \epsilon.$$

Analog ist die Stetigkeit eines Vektorfeldes definiert.

Eine Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  heißt **stetig differenzierbar**, wenn  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  existiert und stetig ist. Ein Skalar- resp. Vektorfeld heißt **stetig differenzierbar**, falls die Richtungsableitung für jede Richtung  $\mathbf{e}$  existiert und ein stetiges Skalar- resp. Vektorfeld liefert.

### Lemma 4.1.3

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Skalarfeld*  $\Phi(\mathbf{x})$ ,  
 (ii) *differenzierbare Ortsvektorfunktion*  $\mathbf{x}(t)$ ,  
 (iii) *Basis*  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Siehe Tabelle unter (3.67).

<sup>2</sup>Dabei ist die physikalische Dimension des Parameters  $t$  natürlich so zu wählen, daß  $t\mathbf{v}$  ein Ortsvektor ist.

<sup>3</sup>Die eingeschränkte Linearitätseigenschaft (4.1) folgt unmittelbar aus der Kettenregel (3.24) für  $g(t) = \lambda t$ . Die volle lineare Abhängigkeit der LIE-Ableitung  $(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{v}$  — Gleichung (4.3) — werden wir anhand von Lemma 4.1.3 erkennen.

<sup>4</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1.

Behauptung: Für alle  $t$  gilt

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^3 (\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{b}^j) (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}\Phi)(\mathbf{x}(t)),$$

wobei  $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\}$  die in (2.29) definierte reziproke Basis bezeichnet.

**Beweisskizze:** Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t) &\stackrel{(3.18)}{=} (t' - t) \mathbf{v}_{\text{mitt}}(t', t) \stackrel{(2.28)}{=} \sum_{j=1}^3 \lambda^j \mathbf{b}_j, \\ \text{wobei: } \lambda^j &\stackrel{\text{def}}{=} (t' - t) (\mathbf{v}_{\text{mitt}}(t', t) \cdot \mathbf{b}^j), \end{aligned}$$

folgt für beliebige  $t, t'$  mit  $t \neq t'$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}(t')) - \Phi(\mathbf{x}(t)) &= \Phi(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2 + \lambda^3 \mathbf{b}_3) - \Phi(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2) \\ &\quad + \Phi(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2) - \Phi(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1) \\ &\quad + \Phi(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1) - \Phi(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

und daraus nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(\mathbf{x}(t')) - \Phi(\mathbf{x}(t))}{t' - t} &= \frac{\lambda^3}{t' - t} (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_3}\Phi)(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2 + \xi^3 \lambda^3 \mathbf{b}_3) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{t' - t} (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_2}\Phi)(\mathbf{x}(t) + \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \xi^2 \lambda^2 \mathbf{b}_2) \\ &\quad + \frac{\lambda^1}{t' - t} (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_1}\Phi)(\mathbf{x}(t) + \xi^1 \lambda^1 \mathbf{b}_1) \end{aligned}$$

für geeignete  $\xi^j = \xi^j(t', t) \in [0, 1]$ . Mit

$$\lambda^j \rightarrow 0, \quad \frac{\lambda^j}{t' - t} \rightarrow (\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{b}^j) \quad \text{für } t' \rightarrow t$$

folgt daraus die Behauptung. ■

## 4.1.2 Der Gradient eines Skalarfeldes

Aus Definition 4.1.2 und Lemma 4.1.3 folgt<sup>5</sup>

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}\Phi)(\mathbf{x})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Man setze  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ .

für beliebiges  $\mathbf{v}$  und jede Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ . Damit ist die Definition

$$\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \Phi)(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

des **Gradienten** eines (hinreichend gutartigen) Skalarfeldes von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  unabhängig und für dieses Vektorfeld gilt

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \Phi)(\mathbf{x}). \quad (4.3)$$

Der Gradient von  $\Phi(\mathbf{x})$  zeigt also in die Richtung, in der  $\Phi(\mathbf{x})$  am schnellsten anwächst. Die zugehörige Richtungsableitung ist

$$\max_{\mathbf{e}} (\mathcal{L}_{\mathbf{e}} \Phi)(\mathbf{x}) = |\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x})|. \quad (4.4)$$

Außerdem steht  $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x})$  senkrecht auf der Fläche durch  $\mathbf{x}$ , auf der  $\Phi$  konstant ist.

Nach (4.2) besagt Lemma 4.1.3 also:<sup>6</sup>

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}(t))}. \quad (4.5)$$

Für Kräfte vom Typ

$$\mathbf{F}(t) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{x}(t)), \quad V \text{ stetig differenzierbar},$$

gilt also (3.67). Dementsprechend bezeichnet man Vektorfelder vom Typ

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{x}), \quad V \text{ stetig differenzierbar}, \quad (4.6)$$

als **konservativ**,<sup>7</sup> das durch (4.6) bis auf eine additive Konstante eindeutig<sup>8</sup> zugeordnete Skalarfeld  $V(\mathbf{x})$  als **Potentialfeld** von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

**Definition 4.1.4** Sei  $f$  eine Funktion der drei Veränderlichen  $x^1, x^2, x^3$ . Dann bezeichnet man zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial x^1} f(x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \rightarrow x^1 \\ \xi \neq x^1}} \frac{f(\xi, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x^3)}{\xi - x^1}$$

(im Falle der Existenz) als die **partielle Ableitung** von  $f$  nach der ersten Veränderlichen an der Stelle  $(x^1, x^2, x^3)$ . Die partiellen Ableitungen nach den anderen Veränderlichen sind entsprechend definiert.

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>Man vergleiche (4.5) mit der Kettenregel (3.24).

<sup>7</sup>Eine Kraft vom Typ  $\mathbf{F}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}$ , die ein geladenes Teilchen im konstanten homogenen Magnetfeld erfährt (vgl. Aufgabe 29), ist zwar auch im Sinne von (3.67) konservativ (mit  $V = 0$ ), jedoch **nicht** durch ein Kraftfeld gegeben.

<sup>8</sup>Seien  $V_1(\mathbf{x})$  und  $V_2(\mathbf{x})$  Potentialfelder des gleichen Kraftfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Dann folgt aus (4.5)  $\frac{d}{dt} (V_1(\mathbf{x}(t)) - V_2(\mathbf{x}(t))) = 0$  und somit nach Lemma 3.3.1 die zeitliche Konstanz von  $V_1(\mathbf{x}(t)) - V_2(\mathbf{x}(t))$  für jede Bahnbewegung  $\mathbf{x}(t)$ .



Mit den Definitionen 4.1.2 und 4.1.4 gilt für jede Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ :

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2, x^3) &= \Phi(x^1 \mathbf{b}_1 + x^2 \mathbf{b}_2 + x^3 \mathbf{b}_3) \\ \implies \left( \frac{\partial}{\partial x^j} f \right) (x^1, x^2, x^3) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \Phi) (x^1 \mathbf{b}_1 + x^2 \mathbf{b}_2 + x^3 \mathbf{b}_3) \text{ für } j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mithilfe partieller Ableitungen läßt sich der Gradient entsprechend (4.2) für eine beliebige Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  daher folgendermaßen ausdrücken:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \Phi(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \Phi(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \Phi(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\}, \\ \text{wobei: } \Phi(x^1, x^2, x^3) &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

### Beispiele:<sup>10</sup>

(i) Potential eines homogenen Kraftfeldes:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -m \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \\ \implies -\text{grad } V(\mathbf{x}) &= +m \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} (g^1 x^1 + g^2 x^2 + g^3 x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} (g^1 x^1 + g^2 x^2 + g^3 x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} (g^1 x^1 + g^2 x^2 + g^3 x^3) \end{pmatrix} \\ &= +m \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} \text{ bzgl. Orthonormalbasis} \\ &= +m \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Die Potentialebenen sind hier die zu  $\mathbf{g}$  senkrechten Ebenen.

(ii) Potential des Kraftfeldes einer idealen Feder:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} (\mathbf{x})^2 \xrightarrow{\text{analog}} -\text{grad } V(\mathbf{x}) = -\kappa \mathbf{x}.$$

Die Potentialflächen sind hier die Oberflächen der Kugeln mit Zentrum in  $P_0$ .

<sup>9</sup>Man beachte den Bezug auf die **reziproke** Basis! Üblicherweise beschränkt man sich in (4.8) auf physikalisch dimensionslose Basen  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ .

- (iii) Potential des Schwerkraftfeldes einer Punktmasse  $M$  in  $P_0$  auf eine Punktmasse  $m$  mit Ortsvektor  $\mathbf{x}$  :

$$V(\mathbf{x}) = -\gamma \frac{mM}{|\mathbf{x}|} \xrightarrow{\text{analog}} -\text{grad } V(\mathbf{x}) = -\gamma mM \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Auch hier sind die Potentialflächen die Oberflächen der Kugeln mit Zentrum in  $P_0$ .

Abschließend sei noch bemerkt, daß aus (4.5) und (4.7)

$$\frac{d}{dt} f(x^1(t), x^2(t), x^3(t)) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}^j(t) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} f(x^1, x^2, x^3) \right) \Big|_{x^k=x^k(t) \text{ für } k=1,2,3} \quad (4.9)$$

folgt und somit die **verallgemeinerte Kettenregel**

$$\begin{aligned} \hat{f}(q^1, q^2, q^3) &= f(x^1(q^1, q^2, q^3), x^2(q^1, q^2, q^3), x^3(q^1, q^2, q^3)) \\ \implies \frac{\partial}{\partial q^k} \hat{f}(q^1, q^2, q^3) &= \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial q^k} x^j(q^1, q^2, q^3) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} f(x^1, x^2, x^3) \right) \Big|_{x^l=x^l(q^1, q^2, q^3)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

für stetig differenzierbare<sup>11</sup>  $f$  und  $x^\nu$ . Entsprechende Formeln gelten natürlich für Funktionen von mehr als drei Veränderlichen.

**Anwendungsbeispiel** zu (4.9): Sei  $\mathcal{S}$  ein beliebiges thermodynamisches System (zum Beispiel ein geschlossenes Gas) mit den Zustandsgleichungen

$$V = V(P, T)$$

und (äquivalent)

$$P = P(V, T),$$

wobei:

$$\begin{aligned} V &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Volumen von } \mathcal{S}, \\ P &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Druck von } \mathcal{S}, \\ T &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Temperatur von } \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Vgl. Tabelle unter (3.67).

<sup>11</sup>Man identifiziert in natürlicher Weise Funktionen  $f(x^1, x^2, x^3)$  mit Skalarfeldern  $\Phi_f(x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^1, x^2, x^3)$ . Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von  $\Phi_f$  hängen dabei nicht von der Wahl der Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ab und werden deshalb entsprechend  $f$  selbst zugeordnet.

Dann sind die Größen

$$\begin{aligned}\alpha(P, T) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V(P, T)} \frac{\partial}{\partial T} V(P, T) && \textit{isobarer Ausdehnungskoeffizient}, \\ \beta(V, T) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{P(V, T)} \frac{\partial}{\partial T} P(V, T) && \textit{isochorer Spannungskoeffizient}, \\ \gamma(P, T) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{V(P, T)} \frac{\partial}{\partial p} V(P, T) && \textit{isotherme Kompressibilität}\end{aligned}$$

nicht voneinander unabhängig:

Für beliebig vorgegebene  $P_0, T_0$  gilt mit  $\hat{P}(T) \stackrel{\text{def}}{=} P(V(P_0, T_0), T)$  stets  $\hat{P}(T_0) = P_0$ . Da andererseits  $V(\hat{P}(T), T) = V(P_0, T_0)$  für alle  $T$  gilt, folgt somit

$$0 = \frac{d}{dT} V(\hat{P}(T), T) \stackrel{(4.9)}{=} \underbrace{\left( \frac{d\hat{P}(T)}{dT} \frac{\partial}{\partial P} V(P, T) \right)}_{P\beta} + \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial T} V(P, T) \right)}_{-V\gamma} \Big|_{P=\hat{P}(T)}$$

und daraus schließlich:

$$\boxed{\alpha(P_0, T_0) = \beta(V_0, T_0) \gamma(P_0, T_0) P_0, \quad \text{wobei: } V_0 \stackrel{\text{def}}{=} V(P_0, T_0).}$$

### 4.1.3 TAYLOR-Entwicklung

Für stetig differenzierbare Funktionen  $f(t), g(t)$  und beliebige<sup>12</sup>  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}f(t)g(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} &\stackrel{\text{def}}{=} f(t_2)g(t_2) - f(t_1)g(t_1) \\ &\stackrel{(3.53)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (f(t)g(t)) dt \\ &\stackrel{\text{Produkt.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t)) dt\end{aligned}$$

und somit die Formel für **partielle Integration** :

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)g(t) dt = f(t)g(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\dot{g}(t) dt.} \quad (4.11)$$

<sup>12</sup>Die physikalische Dimension der  $t_1, t_2$  ist hier ohne Belang.

Daraus ergibt sich für  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbares  $F(t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , die TAYLOR-**Entwicklung**<sup>13</sup>

$$F(t_2) = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} (t_2 - t_1)^\nu F^{(\nu)}(t)|_{t=t_1} + \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^n F^{(n+1)}(t) dt \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

von  $F(t_2)$  um die Stelle  $t_1$  herum.

**Beweis durch vollständige Induktion:**

1. Für  $n = 0$  folgt (4.12) direkt aus (3.53).
2. Wenn die Formel (4.12) bereits für  $n$  bewiesen ist, folgt sie daraus für  $n + 1$  anstelle von  $n$  mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^n F^{(n+1)}(t) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{(t_2 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) F^{(n+1)}(t) dt \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \frac{(t_2 - t)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^{n+1} F^{(n+1+1)}(t) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für beliebig oft stetig differenzierbares  $F(t)$  ergibt sich<sup>14</sup> aus (4.12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^n F^{(n+1)}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies F(t + \Delta t) &= \exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right) F(t) \quad (\text{TAYLOR **Reihe**)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\Delta t \frac{d}{dt}\right)^j F(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Warnungen:**

1. Wenn  $F(t)$  beliebig oft stetig differenzierbar ist, folgt daraus noch **nicht**, daß  $\exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right) F(t)$  für hinreichend kleines  $|\Delta t|$  konvergiert!

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Wir benutzen die übliche Schreibweise

$$F^{(\nu)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^\nu F(t).$$

<sup>14</sup>Setze  $t_1 = t$  und  $t_1 - t_2 = \Delta t$ .

2. Selbst wenn z.B.  $\exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right)F(0)$  für hinreichend kleines  $|\Delta t|$  konvergiert, kann es passieren, daß

$$F(\Delta t) \neq \exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right)F(0) \quad \forall t > 0$$

(siehe dazu Lemma 9.1.7 von (Lücke, eine)).

**Anmerkung:** Funktionen  $F(t)$  mit

$$F(t + \Delta t) = \exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right)F(t) \quad \text{für hinr. kleine } |\Delta t|$$

nennt man (an der Stelle  $t$ ) **analytisch**.

Viele Differentialgleichungen lassen sich mithilfe der TAYLOR-Entwicklung **systematisch** lösen.

**Beispiele:**

- (i) Lösungen von

$$t_0 \dot{f}(t) = f(t) \tag{4.14}$$

sind offensichtlich beliebig oft differenzierbar, die Konvergenz der TAYLOR-Reihe ist offensichtlich und wegen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} f(t) dt \\ &= \underset{\text{Mittelwerts.}}{\frac{1}{n!}} \left(\frac{d}{dt'}\right)^{n+1} f(t') \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t_2 - t_1}{t_0}\right)^{n+1} \left(\frac{d}{dt'}\right)^{n+1} f(t') \text{ für geeign. } t' \end{aligned}$$

konvergiert das Restglied (Integralausdruck) in (4.12) gegen Null. Es gilt also (4.13) und nimmt für  $t = 0$  nach (4.14) die Form

$$f(\Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^j f(0)$$

an. Folglich ist  $f(t) = \exp\left(\frac{t}{t_0}\right)$  die **eindeutige** Lösung von (4.14) zum Anfangswert  $f(0) = 1$ .

- (ii) Entsprechend<sup>15</sup> erhält man  $f(t) = \cos(\omega_0 t)$  resp.  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$  als eindeutige Lösung der Oszillatorgleichung

$$\ddot{f}(t) + (\omega_0)^2 f(t) = 0$$

zu den Anfangswerten

$$f(0) = 1, \quad \dot{f}(0) = 0$$

resp.

$$f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = \omega_0.$$

Mit

$$\frac{d}{dt} \Phi \left( \mathbf{x} + \frac{t}{t_0} \mathbf{a} \right) \stackrel{\text{Def. 4.2}}{=} \left( \mathcal{L}_{\frac{\mathbf{a}}{t_0}} \Phi \right) \left( \mathbf{x} + \frac{t}{t_0} \mathbf{a} \right) \stackrel{(4.1)}{=} \frac{1}{t_0} (\mathcal{L}_{\mathbf{a}} \Phi) \left( \mathbf{x} + \frac{t}{t_0} \mathbf{a} \right)$$

folgt aus (4.12) für  $t_1 = 0$

$$\begin{aligned} & \Phi \left( \mathbf{x} + \frac{t_2}{t_0} \mathbf{a} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} \left( \frac{t_2}{t_0} \right)^\nu \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^\nu \Phi \right) (\mathbf{x}) + \frac{1}{n!} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_0} \left( \frac{t_2-t}{t_0} \right)^n \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^{n+1} \Phi \right) \left( \mathbf{x} + \frac{t}{t_0} \mathbf{a} \right) dt \end{aligned}$$

und somit nach Variablen-Substitution  $t \mapsto \lambda(t) = t/t_0$  entspr. (3.92) für  $t_2 = t_0$ :

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^\nu \Phi \right) (\mathbf{x}) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-\lambda)^n \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^{n+1} \Phi \right) (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}) d\lambda. \quad (4.15)$$

Für beliebig oft stetig differenzierbares  $\Phi(\mathbf{x})$  gilt also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_0} \left( \frac{t_2-t}{t_0} \right)^n \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^{n+1} \Phi \right) \left( \mathbf{x} + \frac{t}{t_0} \mathbf{a} \right) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \implies & \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \left( \exp(\mathcal{L}_{\mathbf{a}} \Phi) \right) (\mathbf{x}) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{a}})^\nu \Phi \right) (\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aus (4.3) und

$$\text{grad} \Phi(x^1 \mathbf{b}_1 + x^2 \mathbf{b}_2 + x^3 \mathbf{b}_3) \stackrel{(4.3), (4.8)}{=} \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi(x^1 \mathbf{b}_1 + x^2 \mathbf{b}_2 + x^3 \mathbf{b}_3)$$

folgt

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_{a^1\mathbf{b}_1+a^2\mathbf{b}_2+a^3\mathbf{b}_3}\Phi)(x^1\mathbf{b}_1+x^2\mathbf{b}_2+x^3\mathbf{b}_3) \\ &= \left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}+a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\Phi(x^1\mathbf{b}_1+x^2\mathbf{b}_2+x^3\mathbf{b}_3). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Daher ist (4.16) gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!}\int_0^{t_2}\frac{1}{t_0}\left(\frac{t_2-t}{t_0}\right)^n\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}+a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^{n+1}\Phi(x^1+\lambda a^1,x^2+\lambda a^2,x^3+\lambda a^3)dt \xrightarrow{n\rightarrow\infty} 0 \\ & \implies \Phi(x^1+a^1,x^2+a^2,x^3+a^3)=\exp\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}+a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\Phi(x^1,x^2,x^3). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Eine entsprechende Formel gilt natürlich für die TAYLOR-Entwicklung von Funktionen von mehr als drei Veränderlichen.

Bei der Berechnung von  $\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}+a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^\nu$  erhebt sich die Frage, wann partielle Ableitungen miteinander vertauschbar sind. Dazu:

**Lemma 4.1.5** Sei  $f(q_1, q_2)$  eine  $2\times$  stetig differenzierbare Funktion der Veränderlichen  $q_1, q_2$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}f(q_1, q_2)=\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_1}f(q_1, q_2)$$

für alle  $q_1, q_2$ .

**Beweisskizze:** Die Behauptung ergibt sich durch 2-fache Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf

$$\begin{aligned} & (f(q_1+\epsilon_1, q_2+\epsilon_2)-f(q_1, q_2+\epsilon_2))-(f(q_1+\epsilon_1, q_2)-f(q_1, q_2)) \\ &= (f(q_1+\epsilon_1, q_2+\epsilon_2)-f(q_1+\epsilon_1, q_2))-(f(q_1, q_2+\epsilon_2)-f(q_1, q_2)) \end{aligned}$$

in beiden möglichen Reihenfolgen. ■

Mit (4.7) (bzw. (4.1) im Falle  $\mathbf{a} \propto \mathbf{b}$ ) ergibt sich daraus die

**Folgerung 4.1.6**

- Gegeben: (i)  $2 \times$  stetig differenzierbares Skalarfeld  $\Phi$ ,  
(ii) Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

Behauptung:  $(\mathcal{L}_{\mathbf{a}}(\mathcal{L}_{\mathbf{b}}\Phi))(\mathbf{x}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}_{\mathbf{a}}\Phi))(\mathbf{x})$ .

## 4.2 Wegintegrale

### 4.2.1 Definitionen

Ein Massenpunkt  $m$  bewege sich unter dem Einfluß eines Kraftfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  sowie weiterer Zusatzkräfte. Die resultierende Ortsvektorfunktion sei  $\mathbf{x}(t)$ .

Während des Zeitintervalls  $[t_1, t_2]$  verrichtet dann das Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  an  $m$  die Arbeit<sup>16</sup>

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) dt.$$

Man erkennt leicht, daß diese Arbeit nur von dem Wegstück

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}(t) : t \in [t_1, t_2]\}$$

sowie der Durchlaufrichtung, nicht dagegen vom genaueren Bewegungsablauf abhängt:<sup>17</sup>

**Lemma 4.2.1** Seien  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $\mathbf{y}(t)$  eine stetig differenzierbare Vektorfunktion und  $t(t')$  stetig differenzierbare Zeit-wertige Funktion der Zeit  $t'$ . Mit

$$\mathbf{y}(t') \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t(t')), \quad t_1 \stackrel{\text{def}}{=} t(t'_1), \quad t_2 \stackrel{\text{def}}{=} t(t'_2)$$

gilt dann für beliebige Zeitpunkte  $t'_1, t'_2$ :

$$\int_{t'_1}^{t'_2} \dot{\mathbf{y}}(t') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}(t')) dt' = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) dt.$$

**Beweisskizze:** Da die Funktion  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$  von  $t$  voraussetzungsgemäß stetig ist,

<sup>16</sup>Vergleiche Abschnitt 3.4.1.

<sup>17</sup>Man beachte Folgerung 4.2.3.



besitzt sie eine Stammfunktion<sup>18</sup>  $f(t)$ . Dafür gilt

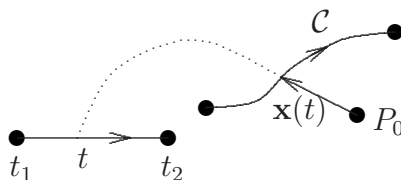
$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt &\stackrel{(3.53)}{=} f(t_2) - f(t_1) \\
 &= f(t(t'_2)) - f(t(t'_1)) \\
 &\stackrel{(3.53)}{=} \int_{t'_1}^{t'_2} \left( \frac{d}{dt'} f(t(t')) \right) dt' \\
 &\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \int_{t'_1}^{t'_2} \underbrace{\left( \frac{d}{dt'} t(t') \right)}_{\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \dot{\mathbf{y}}(t')} \underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t(t')) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t(t')))}_{= \mathbf{y}(t')} dt'. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Diese Überlegungen führen auf die folgende Definition:

**Definition 4.2.2** Als **einfaches Wegstück** bezeichnen wir eine streng geordnete<sup>19</sup> Menge  $\mathcal{C}$  von Ortsvektoren, für die eine **einfache Parametrisierung** existiert; d.h. eine stetig differenzierbare Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  sowie ein Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  ( $t_1 \neq t_2$ ) mit:

- (i)  $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}(t) : t \in [t_1, t_2]\}$ ,
- (ii)  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$  für alle  $t$ ,
- (iii)  $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2 \implies \mathbf{x}(\tau_1) \prec \mathbf{x}(\tau_2)$ .

Man bezeichnet  $\mathbf{x}(t_1)$  als den **Anfangspunkt** und  $\mathbf{x}(t_2)$  als den **Endpunkt** von  $\mathcal{C}$ .



### Folgerung 4.2.3

- Gegeben: (i) einfaches Wegstück  $\mathcal{C}$ ,  
 (ii) einfache Parametrisierungen  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$   
 und  $(\mathbf{y}(t'), t'_1, t'_2)$  von  $\mathcal{C}$ .

Behauptung: Es existiert eine stetig differenzierbare, Zeit-wertige Funktion  $t(t')$  mit

$$t_1 = t(t'_1), \quad t_2 = t(t'_2)$$

<sup>18</sup>Beachte Fußnote 20.

<sup>19</sup>Die Ordnungsrelation sei mit  $\prec$  bezeichnet.

und

$$\mathbf{y}(t') = \mathbf{x}(t(t')) \quad \forall t'.$$

**Beweisskizze:** Aus den Voraussetzungen (i) und (ii) folgt die Existenz einer über  $[t'_1, t'_2]$  streng monoton wachsenden, stetigen Funktion  $t(t')$  mit

$$\mathbf{y}(t') = \mathbf{x}(t(t')).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren daher zu beliebigen Zeitpunkten  $\tau_1, \tau_2$  Zwischenzeitpunkte  $\hat{\tau}, \hat{\tau}'$  mit<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(\tau_1) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\hat{\tau}) &= \dot{\mathbf{y}}(\tau_1) \cdot \frac{\mathbf{y}(\tau_2) - \mathbf{y}(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \\ &= \dot{\mathbf{y}}(\tau_1) \cdot \frac{\mathbf{x}(t(\tau_2)) - \mathbf{x}(t(\tau_1))}{\tau_1 - \tau_2} \\ &= \frac{t(\tau_2) - t(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \dot{\mathbf{y}}(\tau_1) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t(\hat{\tau}')). \end{aligned}$$

Durch Grenzbetrachtung  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$  erkennt man daraus mit Bedingung (ii) von Definition 4.2.2, daß  $t(t')$  über  $[t'_1, t'_2]$  stetig differenzierbar ist. ■

**Definition 4.2.4** Seien  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ein stetiges Vektorfeld und  $\mathcal{C}$  ein einfaches Wegstück. Dann bezeichnet man den nach Lemma 4.2.1 und Folgerung 4.2.3 von der speziellen Wahl der einfachen Parametrisierung  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$  unabhängigen Ausdruck

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt$$

als das **Wegintegral** von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  über  $\mathcal{C}$ .

### Anmerkungen:

- (i) Anstelle des Begriffs *Wegintegral* werden oft auch die Begriffe *Linienintegral* oder *Kurvenintegral* benutzt.
- (ii) Die Wahl der Zeit  $t$  als Integrationsparameter ist natürlich mathematisch belanglos und entspricht lediglich der physikalischen Motivation.
- (iii) Als Wegintegral eines Skalarfeldes  $\Phi(\mathbf{x})$  definiert man mitunter

$$\int_{\mathcal{C}} \Phi(\mathbf{x}) dl_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\mathbf{x}(t)) \underbrace{|\dot{\mathbf{x}}(t)| dt}_{=dl_{\mathbf{x}}} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \Phi(\mathbf{x}(t)) \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt, \quad (4.19)$$

<sup>20</sup>Das innere Produkt mit  $\dot{\mathbf{y}}(\tau_1)$  ist notwendig, weil der Mittelwertsatz nicht für Vektorwertige Funktionen gilt.

was natürlich wiederum von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängig ist.

### 4.2.2 Eigenschaften des Wegintegrals

Aus Definition 4.2.4 und der Linearitätseigenschaft (3.54) für gewöhnliche Integrale erkennt man sofort folgende Linearitätseigenschaft des Wegintegrals:

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{F}_2(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.20)$$

Entsprechend ergibt sich aus dem Mittelwertsatz für gewöhnliche Integrale derjenige für Wegintegrale:

#### Lemma 4.2.5

- Gegeben: (i) *stetiges Vektorfeld*  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *einfaches Wegstück*  $\mathcal{C}$ ,  
(iii) *einfache Parametrisierung*  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$  von  $\mathcal{C}$ ,

Behauptung: *Für geeignetes*  $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}$  *gilt*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = |\mathcal{C}| \mathbf{t}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}'),$$

wobei

$$|\mathcal{C}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt$$

die **Weglänge** von  $\mathcal{C}$  und

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}$$

den **Bahntangenten-Vektor** am Punkt  $\mathbf{x}(t)$  bezeichnet.

Daraus ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

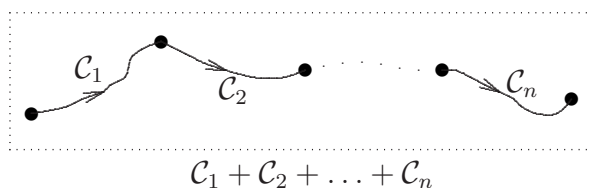
$$\left| \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right| \leq |\mathcal{C}| \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} |\mathbf{F}(\mathbf{x})|. \quad (4.21)$$

#### Anmerkungen:

- (i) Nach (4.20) und (4.21) ändert sich das Wegintegral also wenig, wenn man das Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ‘wenig’ verändert.

- (ii) In Abschnitt 4.3.4 werden wir sehen, daß sich das Wegintegral eines **Vektorfeldes** auch dann nur wenig ändert, wenn man das Wegstück  $\mathcal{C}$  ‘wenig’ deformiert.
- (iii) Die Stetigkeitseigenschaften (i) und (ii) sollte das Wegintegral auch besitzen, um **physikalisch** brauchbar zu sein.

Wenn  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  einfache Wegstücke sind, für die der Endpunkt von  $\mathcal{C}_\nu$  jeweils mit dem Anfangspunkt von  $\mathcal{C}_{\nu+1}$  übereinstimmt, dann bezeichnet man mit  $\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n$  das aus  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  zusammengesetzte Wegstück entsprechender Orientierung (Durchlaufrichtung):



Dabei kann der zusammengesetzte Weg durchaus **geschlossen** sein, d.h. der Anfangspunkt von  $\mathcal{C}_1$  mit dem Endpunkt von  $\mathcal{C}_n$  übereinstimmen. Dann macht es keinen Sinn mehr,  $\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n$  Anfangs- und Endpunkt zuzuordnen. Falls  $\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n$  wieder ein einfaches Wegstück ist (also ohne Knickstellen, ohne Überschneidungen und nicht geschlossen), dann **gilt** offensichtlich:

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.22)$$

Andernfalls nimmt man naheliegenderweise die rechte Seite von (4.22) als **Definition** für die linke.

Kehrt man bei einem (evtl. zusammengesetzten) Wegstück  $\mathcal{C}$  die Orientierung um, so ergibt sich wiederum ein Wegstück, das man mit  $-\mathcal{C}$  bezeichnet.<sup>21</sup> Mit dieser Definition gilt:<sup>22</sup>

$$\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Wegintegrale über konservative Vektorfelder

Das **Wegintegral**  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  war so definiert, daß es für ein Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , das auf einen Massenpunkt  $m$  wirkt, der längs  $\mathcal{C}$  bewegt wird, die **Arbeit** angibt, die

Version vom 26. März 2009

<sup>21</sup>Wenn  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{C}$  ist, dann ist also  $(\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t_2 - t), 0, t_2 - t_1)$  eine Parametrisierung von  $-\mathcal{C}$ .

<sup>22</sup>Aber:  $\int_{\mathcal{C}} \Phi(\mathbf{x}) dl_{\mathbf{x}} = \int_{-\mathcal{C}} \Phi(\mathbf{x}) dl_{\mathbf{x}}$ .

das Feld an  $m$  während dessen Bewegung vom Anfangs- zum Endpunkt von  $\mathcal{C}$  verrichtet.<sup>23</sup> Wenn  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  konservativ ist, also von der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\text{grad } V(\mathbf{x}),$$

ergibt sich entsprechend zur Ableitung des einfachen Energiesatzes (3.69):

$$-\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = V(\mathbf{x}_2) - V(\mathbf{x}_1),$$

wobei  $\mathbf{x}_1$  den Ortsvektor des Anfangs- und  $\mathbf{x}_2$  den des End-Punktes von  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Also:

Die Arbeit, die man **gegen** ein konservatives Kraftfeld bei Verschiebung (mit beliebigem Geschwindigkeitsverlauf) verrichten muß, stimmt mit der Änderung der zugehörigen potentiellen Energie überein.

Mathematisch formuliert:

#### Lemma 4.2.6

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Skalarfeld*  $\Phi(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *einfaches Wegstück*  $\mathcal{C}$  mit Anfangspunkt  $\mathbf{x}_1$  und Endpunkt  $\mathbf{x}_2$ .

Behauptung:  $\int_{\mathcal{C}} (\text{grad } \Phi(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)$ .

**Beweis:** Nach Definition 4.2.2 existiert eine einfache Parametrisierung  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$  von  $\mathcal{C}$  mit

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2). \quad (4.24)$$

Nach Definition 4.2.4 gilt damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (\text{grad } \Phi(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}(t)) dt \\ &\stackrel{(4.5)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) \right) dt \\ &\stackrel{\text{Haupts.}}{=} \Phi(\mathbf{x}(t_2)) - \Phi(\mathbf{x}(t_1)), \end{aligned}$$

woraus mit (4.24) die Behauptung folgt. ■

<sup>23</sup>Natürlich können dabei zusätzliche Kräfte an  $m$  angreifen.

Da nach Lemma 4.2.6 der Wert des Wegintegrals über ein konservatives Vektorfeld (außer vom Feld) nur von Anfangs- und Endpunkt des (als einfach vorausgesetzten) Wegstücks abhängt, ist die Schreibweise

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\substack{\text{bel. einf. Weg} \\ \text{von } \mathbf{x}_1 \text{ nach } \mathbf{x}_2}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad \text{für konservative } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

sinnvoll. Es gilt sogar:

**Lemma 4.2.7** *Ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ist genau dann konservativ, wenn für je zwei einfache Wegstücke  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  aus der Übereinstimmung der Anfangs- und Endpunkte stets*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

folgt.

**Beweis:** Es sei zunächst angenommen, daß für je zwei einfache Wegstücke  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  aus der Übereinstimmung der Anfangs- und Endpunkte stets

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

folgt. Dann ist die Definition

$$\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}'$$

im Sinne von (4.25) erlaubt und es gilt

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\Phi)(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{Def. 4.1.2}}{=} \left( \frac{d}{d\xi} \int_0^{\mathbf{x}+\xi\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right) \Big|_{\xi=0} \\ &\stackrel{(4.22)}{=} \left( \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+\xi\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right) \Big|_{\xi=0} \\ &\stackrel{\text{Def. 4.2.4}}{=} \left( \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x} + \xi'\mathbf{v}) d\xi' \right) \Big|_{\xi=0} \\ &\stackrel{\text{Haupts.}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{v}$ . Nach (4.3) folgt daraus

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}),$$

d.h. die Konservativität von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Setzt man umgekehrt voraus, daß  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  konservativ ist, so folgt die entsprechende Wegunabhängigkeit direkt aus Lemma 4.2.6. ■

Mit (4.22) und (4.23) ergibt sich aus Lemma 4.2.7 unmittelbar die

**Folgerung 4.2.8** *Ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ist genau dann konservativ, wenn*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für jeden geschlossenen Weg } \mathcal{C}$$

*(der betrachteten Klasse) gilt.*

Eine anschauliche Konsequenz der Konservativität ergibt sich aus der folgenden

**Definition 4.2.9** *Unter einer **Feldlinie** eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  versteht man eine glatte, orientierte Kurve maximaler Länge, auf der  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  nirgends verschwindet und in Richtung der Kurventangente zeigt.*

Da sich also eine Feldlinie von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  stets aus einfachen Wegstücken  $\mathcal{C}$  zusammensetzt, für deren einfache Parametrisierungen  $(\mathbf{x}(t), t_1, t_2)$  stets  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) > 0$  gilt, ergibt sich aus Folgerung 4.2.8 und Definition 4.2.4 unmittelbar:

**Folgerung 4.2.10** *Ein konservatives Vektorfeld kann keine geschlossene Feldlinie besitzen.*

**Warnung:** Aus dem Fehlen geschlossener Feldlinien folgt umgekehrt noch nicht<sup>24</sup> die Konservativität des Vektorfeldes!

#### 4.2.4 Beispiel: Entropie

**Vorbemerkung:** Für die Abschnitte 4.1 und 4.1 war der Bezug auf den 3-dimensionalen Raum der Ortsvektoren nicht wesentlich. Im folgenden verwenden wir die entsprechende Übertragung auf den 2-dimensionalen Fall. Dabei erlauben wir uns außerdem die Verwendung von Vektoren mit Komponenten unterschiedlicher physikalischer Dimension.<sup>25</sup>

Sei  $\mathcal{S}$  ein **geschlossenes** thermodynamisches System, dessen Gleichgewichtszustände eindeutig durch den **Druck**  $P$  und das **Volumen**  $V$  charakterisiert seien.

Version vom 26. März 2009

<sup>24</sup>Siehe Schluß von Abschnitt 4.2.4.

<sup>25</sup>Da die **Addition** unterschiedlicher physikalischer Größen grundsätzlich vermieden wird, entstehen dadurch keine Probleme.

**Quasistatische Prozesse** (kontinuierliche Veränderung der Gleichgewichtszustände) lassen sich dann als Wegstücke  $\mathcal{C}$  in der  $V, P$ -Ebene darstellen, und nach dem **1. Hauptsatz der Thermodynamik** ist dann die **innere Energie** (geeignet normierte Gesamtenergie) des (ruhenden) Systems eine Funktion  $U(V, P)$ . Die Änderung der inneren Energie während eines quasistatischen Prozesses ist also nach Lemma 4.2.6 durch das Integral

$$\Delta U = \int_{\mathcal{C}} \text{grad } U(V, P) \cdot d \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix}$$

über den entsprechenden Weg  $\mathcal{C}$  gegeben.

Die mechanische Arbeit  $\Delta A$ , die an  $\mathcal{S}$  während eines solchen Prozesses verrichtet wird, sei stets durch das Wegintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{A}(V, P) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

über  $\mathcal{C}$  gegeben:

$$\Delta A = - \int_{\mathcal{C}} P \, dV \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(V, P) \cdot d \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix}.$$

Die Differenz  $\Delta Q \stackrel{\text{def}}{=} \Delta U - \Delta A$  bezeichnet man als die dem (geschlossenen!) System während des Prozesses zugeführte **Wärmemenge**. Sie ist also das Wegintegral

$$\Delta Q = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q}(V, P) \cdot d \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix}$$

über das Vektorfeld

$$\mathbf{Q}(V, P) = \begin{pmatrix} C_P(V) \frac{\partial}{\partial V} \hat{T}(V, P) \\ C_V(P) \frac{\partial}{\partial P} \hat{T}(V, P) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } U(V, P) - \mathbf{A}(V, P),$$

wobei:

$$\begin{aligned} \hat{T}(V, P) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Temperatur,} \\ C_p(V) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Wärmekapazität von } \mathcal{S} \text{ bei konstantem Druck } P, \\ C_V(P) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Wärmekapazität von } \mathcal{S} \text{ bei konstantem Volumen } V. \end{aligned}$$

Da  $\int_{\mathcal{C}} P \, dV$  für geschlossene Wege  $\mathcal{C}$  mit dem Inhalt des von  $\mathcal{C}$  berandeten Teilgebietes<sup>26</sup> der  $V, P$ -Ebene übereinstimmt, kann nach Folgerung 4.2.8 das Vektorfeld  $\mathbf{A}(V, P)$  nicht konservativ sein, obwohl seine Feldlinien alle parallel zur  $V$ -Achse, also nicht geschlossen, sind. Wegen

$$\mathbf{A}(V, P) = \text{grad } U(V, P) - \mathbf{Q}(V, P)$$

<sup>26</sup>Es genügt, einfache Rechtecke zu betrachten.



kann dann auch  $\mathbf{Q}(V, P)$  nicht konservativ sein.

In der Thermodynamik schließt man aus der Unmöglichkeit, Wärme **vollständig** in mechanische Arbeit umzuwandeln (**2. Hauptsatz**), daß dagegen das Wegintegral über  $\frac{1}{\hat{T}}\mathbf{Q}$  nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt (außer vom Feld selbst) und somit im Sinne von (4.25) die Definition

$$S(V, P) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(V_0, P_0)}^{(V, P)} \left( \frac{1}{\hat{T}(V', P')} \mathbf{Q}(V', P') \right) \cdot d \begin{pmatrix} V' \\ P' \end{pmatrix} \quad \textit{Entropie}$$

erlaubt.

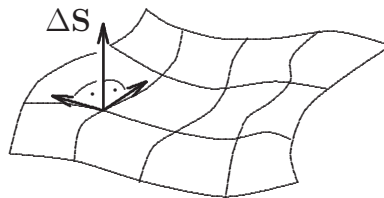
## 4.3 Oberflächenintegrale

### 4.3.1 Definitionen

Nach Aufgabe 15 ist der Strom  $J$  eines Mediums konstanter Stromdichte  $\mathbf{j}$  durch eine ebene Fläche  $\mathcal{S}$  mit dem Flächenvektor<sup>27</sup>  $\mathbf{S}$ :

$$J = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}.$$

Zur Bestimmung des allgemeinen Stromes durch eine gekrümmte Fläche ist diese durch eine Summe ebener Flächen zu approximieren, über die  $\mathbf{j}$  näherungsweise als räumlich konstant angesehen werden kann:



Die Summe der Teilströme liefert dann im Grenzübergang (als Oberflächenintegral) den Gesamtstrom durch  $\mathcal{S}$ .

Diese Überlegungen führen auf folgende

**Definition 4.3.1** Als **einfaches Flächenstück** bezeichnen wir eine Menge  $\mathcal{S}$  von Ortsvektoren gemeinsam mit einer Abbildung  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  von  $\mathcal{S}$  in die Menge der dimensionslosen Einheitsvektoren, sofern dazu eine **einfache Parametrisierung**  $(\mathbf{x}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$  existiert, d.h. Zeitpunkte  $s_1, s_2, t_1, t_2$  und eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{x}(s, t)$  von  $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$  auf  $\mathcal{S}$  mit:

Version vom 26. März 2009

<sup>27</sup>Der Flächenvektor ist per. def. senkrecht zur Fläche und sein Betrag stimmt mit dem Flächeninhalt überein.

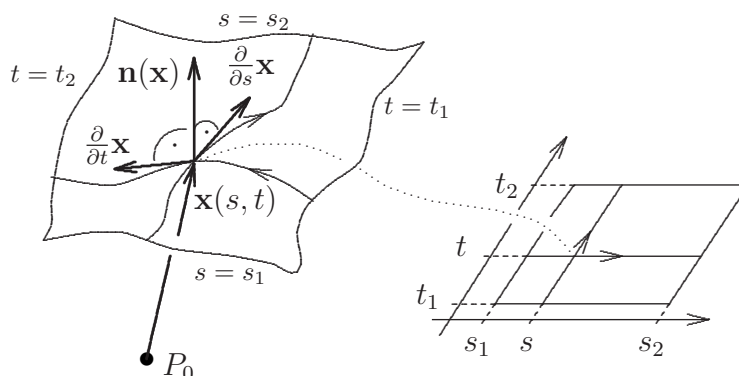
(i)

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \neq 0 \quad \text{für alle } s, t,$$

(ii)

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(s, t)) = \frac{\left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t)}{\left| \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \right|} \quad \text{für alle } s, t.$$

Den Vektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  bezeichnet man als die **Flächennormale** von  $\mathcal{S}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ .



Mit entsprechendem Mehraufwand im Vergleich zu (4.19) und Folgerung 4.2.3 erhält man

### Lemma 4.3.2

- Gegeben: (i) stetiges Vektorfeld  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ ,  
(ii) einfaches Flächenstück  $\mathcal{S}$ .

Behauptung: Das Doppelintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \right) ds \right) dt$$

liefert für jede einfache Parametrisierung  $(\mathbf{x}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$  von  $\mathcal{S}$  den gleichen Wert.

**Definition 4.3.3** Seien  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetiges Vektorfeld und  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück. Dann bezeichnet man den nach Lemma 4.3.2 von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängigen Ausdruck

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \right) ds \right) dt$$

als das **Oberflächenintegral** von  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  über  $\mathcal{S}$ .

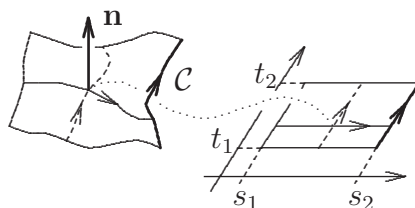
**Anmerkungen:**

- (i) Falls  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  tatsächlich eine Stromdichte ist, gibt also  $\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x$  den Gesamtstrom durch  $S$  an, der positiv ist, wenn er in Richtung der Flächennormalen durch  $S$  hindurchtritt.
- (ii) Als Oberflächenintegral eines Skalarfeldes  $\Phi(\mathbf{x})$  definiert man mitunter

$$\begin{aligned} \int_S \Phi(\mathbf{x}) dS_x &\stackrel{\text{def}}{=} \int_S (\Phi(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S}_x \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \Phi(\mathbf{x}(s, t)) \left| \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \right| ds \right) dt, \end{aligned}$$

was natürlich ebenfalls von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängig ist.

**Definition 4.3.4** Seien  $\mathcal{C}$  ein einfaches Wegstück und  $S$  ein einfaches Flächenstück. Dann nennen wir  $\mathcal{C}$  einen **Teilrand** von  $S$ , falls eine einfache Parametrisierung  $(\mathbf{x}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$  von  $S$  existiert, für die  $(\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(s_2, t), t_1, t_2)$  eine einfache Parametrisierung von  $\mathcal{C}$  ist:

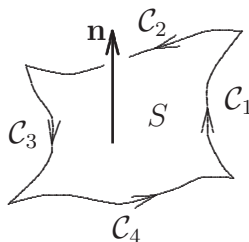


Anschaulich leicht verständlich ist:

**Folgerung 4.3.5** Jedes einfache Flächenstück  $S$  besitzt genau vier bis auf zyklische Vertauschung der Indizes eindeutige Teilränder  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_4$ , die sich zu einem geschlossenen Weg

$$\partial S \stackrel{\text{def}}{=} ((\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) + \mathcal{C}_3) + \mathcal{C}_4$$

aneinanderfügen:



**Definition 4.3.6** Den einem einfachen Flächenstück  $\mathcal{S}$  gemäß Folgerung 4.3.5 eindeutig zugeordneten Weg  $\partial\mathcal{S}$ , der aus den Teilrändern resultiert, bezeichnet man als den (orientierten) **Rand** von  $\mathcal{S}$ .

**Anmerkung:** Wenn man die Orientierung des Randes kennt, liegt damit bereits die Orientierung der Flächennormalen fest.

## 4.3.2 Beispiele geeigneter Flächenparametrisierungen

### Projektionsintegral

Seien  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetiges Vektorfeld,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  eine Orthonormalbasis und

$$\left( \mathbf{x}(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ f(s) + tg(s) \\ x^3(s, f(s) + tg(s)) \end{pmatrix}, s_1, s_2, t_1, t_2 \right)$$

eine einfache Parametrisierung<sup>28</sup> des Flächenstücks  $\mathcal{S}$ . Dann ist

$$\left( \mathbf{x}_3(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} s \\ f(s) + tg(s) \\ 0 \end{pmatrix}, s_1, s_2, t_1, t_2 \right)$$

eine einfache Parametrisierung der **Projektion**  $\mathcal{S}_3$  von  $\mathcal{S}$  auf die  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ -Ebene und mit

$$\mathbf{j}_k(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

gilt:<sup>29</sup>

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_3(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{j}_3(\mathbf{x}(s, t)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}_3(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_3(s, t) \right) ds \right) dt \\ &= \int_{\mathcal{S}_3} \left( \mathbf{j}(x^1, x^2, x^3(x^1, x^2)) \cdot \mathbf{e}_3 \right) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Entsprechende Formeln gelten für die Wegintegrale von  $\mathbf{j}_1$  und  $\mathbf{j}_2$  über  $\mathcal{S}$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>28</sup>Natürlich läßt nicht jedes einfache Flächenstück eine solche Parametrisierung zu.

<sup>29</sup>Wegen

$$\mathbf{e}_3 \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t) \right) = \mathbf{e}_3 \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}_3(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_3(s, t) \right) = \left| \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}_3(s, t) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_3(s, t) \right| .$$

### Ausschnitt einer Kugeloberfläche

Hier bietet sich die Parametrisierung mithilfe von **Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)**  $r, \vartheta, \varphi$  an:

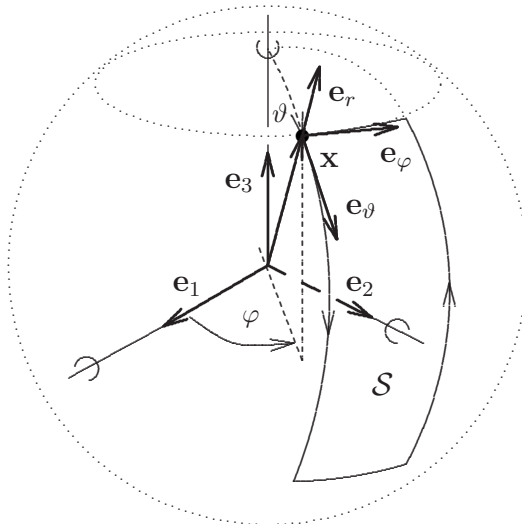
$$\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + r \cos \vartheta \mathbf{e}_3$$

Im einfachsten Falle ist dann

$$\left( \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(R, \vartheta, \varphi), \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2 \right),$$

wobei:  $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi$ ,  $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ ,

eine einfache Parametrisierung von  $\mathcal{S}$ :<sup>30</sup>



$$r \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{x}| = R, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r.$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) = R \mathbf{e}_{\vartheta}(R, \vartheta, \varphi), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi}(R, \vartheta, \varphi),$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(R, \vartheta, \varphi)) = \mathbf{e}_r(R, \vartheta, \varphi)$$

ergibt sich dann für das Oberflächenintegral:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} j^r(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta d\vartheta \right) d\varphi,$$

$$\text{wobei: } j^r(R, \vartheta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{j}(\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi)) \cdot \mathbf{e}_r(r, \vartheta, \varphi).$$

Für den Spezialfall  $j^r = 1$  ergibt sich offensichtlich der Flächeninhalt

$$|\mathcal{S}| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R^2 \sin \vartheta d\vartheta \right) d\varphi,$$

<sup>30</sup>In diesem Falle zeigt die Flächennormale aus der Kugel heraus.  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{e}_3$ ,  $\varphi$  der Winkel, den die  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene mit der  $\mathbf{x}$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene bildet.

dessen rein winkelabhängigen Anteil

$$\Omega_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = -(\varphi_2 - \varphi_1) (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1)$$

man als den zugehörigen **Raumwinkel** (Winkelbereich, den  $\mathcal{S}$ , vom Ursprung aus gesehen, überdeckt) bezeichnet.

Im Grenzfall  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (0, \pi, 0, \pi)$  konvergiert  $\Omega_S$  gegen

$$\int_{\text{voll. Winkelber.}} d\Omega = 4\pi$$

und  $|\mathcal{S}|$  gegen die gesamte Kugeloberfläche, die sich somit zu  $4\pi R^2$  ergibt.

### Ausschnitt einer Zylinderoberfläche

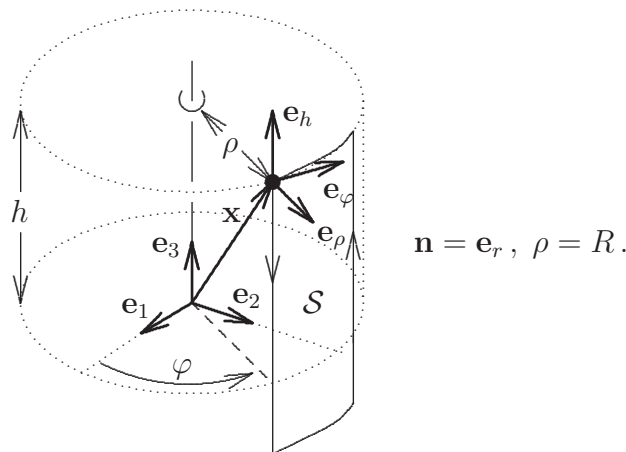
Hier bietet sich die Parametrisierung mithilfe von **Zylinderkoordinaten**  $\rho, \varphi, h$  an:

$$\mathbf{x}(\rho, \varphi, h) = \rho \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_2 + h \mathbf{e}_3.$$

Im einfachsten Falle ist dann

$$\left( \mathbf{x}(\varphi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(R, \varphi, h), \varphi_1, \varphi_2, h_1, h_2 \right), \quad \text{wobei: } 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi,$$

eine einfache Parametrisierung von  $\mathcal{S}$ :<sup>31</sup>



Mit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}(\varphi, h) = R \mathbf{e}_\varphi(R, \varphi, h), \quad \frac{\partial}{\partial h} \mathbf{x}(\varphi, h) = \mathbf{e}_h(R, \varphi, h),$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(R, \varphi, h)) = \mathbf{e}_\rho(R, \varphi, h)$$

<sup>31</sup>In diesem Falle zeigt die Flächennormale aus dem Zylinder heraus.

ergibt sich dann für das Oberflächenintegral:

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x = \int_{h_1}^{h_2} \left( \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} j^\rho(R, \varphi, h) R d\varphi \right) dh,$$

wobei:  $j^\rho(\rho, \varphi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{j}(\mathbf{x}(\rho, \varphi, h)) \cdot \mathbf{e}_\rho(\rho, \varphi, h)$ .

### 4.3.3 Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Aus Definition 4.3.3 und der Linearitätseigenschaft (3.54) für gewöhnliche Integrale erkennt man sofort folgende Linearitätseigenschaft des Oberflächenintegrals:

$$\int_S (\alpha \mathbf{j}_1(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{j}_2(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S}_x = \alpha \int_S \mathbf{j}_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x + \beta \int_S \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x \quad (4.26)$$

Entsprechend ergibt sich durch 2-fache Anwendung des Mittelwertsatzes für gewöhnliche Integrale der Mittelwertsatz für Oberflächenintegrale:

#### Lemma 4.3.7

- Gegeben: (i) *stetiges Vektorfeld*  $\mathbf{j}(x)$ ,  
(ii) *einfaches Flächenstück*  $\mathcal{S}$ .

Behauptung: Für geeignetes  $\mathbf{x}' \in \mathcal{S}$  gilt

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x = |\mathcal{S}| \mathbf{n}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}'),$$

wobei

$$|\mathcal{S}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_S dS_x$$

der **Flächeninhalt** von  $\mathcal{S}$  ist.

Hieraus folgt direkt die Abschätzung

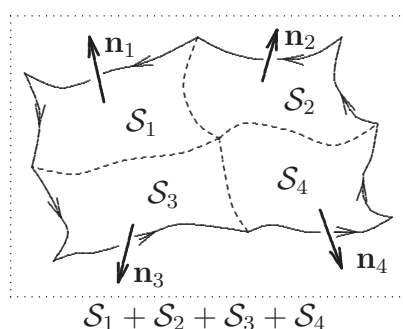
$$\left| \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x \right| \leq |\mathcal{S}| \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} |\mathbf{j}(\mathbf{x})|. \quad (4.27)$$

**Anmerkung:** Die Anmerkungen (i)–(iii) von Abschnitt 4.2.2 bzgl. der Stetigkeitseigenschaften des Wegintegrals gelten für das Oberflächenintegral entsprechend.

Seien  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  einfache Flächenstücke mit folgenden Eigenschaften

- (i) Je zwei Flächenstücke  $\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_k$  haben höchstens Randpunkte gemeinsam.
- (ii) Wenn  $\mathcal{S}_j$  und  $\mathcal{S}_k$  gemeinsam ein Wegstück nicht verschwindender Länge mengenmäßig enthalten, dann haben die zugehörigen Teilränder entgegengesetzte Orientierung.<sup>32</sup>
- (iii) Die Vereinigung der Flächenstücke  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  ist eine ‘vernünftig’ zusammenhängende Menge.
- (iv) Der Durchschnitt von jeweils drei verschiedenen Flächenstücken enthält höchstens einen Punkt.

Unter diesen Bedingungen bezeichnet man mit  $\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n$  das zusammengesetzte Flächenstück entspr. Orientierung (Zuordnung der Flächennormalen):



Als **Rand**  $\partial(\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n)$  bezeichnet man den (geschlossenen) orientierten Weg, der sich aus all den Randstücken zusammensetzt, die nicht in zwei verschiedenen Flächenstücken mengenmäßig enthalten sind. Falls kein solches Randstück existiert,<sup>33</sup> dann nennt man  $\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n$  **geschlossen** und schreibt:  $\partial(\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n) = \emptyset$ .

Falls  $\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n$  wieder ein einfaches Flächenstück ist, ist die neue Definition des Randes äquivalent zur alten Definition 4.3.6. Außerdem gilt dann offensichtlich:

$$\int_{\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} + \dots + \int_{\mathcal{S}_n} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}. \quad (4.28)$$

Andernfalls nimmt man naheliegenderweise die rechte Seite von (4.28) als **Definition** für die linke.

Keht man bei einem Flächenstück  $\mathcal{S}$  die Orientierung um, so ergibt sich wieder ein Flächenstück, das man mit  $-\mathcal{S}$  bezeichnet.<sup>34</sup> Mit dieser Definition gilt:

$$\int_{-\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}. \quad (4.29)$$

<sup>32</sup>Das garantiert die Orientierbarkeit der zusammengesetzten Fläche (fast überall).

<sup>33</sup>Man denke etwa an die Oberfläche eines Würfels.

<sup>34</sup>Wenn  $(\mathbf{x}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{S}$  ist, dann ist also  $(\mathbf{x}(t, s), s_1, s_2, t_1, t_2)$  eine Parametrisierung von  $-\mathcal{S}$ .

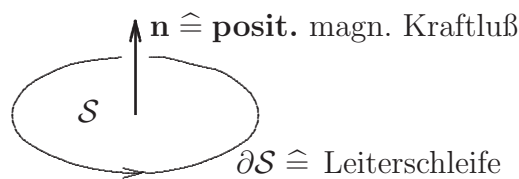


## 4.3.4 Der Satz von STOKES

Es gibt verschiedene physikalische Hinweise auf einen engen Zusammenhang zwischen Flächenintegralen über eine orientierte Fläche  $\mathcal{S}$  und Wegintegralen über deren Rand  $\partial\mathcal{S}$ :

Z.B. lautet das **Induktionsgesetz** der Elektrodynamik — wir benutzen hier als Maßsystem das SI (*Système International d'Unités*, siehe Anhang A.3.3 von (Lücke, edyn)) — bzgl. einer **festen** Leiterschleife längs  $\partial\mathcal{S}$

$$\underbrace{\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}}_{\text{induzierte Spannung}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}}_{\text{magn. Kraftfluß durch } \mathcal{S}}, \quad (4.30)$$



wobei natürlich  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  das von der Zeit  $t$  abhängige elektrische Feld und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  die ebenfalls  $t$ -abhängige magnetische Kraftflußdichte bezeichnet.

Ein weiteres Beispiel ist das **AMPERESche Durchflutungsgesetz** der Magnetostatik

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \quad (4.31)$$

wobei  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  das Magnetfeld und  $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{x})$  die elektrische Leitungsstromdichte bezeichnet.

Es liegt also der Versuch nahe, allgemein das Wegintegral über den Rand  $\partial\mathcal{S}$  eines einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  auf ein Flächenintegral über  $\mathcal{S}$  zurückzuführen:

Seien also  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück und  $(\mathbf{x}(s, t), s_1, s_2, t_1, t_2)$  eine ( $2 \times$  stetig differenzierbare) einfache Parametrisierung von  $\mathcal{S}$ . Dann gilt (mit offensichtlichen schreibtechnischen Abkürzungen)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} & \stackrel{\text{Wegeadd.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathbf{A}(\mathbf{x}(s_2, t)) \cdot \partial_t \mathbf{x}(s_2, t) - \mathbf{A}(\mathbf{x}(s_1, t)) \cdot \partial_t \mathbf{x}(s_1, t) \right) dt \\ & \quad + \int_{s_1}^{s_2} \left( \mathbf{A}(\mathbf{x}(s, t_1)) \cdot \partial_s \mathbf{x}(s, t_1) - \mathbf{A}(\mathbf{x}(s, t_2)) \cdot \partial_s \mathbf{x}(s, t_2) \right) ds \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} & \stackrel{\text{Haupts.}}{=} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \partial_s [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \partial_t \mathbf{x}] - \partial_t [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \partial_s \mathbf{x}] \right) ds dt \\
 & \stackrel{\text{Produkt. Lemma 4.1.5}}{=} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \left( [\partial_s \mathbf{A}(\mathbf{x})] \cdot \partial_t \mathbf{x} - [\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{x})] \cdot \partial_s \mathbf{x} \right) ds dt \\
 & \stackrel{\text{Lemma 4.1.3}}{=} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^3 \left[ (\partial_s \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^j) \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}) \cdot \partial_t \mathbf{x} \right) \right. \\
 & \quad \left. - (\partial_t \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^j) \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}) \cdot \partial_s \mathbf{x} \right) \right] ds dt \\
 & \stackrel{(2.24)}{=} \int_{s_1}^{t_2} \int_{s_1}^{t_2} \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{b}^j \times (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}) \right) \cdot (\partial_s \mathbf{x} \times \partial_t \mathbf{x}) ds dt.
 \end{aligned}$$

Als Resultat ergibt sich also der<sup>35</sup>

### Satz 4.3.8 (Satz von STOKES)

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Vektorfeld*  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *einfaches Flächenstück*  $\mathcal{S}$ ,  
(iii) *Basis*  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ .

Behauptung: 
$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}} \left[ \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \times (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}) \right] \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}.$$

Mit dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale (Lemma 4.3.7) ergibt sich aus dem Satz von STOKES unmittelbar die

### Folgerung 4.3.9

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Vektorfeld*  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *Ortsvektor*  $\mathbf{x}_0$ ,  
(ii) *dimensionsloser Einheitsvektor*  $\mathbf{e}$ ,  
(ii) *Schar einfacher Flächenstücke*  $\mathcal{S}_\epsilon$  mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_\epsilon} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{n}_\epsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{e}\|) = 0$$

( $\mathbf{n}_\epsilon(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Flächennormale von } \mathcal{S}_\epsilon \text{ an der Stelle } \mathbf{x}$ ).

Behauptung: 
$$\mathbf{e} \cdot \left[ \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \times (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}_0) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathcal{S}_\epsilon|} \int_{\partial \mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

<sup>35</sup>Eigentlich haben wir den Satz von STOKES nur für den Fall bewiesen, daß  $\mathcal{S}$  eine **2-mal stetig differenzierbare** einfache Parametrisierung zuläßt (Verwendung von Lemma 4.1.5). Aufgrund der Stetigkeitseigenschaften der Integrale gilt der Satz dann aber auch ohne diese Einschränkung.

**Definition 4.3.10** Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann bezeichnet man das nach Folgerung 4.3.9 von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  unabhängige<sup>36</sup> Vektorfeld

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \times (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}\mathbf{A})(\mathbf{x})$$

als **Rotation** von  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ .

Die Bezeichnung ‘Rotation’ erklärt sich aus dem Satz von STOKES, der nun die Form

$$\int_{\partial S} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \quad (4.32)$$

annimmt. Danach läßt sich  $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})$  als eine Art Flächendichte der Feldwirbel interpretieren.

Z.B. gilt für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}$  eines starren Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)  $|\boldsymbol{\omega}_0|$  im Rechtsschraubensinn um die Achse rotiert, die durch  $P_0$  geht und in Richtung von  $\boldsymbol{\omega}_0$  zeigt.<sup>37</sup>

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}) = 2\boldsymbol{\omega}_0. \quad (4.33)$$

Nach (4.7) und Definition 4.3.10 gilt für jedes dimensionslose orthonormale Rechtssystem  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} A^3(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} A^2(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} A^1(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^1} A^3(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^1} A^2(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^2} A^1(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

falls

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A^1(x^1, x^2, x^3) \\ A^2(x^1, x^2, x^3) \\ A^3(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}.$$

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  gilt nach (4.32), Folgerung 4.3.9 und Folgerung 4.2.8:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) \text{ konservativ} \iff \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0.} \quad (4.35)$$

Nach (4.32), Folgerung 4.3.9 und Lemma 4.3.7 ist das Induktionsgesetz (4.30) äquivalent zu der MAXWELLSchen Gleichung<sup>38</sup>

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t). \quad (4.36)$$

<sup>36</sup>Diese Basisunabhängigkeit folgt auch aus (4.3).

<sup>37</sup>Vgl. Übungsaufgabe 54.

<sup>38</sup>Natürlich ist hier hinreichend gute  $t$ -Abhängigkeit vorausgesetzt.

Entsprechend ist das AMPERESche Gesetz (4.31) äquivalent zum *statischen* Spezialfall

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{x}) \quad (4.37)$$

der MAXWELLSchen Gleichung

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t).$$

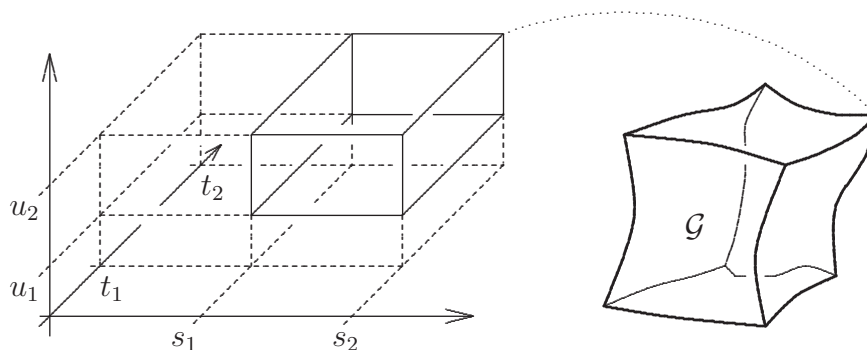
Schließlich sei noch erwähnt, daß aus (4.32) und Lemma 4.3.7 die in Anmerkung (ii) zu (4.21) angesprochene *stetige* Abhängigkeit des Wegintegrals (für **Vektorfelder**) vom Weg folgt.

## 4.4 Volumenintegrale

### 4.4.1 Definitionen

**Definition 4.4.1** Als *einfaches (positiv orientiertes) Raumgebiet* bezeichnen wir eine Menge  $\mathcal{G}$  von Ortsvektoren, für die eine *einfache Parametrisierung* existiert; d.h. Zeitpunkte  $s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_3$  (oder entspr. Parameter anderer physikalischer Dimension) und eine eineindeutige stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{x}(s, t, u)$  von  $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2] \times [u_1, u_2]$  auf  $\mathcal{G}$  mit

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{x}(s, t, u) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(s, t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}(s, t, u) \right) > 0 \quad \forall s, t, u.$$



**Lemma 4.4.2**

- Gegeben: (i) *stetiges Skalarfeld*  $\rho(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *einfaches Raumgebiet*  $\mathcal{G}$ .

Behauptung: *Das 3-fache Integral*

$$\int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \rho(\mathbf{x}(s, t, u)) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t, u) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s, t, u) \right) ds \right) dt \right) du$$

liefert für jede einfache Parametrisierung  $(\mathbf{x}(s, t, u), s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2)$  von  $\mathcal{G}$  den gleichen Wert.

**Definition 4.4.3** Seien  $\rho(\mathbf{x})$  ein stetiges Skalarfeld und  $\mathcal{G}$  ein einfaches Raumgebiet. Dann bezeichnet man den nach Lemma 4.4.2 von der speziellen Wahl der Parametrisierung  $(\mathbf{x}(s, t, u), s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2)$  unabhängigen Ausdruck

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \rho(\mathbf{x}(s, t, u)) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t, u) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s, t, u) \right) ds \right) dt \right) du$$

als das **Volumenintegral** von  $\rho(\mathbf{x})$  über  $\mathcal{G}$ .

Falls  $\rho(\mathbf{x})$  die Dichte-Verteilung einer additiven physikalischen Größe (z.B. Masse, Ladung, ...) ist, dann gibt also

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$$

die Summe aller Anteile dieser Größe in  $\mathcal{G}$  (z.B. Gesamtmasse innerhalb  $\mathcal{G}$ , Gesamtladung innerhalb  $\mathcal{G}$ , ...) an.

Für ein **Vektorfeld**  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  wählen wir (der Kürze wegen) die von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  unabhängige Definition:

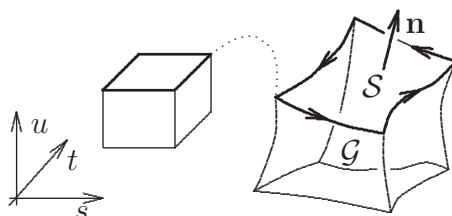
$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{G}} F^1(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \\ \int_{\mathcal{G}} F^2(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \\ \int_{\mathcal{G}} F^3(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}, \quad (4.38)$$

$$\text{falls } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F^1(\mathbf{x}) \\ F^2(\mathbf{x}) \\ F^3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}.$$

**Definition 4.4.4** Seien  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück und  $\mathcal{G}$  ein einfaches Raumgebiet. Dann nennen wir  $\mathcal{S}$  einen **Teilrand** von  $\mathcal{G}$ , falls eine einfache Parametrisierung  $(\mathbf{x}(s, t, u), s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2)$  von  $\mathcal{G}$  existiert, für die

$$\left( \mathbf{x}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(s, t, u_2), s_1, s_2, t_1, t_2 \right)$$

eine einfache Parametrisierung von  $\mathcal{S}$  ist.

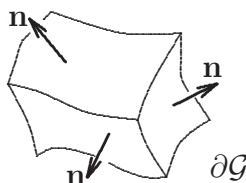


Anschaulich leicht verständlich ist die

**Folgerung 4.4.5** Jedes einfache Raumgebiet  $\mathcal{G}$  besitzt genau sechs bis auf Vertauschung der Indizes eindeutige Teilränder  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_6$ , die zusammen ein geschlossenes Flächenstück

$$\partial\mathcal{G} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_6$$

bilden.



**Definition 4.4.6** Das einem einfachen Raumgebiet  $\mathcal{G}$  entsprechend Folgerung 4.4.5 eindeutig zugeordnete Flächenstück  $\partial\mathcal{G}$ , das sich aus den Teilrändern zusammensetzt, bezeichnet man als den (orientierten) **Rand** von  $\mathcal{G}$ .

## 4.4.2 Anwendungsbeispiel (Trägheitstensor)

Ein starrer Körper  $\mathcal{K}$  fülle zur Zeit  $t$  das einfache Raumgebiet  $\mathcal{G}_t$  aus. Seine **Mas-**  
**sensdichte** zum Zeitpunkt  $t$  sei  $\mu(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}_t \implies \int_{\mathcal{G}'} \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \text{Gesamtmasse aller in } \mathcal{G}' \text{ befindlichen} \\ \text{Teile von } \mathcal{K} \text{ zur Zeit } t. \end{cases}$$

Die **Geschwindigkeitsverteilung** sei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \text{Geschwindigkeit des bei } \mathbf{x} \text{ befindlichen} \\ \text{Körperpunktes zur Zeit } t. \end{cases}$$

In Analogie zu einem System von Massenpunkten definiert man dann z.B. als **Gesamtdrehimpuls** von  $\mathcal{K}$  bzgl.  $P_0$  zur Zeit  $t$ :

$$\mathbf{L}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}_t} \underbrace{\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}_{=\mathbf{dp}} \underbrace{\mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}}_{=dm}. \quad (4.39)$$

Entsprechend gilt dann:<sup>39</sup>

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) = \mathbf{M}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Gesamtdrehmoment bzgl. } P_0 \\ \text{auf } \mathcal{K} \text{ zur Zeit } t. \end{cases}$$

Für den **Spezialfall** daß sich  $\mathcal{K}$  momentan um eine Achse  $\mathcal{A}(t)$  durch  $P_0$  in Richtung  $\boldsymbol{\omega}(t)$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $|\boldsymbol{\omega}(t)|$  (im Rechtsschraubensinn) dreht, also für

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x},$$

folgt aus (4.39)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{L}(t) &= \boldsymbol{\omega}' \cdot \int_{\mathcal{G}_t} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \int_{\mathcal{G}_t} (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} \implies \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{L}(t) = \theta_t(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}(t)) \quad \forall t, \boldsymbol{\omega}',$$

$$\text{wobei: } \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}_t} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \text{ für bel. } \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2. \quad (4.40)$$

Die Abbildung

$$\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \longrightarrow \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$$

bezeichnet man als den **Trägheitstensor** von  $\mathcal{K}$  zur Zeit  $t$ ; als ‘Tensor’ deshalb, weil sie in beiden Argumenten **linear** ist:

$$\begin{aligned} \theta_t(\alpha \boldsymbol{\omega}_1 + \beta \boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}_2) &= \alpha \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \beta \theta_t(\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}_2), \\ \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \alpha \boldsymbol{\omega}_2 + \beta \boldsymbol{\omega}'_2) &= \alpha \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \beta \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}'_2). \end{aligned} \quad (4.41)$$

**Anmerkung:**  $\theta_t$  ist natürlich eindeutig festgelegt, wenn man seine **ko-varianten Komponenten**

$$(\theta_t)_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_t(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) \quad \text{für } j, k \in \{1, 2, 3\}$$

bzgl. einer beliebigen Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  kennt.

Für verschiedene Anwendungen nutzt man aus, daß der Trägheitstensor **symmetrisch** ist; d.h.:

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \theta_t(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2. \quad (4.42)$$

Den speziellen Wert

$$\theta_t(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \int_{\mathcal{G}_t} r_{\mathbf{x}}^2 \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \quad (4.43)$$

wobei:  $r_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=}} |\mathbf{e} \times \mathbf{x}| = |\text{Komponente von } \mathbf{x} \text{ senkrecht zu } \mathbf{e}|$ ,

bezeichnet man als das **Trägheitsmoment** von  $\mathcal{K}$  zur Zeit  $t$  bzgl. der Achse durch  $P_0$  in Richtung des **Einheitsvektors**  $\mathbf{e}$ .

Als Beispiel sei eine homogene Massenkugel konstanter Massendichte  $\mu$  vom Radius  $R$  mit Mittelpunkt  $P_0$  betrachtet:

Mit

$$0 < r_1 < r_2, \quad 0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi, \quad 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$$

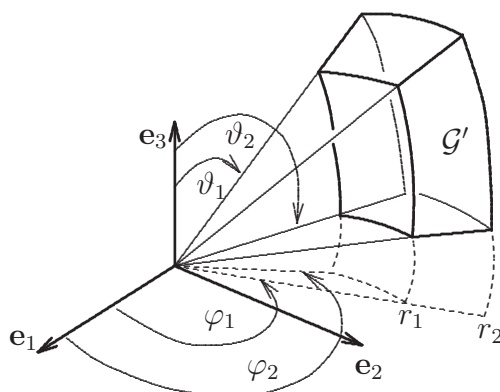
ist

$$\{\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi); r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2\}$$

einfache Parametrisierung eines Gebietes  $\mathcal{G}'$ , das für

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow 0, & \vartheta_1 &\rightarrow 0, & \varphi_1 &\rightarrow 0, \\ r_2 &\rightarrow R, & \vartheta_2 &\rightarrow \pi, & \varphi_2 &\rightarrow 2\pi \end{aligned}$$

in die volle Kugel  $\mathcal{G}$  mit Radius  $R$  übergeht:





Daher gilt

$$\theta_{\mathbf{e}_3} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_t(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R \mu |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}|^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x} \right)}_{dV_{\mathbf{x}}} dr \right) d\vartheta \right) d\varphi$$

Im zweiten Beispiel von Abschnitt 4.3.2 wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) &= r \mathbf{e}_\vartheta(r, \vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) &= r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_r(r, \vartheta, \varphi)$$

und somit<sup>40</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x} \right) &= r^2 \sin \vartheta \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi) \\ &= r^2 \sin \vartheta \end{aligned}$$

(d.h.:  $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ ). Mit  $|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}| = r \sin \vartheta$  folgt daraus

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{e}_3} &= \mu \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^4 \sin^3 \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) \right) dr \right) d\vartheta \right) d\varphi \\ &= \mu \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{=\frac{1}{5}R^5} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta}_{=-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \Big|_0^\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

**Resultat:**

$$\begin{aligned} \theta_t(\mathbf{e}, \mathbf{e}) &= \frac{8}{15} \pi R^5 \mu \\ &\stackrel{\text{Aufg. (57)}}{=} \frac{2}{5} R^2 \text{ Gesamtmasse}. \end{aligned}$$

Aus (4.41), (4.42) folgt – bei gleicher physikalischer Dimension von  $\boldsymbol{\omega}_1$  und  $\boldsymbol{\omega}_2$  – **allgemein:**

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \frac{1}{4} (\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) - \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)). \quad (4.44)$$

Der Trägheitstensor ist also stets durch die Trägheitsmomente festgelegt. Für obiges Beispiel folgt aus (4.44) **speziell**:

$$\begin{aligned} \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) &= \frac{1}{4} \left( |\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2|^2 \theta_{\frac{\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2}{|\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2|}} - |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2|^2 \theta_{\frac{\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2}{|\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2|}} \right) \\ &\stackrel{\text{Kugelsymm.}}{=} \frac{1}{4} (|\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2|^2 - |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2|^2) \theta_{\mathbf{e}_3} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \theta_{\mathbf{e}_3}. \end{aligned}$$

### 4.4.3 Eigenschaften des Volumenintegrals

Aus Definition 4.4.3 und der Linearitätseigenschaft (3.54) für gewöhnliche Integrale erkennt man sofort folgende Linearitätseigenschaft des Volumenintegrals:

$$\int_{\mathcal{G}} (\alpha \rho_1(\mathbf{x}) + \beta \rho_2(\mathbf{x})) \, dV_{\mathbf{x}} = \alpha \int_{\mathcal{G}} \rho_1(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} + \beta \int_{\mathcal{G}} \rho_2(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}}. \quad (4.45)$$

Entsprechend ergibt sich durch 3-fache Anwendung des gewöhnlichen Mittelwertsatzes der Integralrechnung der Mittelwertsatz für Volumenintegrale:

#### Lemma 4.4.7

- Gegeben: (i) *stetiges Skalarfeld*  $\rho(\mathbf{x})$ ,  
(ii) *einfaches Raumgebiet*  $\mathcal{G}$ .

Behauptung: *Es existiert ein*  $\mathbf{x}' \in \mathcal{G}$  *mit*

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} = |\mathcal{G}| \rho(\mathbf{x}'),$$

wobei

$$|\mathcal{G}| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}} dV_{\mathbf{x}}$$

der **Rauminhalt** von  $\mathcal{G}$  ist.

Hieraus folgt direkt die Abschätzung:

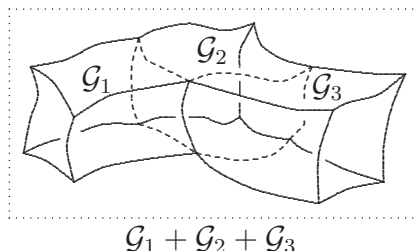
$$\left| \int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \right| \leq |\mathcal{G}| \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} |\rho(\mathbf{x})|. \quad (4.46)$$

**Anmerkung:** Die Anmerkungen (i)–(iii) von 4.2.2 bzgl. der Stetigkeitseigenschaften des Wegintegrals gelten für das Volumenintegral entsprechend.

Seien  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  einfache Raumbereiche mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Je zwei Raumbereiche  $\mathcal{G}_j, \mathcal{G}_k$  haben höchstens Randpunkte gemeinsam.
- (ii) Die Vereinigung der Raumbereiche  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$  ist eine ‘vernünftig’ zusammenhängende Menge.

Unter diesen Bedingungen bezeichnet man mit  $\mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_n$  das zusammengesetzte Raumbereich:



Als **Rand**  $\partial(\mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_n)$  bezeichnet man das (geschlossene) orientierte Flächenstück, das sich aus all den Randstücken zusammensetzt, die nicht in zwei verschiedenen Raumbereichen mengenmäßig enthalten sind. Falls  $\mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_n$  wieder ein einfaches Raumbereich ist, ist die neue Definition des Randes äquivalent zur alten Definition 4.4.6. Außerdem gilt dann offensichtlich:

$$\int_{\mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_n} \rho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{G}_1} \rho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} + \dots + \int_{\mathcal{G}_n} \rho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}}. \quad (4.47)$$

Andernfalls nimmt man naheliegenderweise die rechte Seite von (4.47) als **Definition** für die linke.

#### 4.4.4 Der Satz von GAUSS

Es gibt verschiedene physikalische Hinweise auf einen engen Zusammenhang zwischen Volumenintegralen über einfache Gebiete  $\mathcal{G}$  und Flächenintegralen über deren Rand  $\partial\mathcal{G}$ :

Erfahrungsgemäß ist z.B. die (bei einem abgeschlossenen System) erhaltene **Gesamtladung** eine **Erhaltungsgröße**: Es gibt kein Raumbereich, in dem Ladung erzeugt oder vernichtet wird. Für eine Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x}, t)$  mit der Ladungsstromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  muß also für **jedes** einfache Raumbereich  $\mathcal{G}$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{G}} \rho(\mathbf{x}, t) \, dV_{\mathbf{x}}}_{\text{Gesamtladung in } \mathcal{G}} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}}_{\text{Ladungsstrom durch } \partial\mathcal{G}} = 0 \quad (4.48)$$

gelten.<sup>41</sup>

<sup>41</sup>Hinreichend schneller Abfall von  $\mathbf{j}$  im Unendlichen garantiert also  $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}, t) \, dV_{\mathbf{x}} = 0$ .

Ein weiteres Beispiel ist das **GAUSSsche Gesetz**

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = -4\pi\gamma \int_{\mathcal{G}} \mu(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}, \quad (4.49)$$

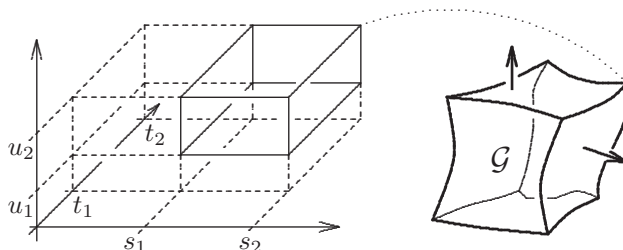
wobei  $\gamma$  wieder die Gravitationskonstante bezeichnet und  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  das von der Massenverteilung (Massendichte)  $\mu(\mathbf{x})$  erzeugte **Gravitationsfeld**, d.h.:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{l} \text{Schwerkraft, die die gesamte Massenverteilung} \\ \text{auf einen bei } \mathbf{x} \text{ befindlichen Test-Massenpunkt } m \text{ ausübt.} \end{array} \right.$$

Dementsprechend liegt der Versuch nahe, **allgemein** das Oberflächenintegral über den Rand  $\partial\mathcal{G}$  eines einfachen Raumbiets auf ein Volumenintegral über  $\mathcal{G}$  zurückzuführen:

Seien also  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $\mathcal{G}$  ein einfaches Raumbiet und  $(\mathbf{x}(s, t, u), s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2)$  eine 2-mal stetig differenzierbare einfache Parametrisierung von  $\mathcal{G}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t, u_2)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t, u_2) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t, u_2) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t, u_1)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t, u_1) \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t, u_1) \right) \right\} ds \right) dt \\ &+ \int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t_2, u)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s, t_2, u) \right) \times \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t_2, u) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{j}(\mathbf{x}(s, t_1, u)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s, t_1, u) \right) \times \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t_1, u) \right) \right\} ds \right) du \\ &+ \int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{x}(s_2, t, u)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s_2, t, u) \right) \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s_2, t, u) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{j}(\mathbf{x}(s_1, t, u)) \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s_1, t, u) \right) \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s_1, t, u) \right) \right\} dt \right) du. \end{aligned}$$



Mit dem Fundamentalsatz folgt hieraus

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{u_1}^{u_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} \right) \right) ds dt du$$

+zykl. Vert. v.  $s, t, u$

und wegen

$$0 \stackrel{\text{Lemma 4.1.5}}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} \right) + \text{zykl. Vert. v. } s, t, u$$

somit:

$$\int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{u_1}^{u_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} \right) ds dt du + \text{zykl. Vert. v. } s, t, u. \quad (4.50)$$

Aus Lemma 4.1.3 folgert man leicht<sup>42</sup>, daß **allgemein**

$$\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \Phi)(\mathbf{x}(t))|_{\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}(t)}$$

gilt. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_1(s, t, u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(s, t, u), \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_2(s, t, u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t, u), \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_3(s, t, u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(s, t, u) \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{j})(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{j})(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_3} \mathbf{j})(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

was zusammen mit (4.50) und (2.29)

$$\int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{u_1}^{u_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \sum_{k=1}^3 [\mathbf{b}^k \cdot (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_k} \mathbf{j})(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x} \right) ds dt du \quad (4.51)$$

liefert.

**Definition 4.4.8** Sei  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann bezeichnet man das nach (4.2) von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  unabhängige Skalarfeld

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^3 \mathbf{b}^k \cdot (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_k} \mathbf{j})(\mathbf{x})$$

als **Divergenz** von  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ .

<sup>42</sup>Man wähle dort eine Orthonormalbasis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  mit  $\mathbf{b}_1 \propto \dot{\mathbf{x}}(t)$  und beachte (4.1).

Mit Definition 4.4.8 lautet also unser Resultat (4.51):<sup>43</sup>

**Satz 4.4.9 (Satz von GAUSS)**

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ ,*  
(ii) *einfaches Raumgebiet  $\mathcal{G}$ ,*  
(iii) *Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ .*

Behauptung: 
$$\int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$$

Mit Lemma 4.4.7 ergibt sich aus dem Satz von GAUSS unmittelbar die

**Folgerung 4.4.10**

- Gegeben: (i) *stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ ,*  
(ii) *Ortsvektor  $\mathbf{x}_0$ ,*  
(iii) *Schar einfacher Raumgebiete  $\mathcal{G}_\epsilon$  mit  $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}_\epsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = 0$ ,*  
(iv) *Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ .*

Behauptung: 
$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathcal{G}_\epsilon|} \int_{\partial\mathcal{G}_\epsilon} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}.$$

Die Divergenz läßt sich also als (Volumen-)Dichte der Feldquellen interpretieren.

Z.B. gilt für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_k$  eines in die **orthogonalen** Richtungen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  gleichförmig (rotations- und scherungsfrei) expandierenden Mediums:<sup>44</sup>

$$\operatorname{div} \sum_{k=1}^3 \lambda_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (4.52)$$

Nach (4.7) und Definition 4.4.8 gilt für **jede** (physikalisch) dimensionslose Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} j^k(x^1, x^2, x^3), \quad (4.53)$$

<sup>43</sup>Eigentlich haben wir den Theorem 4.4.9 nur für den Fall bewiesen, daß  $\mathcal{G}$  eine **zweimal** stetig differenzierbare einfache Parametrisierung zuläßt (Verwendung von Lemma (4.1.5)). Aufgrund der Stetigkeitseigenschaften der Integrale gilt das Theorem dann aber auch ohne diese Einschränkung.

<sup>44</sup>Vgl. Übungsaufgabe 61.

falls

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} j^1(x^1, x^2, x^3) \\ j^2(x^1, x^2, x^3) \\ j^3(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}.$$

Ein (stetiges) Vektorfeld  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  bezeichnet man als **quellfrei**, falls

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = 0$$

für **jedes** einfache Raumgebiet  $\mathcal{G}$  gilt. Das ist äquivalent<sup>45</sup> dazu, daß das Oberflächenintegral von  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  nur vom Rand der Integrationsfläche abhängt (außer vom Feld  $\mathbf{j}$  selbst). Für stetig differenzierbare  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  gilt außerdem nach dem GAUSSschen Satz und Folgerung 4.4.10:

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \text{ quellfrei} \iff \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0.} \quad (4.54)$$

Nach dem GAUSSschen Satz und Lemma 4.4.7 ist (4.48) äquivalent zur sog. **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.55)$$

Entsprechend ist das GAUSSsche Gesetz (4.49) äquivalent zu

$$\operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi\gamma \mu(\mathbf{x}). \quad (4.56)$$

Die Massendichte stimmt also bis auf einen konstanten Faktor mit der Quelledichte des Gravitationsfeldes überein!

In einfachen Fällen (z.B. für die gewöhnliche Wärmeleitung) ist die Stromdichte eines diffundierenden Mediums proportional zum Dichte-Gefälle:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = -D \operatorname{grad} \rho(\mathbf{x}, t),$$

$D$  : **Diffusionskonstante** .

Dann wird die Kontinuitätsgleichung (4.55) zur homogenen **Diffusionsgleichung**:<sup>46</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) = D \Delta \rho(\mathbf{x}, t), \quad (4.57)$$

$$\text{wobei: } \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} \quad \text{LAPLACE-Operator} . \quad (4.58)$$

Schließlich sei noch erwähnt, daß aus dem Satz von GAUSS und Lemma 4.4.7 (im Zusammenhang mit (4.27) und (4.28)) die stetige Abhängigkeit des Oberflächenintegrals (für **Vektorfelder**) von der Oberfläche folgt.

<sup>45</sup>Man beachte die Analogie zum Wegintegral konservativer Vektorfelder.

<sup>46</sup>Mit der rein **imaginären** 'Diffusionskonstanten'  $D = i \frac{\hbar}{2m}$  ergibt sich die **freie** SCHRÖDINGER-Gleichung eines Massenpunktes ohne innere Freiheitsgrade.

### 4.4.5 Die POISSONSche Gleichung

Mit dem Ergebnis von Übungsaufgabe 56 läßt sich für einfache Raumgebiete  $\mathcal{G}$  leicht zeigen, daß

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \begin{cases} 4\pi & \text{für } \mathbf{x}' \text{ innerhalb } \mathcal{G}, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x}' \text{ außerhalb } \mathcal{G} \end{cases} \quad (4.59)$$

gilt; denn wegen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \implies \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \quad (4.60)$$

gilt (4.59) nach dem Satz von GAUSS auch dann, wenn  $\mathcal{G}$  nicht ausgerechnet eine Kugel mit dem Mittelpunkt-Ortsvektor  $\mathbf{x}'$  ist. Für

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} -\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV_{\mathbf{x}'} \\ &= \begin{cases} \text{Gravitationsfeld, das von der} \\ \text{Massenverteilung } \mu(\mathbf{x}') \text{ erzeugt wird} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.61)$$

folgt<sup>47</sup> aus (4.59):

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &= -\gamma \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{G}} \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U_\epsilon(\partial\mathcal{G})} \mu(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV_{\mathbf{x}'} \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \\ &= -\gamma \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U_\epsilon(\partial\mathcal{G})} \mu(\mathbf{x}') \left( \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \right) dV_{\mathbf{x}'} \\ &= -4\pi\gamma \int_{\mathcal{G}} \mu(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Das GAUSSsche Gesetz (4.49) ist also tatsächlich eine Folge des Gravitationsgesetzes.<sup>48</sup>

**Anmerkung:** Die Divergenz von (4.61) liefert gemäß (4.56) und (4.60) ein Beispiel für den Fall, daß sich Differentiation und Integration **nicht** vertauschen lassen!

Version vom 26. März 2009

<sup>47</sup> $U_\epsilon(\partial\mathcal{G})$  bezeichnet—wie allgemein üblich—die  $\epsilon$ -Umgebung von  $\partial\mathcal{G}$  :

$$U_\epsilon(\partial\mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \epsilon \forall \mathbf{x}' \in \partial\mathcal{G}\}.$$

<sup>48</sup>Vgl. 3.5.2.



Beachtet man andererseits<sup>49</sup>

$$(4.61) \iff \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x}),$$

$$\text{wobei: } \phi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} \quad \textit{Gravitationspotential}, \quad (4.62)$$

so ergibt sich aus (4.56) und (4.58) die sog. **POISSONsche Gleichung**

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} = -4\pi \mu(\mathbf{x}) \quad (4.63)$$

für **räumlich begrenzte**  $\mu(\mathbf{x})$ , die insbesondere für die Elektrodynamik sehr wichtig ist.

#### 4.4.6 Der Satz von EARNSHAW

Das Potential  $\Phi(\mathbf{x})$  gemäß (4.62) ist die einzige Lösung von<sup>50</sup>

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = 4\pi\gamma \mu(\mathbf{x}) \quad (4.64)$$

zu vorgegebenem  $\mu(\mathbf{x})$ , die im Unendlichen verschwindet, d.h. die Bedingung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|\mathbf{x}| > R} |\Phi(\mathbf{x})| = 0$$

erfüllt. Das folgt fast unmittelbar aus dem

##### Satz 4.4.11 (Satz von EARNSHAW)

- Gegeben: (i) *einfaches Gebiet*  $\mathcal{G}$ ,  
(ii) *zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld*  $\Phi(\mathbf{x})$ , *das der sog.*  
**LAPLACE-Gleichung**

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = 0$$

*überall in*  $\mathcal{G}$  *genügt.*

Behauptung: *Falls*  $\Phi(\mathbf{x})$ , *im Inneren*  $\mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$  *von*  $\mathcal{G}$  *sein Maximum bzgl.*  $\mathcal{G}$  *annimmt, dann ist*  $\Phi(\mathbf{x})$  *über*  $\mathcal{G}$  *konstant.*

Wir beweisen zunächst den folgenden Mittelwertsatz:

Version vom 26. März 2009

<sup>49</sup>Bei der Berechnung von  $\text{grad } \phi(\mathbf{x})$  ist die Vertauschung von Differentiation und Integration erlaubt, weil die Singularität des Integranden nicht so stark ist.

<sup>50</sup>Vgl. (4.63).

**Lemma 4.4.12**

- Gegeben: (i)  $\mathcal{G}$ ,  $\Phi(\mathbf{x})$  wie im Satz von EARNSHAW,  
(ii) Kugel  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ .

Behauptung: Der Mittelwert von  $\Phi(\mathbf{x}_0)$  über die Kugeloberfläche stimmt mit dem Wert im Kugelmittelpunkt überein:

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\partial\mathcal{G}'|} \int_{\partial\mathcal{G}'} \Phi(\mathbf{x}) |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}|, \quad \text{wobei } \mathbf{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mittelpunkt von } \mathcal{G}'.$$

**Beweisskizze zu Lemma 4.4.12:** Sei  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}_R = \mathcal{G}'$  für geeignetes  $R > 0$ , wobei

$$\mathcal{G}_r \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\} \quad \text{für } r \geq 0.$$

Dann genügt offensichtlich der Nachweis von

$$f(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dr} \frac{1}{|\partial\mathcal{G}_r|} \int_{\partial\mathcal{G}_r} \Phi(\mathbf{x}) |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}| = 0 \quad \text{für } r \in (0, R).$$

Zum Beweis hierfür können wir o.B.d.A.  $\mathbf{x}_0 = 0$  annehmen. In Kugelkoordinaten<sup>51</sup> gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} f(r) &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \Phi(\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi)) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial\mathcal{G}_r} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathcal{G}_r} \Delta \Phi(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{n. Vorauss.}}{=} 0 \end{aligned}$$

**Beweisskizze zum Satz von EARNSHAW:** Angenommen,  $\Phi(\mathbf{x})$  sei im Punkte  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$  maximal. Nach Lemma 4.4.12 muß dann  $\Phi(\mathbf{x})$  auf der Oberfläche und damit auch innerhalb jeder Kugel mit Zentrum  $\mathbf{x}_0$  konstant sein, die ganz in  $\mathcal{G}$  liegt. Indem man sich von  $\mathbf{x}_0$  aus durch  $\mathcal{G}$  bewegt, erkennt man dann, daß  $\Phi(\mathbf{x})$  im Inneren von  $\mathcal{G}$  und damit aufgrund der Stetigkeit auf ganz  $\mathcal{G}$  konstant sein muß. ■

## 4.5 Nützliche Formeln

### 4.5.1 Teilzusammenfassung

Für stetig differenzierbare Skalarfelder  $\Phi(\mathbf{x})$  gilt:<sup>52</sup>

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{a}}\Phi)(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\xi}\Phi(\mathbf{x} + \xi\mathbf{a})|_{\xi=0} \quad (4.65)$$

$$= \textit{Richtungsableitung}, \text{ falls } |\mathbf{a}| = 1,$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^j \mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \quad \text{für jede Basis } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}, \quad (4.66)$$

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}\Phi)(\mathbf{x}) \quad \text{für jede Basis } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}, \quad (4.67)$$

$$\mathbf{a} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{a}}\Phi)(\mathbf{x}), \quad (4.68)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}(t)), \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2, x^3) &= \Phi(x^1\mathbf{b}_1 + x^2\mathbf{b}_2 + x^3\mathbf{b}_3), \quad \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \text{ dimensionslos} \\ \implies \frac{\partial}{\partial x^j} f(x^1, x^2, x^3) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}\Phi)(\mathbf{x})(x^1\mathbf{b}_1 + x^2\mathbf{b}_2 + x^3\mathbf{b}_3) \quad \text{für } j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Entsprechend (4.70) ergibt sich in Verallgemeinerung von (4.69) folgende wichtige Differentiationsregel (verallgemeinerte Kettenregel):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q^k} f(x^1(q^1, \dots, q^{n'}), \dots, x^n(q^1, \dots, q^{n'})) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q^k} x^j(q^1, \dots, q^{n'}) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} f(x^1, \dots, x^n)|_{x^l=x^l(q^1, \dots, q^{n'})} \end{aligned} \quad (4.71)$$

für  $k = 1, \dots, n'$ .

In entsprechender Verallgemeinerung von (4.15) gilt die **TAYLOR-Entwicklung**:

$$\begin{aligned} &\Phi(x^1 + a^1, \dots, x^n + a^n) \\ &= \Phi(x^1, \dots, x^n) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{j!} \left( a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^j \Phi(x^1, \dots, x^n) \\ &\quad + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-\lambda)^N \left( a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{N+1} \Phi(x^1 + \lambda a^1, \dots, x^n + \lambda a^n) d\lambda \\ &\hspace{15em} \text{für } N = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

<sup>52</sup>Entsprechende Formeln gelten natürlich für Vektorfelder.

Für stetig differenzierbare Skalar- und Vektorfelder gilt weiter:

$$\int_{\mathcal{C}} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})|_{\partial\mathcal{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathcal{C}\text{-Ende}) - \Phi(\mathcal{C}\text{-Anfang}), \quad (4.72)$$

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \times (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{A})(\mathbf{x}) \quad \text{für jede Basis } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad (4.73)$$

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}, \quad \text{Satz von STOKES}$$

$$\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{b}^k \cdot (\mathcal{L}_{\mathbf{b}_k} \mathbf{J})(\mathbf{x}) \quad \text{für jede Basis } \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}, \quad (4.74)$$

$$\int_{\mathcal{G}} \text{div } \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\mathcal{G}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \quad \text{Satz von GAUSS}$$

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} = -4\pi \mu(\mathbf{x}), \quad \text{POISSON-Gleichung}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$  konservativ

$$\iff \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{für geeignetes } \mathbf{Skalarpotential } \Phi(\mathbf{x}) \quad (4.75)$$

$$\iff \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für jeden geschlossenen Weg } \mathcal{C}$$

$$\iff \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$  quellenfrei

$$\iff \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{für jedes geschlossene Flächenstück } \mathcal{S} \quad (4.76)$$

$$\iff \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$\iff \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad \text{für geeignetes } \mathbf{Vektorpotential } \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

Die letzte Äquivalenz in (4.76) folgt aus dem Ergebnis von Übungsaufgabe 65 (bzw. der Herleitung von (4.98)) zusammen mit (4.89).

## 4.5.2 Algebra des NABLA-Operators

Den nach (4.67) von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  unabhängigen formalen Vektor<sup>53</sup>

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}^j \mathcal{L}_{\mathbf{b}_j} \quad (4.77)$$

<sup>53</sup>Man faßt also die Ableitungen  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}_j}$  als Entwicklungskoeffizienten von  $\nabla$  bzgl.  $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\}$  auf.

nennt man **Nabla-Operator**. Bei entspr. Interpretation der formalen Vektoroperationen mit  $\nabla$  gilt also:

$$\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) = \nabla \Phi(\mathbf{x}), \quad (4.78)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (4.79)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (4.80)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla, \quad \text{LAPLACE-Operator} . \quad (4.81)$$

Für Orthonormalbasen  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  gilt entsprechend (4.70)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad (4.82)$$

und somit:

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \Phi(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \Phi(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \Phi(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} A^3(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} A^2(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} A^1(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^1} A^3(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{\partial}{\partial x^1} A^2(x^1, x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^2} A^1(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

falls  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  rechtshändig

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^1} j^1(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial}{\partial x^2} j^2(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial}{\partial x^3} j^3(x^1, x^2, x^3), \quad (4.85)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 \right) \Phi(x^1, x^2, x^3). \quad (4.86)$$

Formeln der Vektor-Algebra behalten offensichtlich ihre Gültigkeit, wenn in ihnen einige Vektoren durch  $\nabla$  ersetzt werden und nur derjenige, der in allen Termen ganz rechts steht,<sup>54</sup> durch ein (hinreichend gutartiges) Vektorfeld. So ergibt sich z.B. aus dem Entwicklungssatz (2.23) die Formel

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x})}. \quad (4.87)$$

<sup>54</sup>Sofern ein solcher Vektor existiert.

Aus der Antisymmetrie des Vektorproduktes ergibt sich entsprechend<sup>55</sup>

$$\nabla \times (\nabla \Phi(\mathbf{x})), \quad (4.88)$$

sowie unter zusätzlicher Berücksichtigung der Zyklichkeit des Spatproduktes:<sup>56</sup>

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) = 0. \quad (4.89)$$

Bei Formeln, in denen Produkte von Feldern auftreten, sind die Produktregeln (3.27–3.29) der Differentiation zu beachten. Dementsprechend gilt:<sup>57</sup>

$$\nabla (\Phi_1(\mathbf{x})\Phi_2(\mathbf{x})) = \Phi_1(\mathbf{x})\nabla\Phi_2(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x})\nabla\Phi_1(\mathbf{x}), \quad (4.90)$$

$$\nabla \cdot (\Phi(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \Phi(\mathbf{x})\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}), \quad (4.91)$$

$$\nabla \times (\Phi(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \Phi(\mathbf{x})\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \nabla\Phi(\mathbf{x}), \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})) &= \left( \mathbf{F}(\mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x})) + (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right) \\ &\quad + \left( \mathbf{G}(\mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) + (\mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{G}(\mathbf{x})) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})) - (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ &\quad - \left( \mathbf{G}(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) - (\mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x})). \quad (4.95)$$

**Merkregel:** In (4.90)–(4.95) stehen rechts jeweils zwei Ausdrücke, in denen  $\nabla$  stets nur auf eines der Felder wirkt, und die jeder für sich mit der linken Seite übereinstimmen würden, wenn  $\nabla$  ein gewöhnlicher Vektor wäre.

### 4.5.3 Konstruktion von Vektorpotentialen

**Aufgabe:** Sei  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  ein **quellfreies** stetiges Vektorfeld. Man konstruiere dazu ein **Vektorpotential**, d.h. ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  mit

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (4.96)$$

**POINCARÉ-Konstruktion:** Gemäß der Folgerung 4.3.9 zum Satz von STOKES ist (4.96) äquivalent dazu, daß

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathcal{C} = \partial\mathcal{S} \quad (4.97)$$

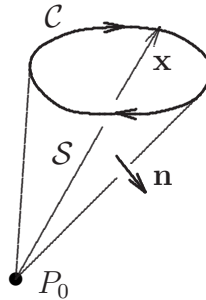
Version vom 26. März 2009

<sup>55</sup>Strikte Anwendung der beschriebenen Regel würde auf  $(\nabla \times \nabla) \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$  führen. (4.88) folgt natürlich auch direkt aus (4.75).

<sup>56</sup>Das Verschwinden von Volumenintegralen über die linke Seite von (4.89) folgt auch aus den Sätzen von GAUSS und STOKES sowie (4.72).

<sup>57</sup>(4.93) und (4.94) entsprechen wieder dem Entwicklungssatz (2.23).

für jedes einfache Flächenstück  $\mathcal{S}$  gilt. Da  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  divergenzfrei vorausgesetzt ist, hängt das Flächenintegral über  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  nach dem Satz von GAUSS nur vom berandenden Weg  $\mathcal{C}$  und nicht vom genaueren Verlauf der Fläche  $\mathcal{S}$  ab. Somit ist (4.96) äquivalent dazu, daß zu jedem (hinreichend gutartigen) geschlossenen Weg  $\mathcal{C}$  ein Flächenstück  $\mathcal{S}$  existiert, für das (4.97) gilt. Zu gegebenem  $\mathcal{C}$  wählen wir für  $\mathcal{S}$  zweckmäßig diejenige Fläche, die der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  beim Durchlaufen von  $\mathcal{C}$  überstreicht:



Falls also  $(\mathbf{x}(t); t_1, t_2)$  eine geeignete Parametrisierung von  $\mathcal{C}$  ist, dann ist

$$(\mathbf{x}(s, t) = s\mathbf{x}(t); 0, 1, t_1, t_2)$$

eine geeignete (wenn auch nicht im strengen Sinne ‘einfache’) Parametrisierung von  $\mathcal{S}$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^1 \mathbf{B}(s\mathbf{x}(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) \times s\dot{\mathbf{x}}(t)) ds \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^1 s\mathbf{x}(t) \times \mathbf{B}(s\mathbf{x}(t)) ds \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( - \int_0^1 s\mathbf{x} \times \mathbf{B}(s\mathbf{x}) ds \right) \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

(4.97) ist also für

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^1 s\mathbf{x} \times \mathbf{B}(s\mathbf{x}) ds \quad (4.98)$$

erfüllt. Da (4.98) von  $\mathcal{C}$  unabhängig ist, ist dies eine<sup>58</sup> Lösung von (4.96), wie man auch leicht direkt nachrechnen kann (Übungsaufgabe 65). ■

Sei  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  2-mal stetig differenzierbar<sup>59</sup> und seien  $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}'(\mathbf{x})$  **quellfreie** Vektorpotentiale von  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ . Dann gilt also

$$\text{rot} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}'(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{div} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}'(\mathbf{x})) = 0$$

Version vom 26. März 2009

<sup>58</sup>Man beachte den **lokalen** Charakter dieser Lösung.

<sup>59</sup>Andernfalls betrachte man im folgenden anstelle von  $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}'(\mathbf{x}))$  das mithilfe eines geeigneten Skalarfeldes  $\Phi(\mathbf{x})$  geglättete Vektorfeld  $\int_{\mathcal{G}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\mathbf{A}(\mathbf{x}') - \mathbf{A}'(\mathbf{x}')) dV_{\mathbf{x}'}$ .

und somit nach (4.87)

$$\Delta (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}'(\mathbf{x})) = 0.$$

Falls beide Vektorpotentiale im Unendlichen (in allen Richtungen gleichmäßig) verschwinden, müssen sie daher nach dem Satz von EARNSHAW übereinstimmen. Mit anderen Worten: Es gibt höchstens ein **quellfreies** Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  mit  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{A}(\mathbf{x})| = 0$ . Falls  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet, existiert diese Lösung:

### Lemma 4.5.1

- Gegeben: (i)  $\epsilon > 0$ ,  
(ii) *stetig differenzierbares, quellfreies Vektorfeld*  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  mit:  
 $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{2+\epsilon} (|\mathbf{B}(\mathbf{x})| + |(\mathcal{L}_e \mathbf{B})(\mathbf{x})|) = 0$  für alle  $\mathbf{e}$ .

Behauptung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'}$$

ist das *einzigste quellfreie Vektorpotential* von  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  mit  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{A}(\mathbf{x})| = 0$ .

### Beweisskizze:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \left( \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} \right) \\ &\stackrel{(4.87)}{=} -\Delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} \\ &= -\Delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'} \\ &\stackrel{\text{Poisson-Gl.}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Man kann zeigen,<sup>60</sup> daß zu jedem stetigen Skalarfeld  $\mu(\mathbf{x})$  eine 2-mal stetig differenzierbare Lösung  $\Phi(\mathbf{x})$  der POISSONSchen Differentialgleichung<sup>61</sup>

$$\Delta \Phi = -4\pi \mu$$

existiert. Damit ergibt sich der

<sup>60</sup>Siehe (Lücke, 1995).

<sup>61</sup>Für räumlich begrenzte  $\mu$  war die Lösung durch (4.63) gegeben.



**Satz 4.5.2 (Fundamentalsatz der Vektoranalysis)** *Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  erlaubt eine Zerlegung*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x})$$

*in ein wirbelfreies (d.h. konservatives) stetig differenzierbares Feld  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$  und ein quellfreies stetig differenzierbares Feld  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ . Falls eine der Bedingungen*

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F}_1(\mathbf{x})| = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F}_2(\mathbf{x})| = 0$$

*erfüllt werden kann, ist diese Zerlegung dadurch eindeutig festgelegt.*

**Beweisskizze:** Man wähle eine Lösung von

$$\Delta\Phi = -\operatorname{div}\mathbf{F}$$

und setze

$$\mathbf{F}_1 = -\operatorname{grad}\Phi.$$

Damit ist eine Zerlegung der gewünschten Art gegeben. Sei nun

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'_2(\mathbf{x})$$

eine weitere Zerlegung der gewünschten Art. Dann ist

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'_j(\mathbf{x}) = (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'_j(\mathbf{x})) - (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}))$$

für  $j = 1, 2$  sowohl wirbel- als auch quellfrei, genügt also nach (4.87) der LAPLACE-Gleichung. Falls also  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'_1(\mathbf{x})$  oder  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'_2(\mathbf{x})$  außerdem im Unendlichen verschwindet, müssen nach dem Satz von EARNSHAW somit beide Zerlegungen übereinstimmen. ■

Falls  $\mathbf{F}$  (zusammen mit seinen Ableitungen 1. Ordnung) im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet, ist die Zerlegung im Sinne des Fundamentalsatzes nach (4.87) offensichtlich durch

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'}, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'}$$

gegeben. Das hat folgende direkte Konsequenz:

**Jedes konservative** Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , das im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet, läßt sich — analog zum Gravitationsfeld einer Massenverteilung oder zum COULOMB-Feld einer elektrischen Ladungsverteilung — in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int_{\mathbb{R}^3} \kappa \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{\mathbf{x}'}$$

mit der *Ladungsdichte*

$$\rho(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{4\pi\kappa}$$

darstellen!

#### 4.5.4 Funktionentheoretische Hilfsmittel

Bzgl. der in diesem Abschnitt nicht angegebenen Beweise sei auf Kapitel 2 von (Lücke, ftm) verwiesen. Wann immer von einem Flächenstück  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$  die Rede ist, ist  $\mathbb{C}$  im Sinne von Abschnitt 2.3.4 als  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ -Ebene des  $\mathbb{R}^3$  mit rechtshändiger Orthonormalbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  zu verstehen und die Flächennormale von  $\mathcal{S}$  mit  $\mathbf{e}_3$  zu identifizieren. Damit ist die Orientierung des Randes  $\partial S$  im Sinne von Definition 4.3.6 festgelegt.

**Definition 4.5.3** Seien  $\mathcal{O}$  eine offene<sup>62</sup> Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f(z)$  eine komplexwertige Funktion über  $\mathcal{O}$ . Dann heißt  $f(z)$  in  $\mathcal{O}$  **holomorph**, wenn die komplexe Ableitung

$$\frac{d}{dz} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta z \neq 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

von  $f(z)$  für alle  $z \in \mathcal{O}$  existiert und (als Vektorfeld betrachtet) stetig<sup>63</sup> ist.

Für Funktionen einer komplexen Variablen gelten — unter offensichtlichen Voraussetzungen — die entsprechenden Regeln wie für Funktionen einer reellen Variablen.<sup>64</sup>

1. **Linearität:**

$$\frac{d}{dz} (z_1 f(z) + z_2 g(z)) = z_1 f'(z) + z_2 g'(z),$$

2. **Produktregel:**

$$\frac{d}{dz} (f(z) g(z)) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z),$$

3. **Quotientenregel:**

$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{(g(z))^2},$$

<sup>62</sup>**Offen** meint: Zu jedem Punkt in  $\mathcal{O}$  gibt es eine ganze Umgebung, die in  $\mathcal{O}$  liegt.

<sup>63</sup>Man kann zeigen, daß die Stetigkeit von  $f'(z)$  automatisch gegeben ist (Satz von GOURSAT).

<sup>64</sup>Für holomorphe Funktionen einer einzigen Variablen schreiben wir natürlich  $f'(z)$  bzw.  $\frac{d}{dz} f(z)$  statt  $\frac{\partial}{\partial z} f(z)$ .

4. **Kettenregel:**

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = g'(z) f'(g(z)),$$

5. Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{d}{dz} f^{-1}(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))},$$

6. Ableitung von Potenzen:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

7. Ableitung impliziter Funktionen:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = \dot{z}(t) f'(z(t)).$$

**Lemma 4.5.4** Seien  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f(z)$  eine komplexwertige Funktion über  $\mathcal{O}$ .  $f(z)$  ist genau dann holomorph, wenn

$$u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Re(f(x + iy)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

und

$$v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Im(f(x + iy)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

in  $\mathcal{O}$  stetig differenzierbar (im Sinne von Skalarfeldern) sind und dort den CAUCHY-RIEMANNschen **Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x, y).$$

genügen.

**Folgerung 4.5.5** Seien  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f(z)$  eine in  $\mathcal{O}$  holomorphe Funktion. Dann ist

$$f^\uparrow(z) \stackrel{\text{def}}{=} (f(z^*))^* \quad \forall z \in \mathcal{O}^\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} \{z : z^* \in \mathcal{O}\}$$

eine in  $\mathcal{O}^\uparrow$  holomorphe Funktion von  $z$  und es gilt

$$\frac{d}{dz} f^\uparrow(z) = (f'(z^*))^* \quad \forall z \in \mathcal{O}^\uparrow.$$

**Folgerung 4.5.6** Seien  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück in  $\mathbb{C}$  (als Ebene im  $\mathbb{R}^3$  aufgefaßt) und  $f(z)$  eine holomorphe Funktion über  $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}$ . Dann besitzt  $f(z)$  eine **Stammfunktion**  $F(z)$ , d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathcal{O}.$$

**Definition 4.5.7** Seien  $\mathcal{C}$  ein Wegstück in  $\mathbb{C}$  mit einfacher Parametrisierung  $(z(t), t_1, t_2)$  und  $f(z)$  eine auf  $\mathcal{C}$  stetige Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

als das **komplexe Wegintegral**<sup>65</sup> von  $f(z)$  über  $\mathcal{C}$ .

**Lemma 4.5.8** Seien  $\mathcal{C}$  ein einfaches Wegstück in  $\mathbb{C}$  mit Anfangspunkt  $z_1$  und Endpunkt  $z_2$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$  eine offene Umgebung von  $\mathcal{C}$  und  $F(z)$  eine in  $\mathcal{O}$  holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

**Folgerung 4.5.9 (CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ)** Seien  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  eine in  $\mathcal{O}$  holomorphe Funktion und  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  ein einfaches Flächenstück. Dann gilt  $\int_{\partial\mathcal{S}} f(z) dz = 0$ .

Mithilfe des CAUCHYSCHEN Integralsatzes läßt sich leicht zeigen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{R}}} \quad (4.99)$$

für alle  $\mathcal{R}, z_0 \in \mathbb{C}$  mit:  $\Re(\mathcal{R}^2) > 0 < \Re(\mathcal{R})$

(siehe z.B. Beweis von Gleichung 2.31 von (Lücke, ftm)).

<sup>65</sup>Das komplexe Wegintegral ist natürlich von der speziellen Wahl der Weg-Parametrisierung unabhängig.

**Lemma 4.5.10 (CAUCHYsche Integralformel)** Seien  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück in  $\mathbb{C}$ ,  $z_0$  ein Punkt aus dem Inneren  $\underline{\mathcal{S}}$  von  $\mathcal{S}$  und  $f(z)$  eine auf ganz  $\mathcal{S}$  stetige Funktion, die im Inneren von  $\mathcal{S} \setminus \{z_0\}$  holomorph ist. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Mithilfe der CAUCHYschen Integralformel beweist man für holomorphe Funktionen leicht<sup>66</sup> das sog. **Maximum-Prinzip**:

$$\sup_{z \in \mathcal{S}} |f(z)| = |f(\hat{z})| \quad \text{für geeignetes } \hat{z} \in \partial\mathcal{S},$$

falls  $f(z)$  in einer Umgebung des einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  holomorph ist.

**Lemma 4.5.11** Seien  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück in  $\mathbb{C}$  und  $g(z)$  eine auf  $\partial\mathcal{S}$  stetige Funktion. Dann gilt

$$\left(\frac{d}{dz_0}\right)^\nu \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = \nu! \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{\nu+1}} dz \quad \forall z_0 \in \underline{\mathcal{S}}, \nu \in \mathbb{N}.$$

**Folgerung 4.5.12** Seien  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f(z)$  eine in  $\mathcal{O}$  holomorphe Funktion. Dann ist  $f(z)$  in  $\mathcal{O}$  **beliebig oft** komplex differenzierbar und für jedes einfache Flächenstück  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  gilt

$$f^{(\nu)}(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dz}\right)^\nu f(z)|_{z=z_0} = \frac{\nu!}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\nu+1}} dz \quad \forall z_0 \in \underline{\mathcal{S}}, \nu \in \mathbb{N}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>66</sup>Der Beweis ist analog demjenigen des Satzes von EARNSHAW (Satz 4.4.11): Man zeigt zunächst, daß  $|f(z_0)|$  für hinreichend kleines  $r > 0$  nie größer sein kann als der Mittelwert von  $|f(z)|$  über  $\partial U_r(z_0)$ .

**Folgerung 4.5.13** Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sei  $0 < r_1 < r_2$  und sei  $f(z)$  in einer Umgebung von

$$\mathcal{D}_{r_1, r_2} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$$

holomorph. Dann ist die **LAURENT-Entwicklung**

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu (z' - z_0)^\nu \quad \forall z \in \mathcal{D}_{r_1, r_2} \setminus \partial \mathcal{D}_{r_1, r_2},$$

$$c_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\nu+1}} dz,$$

absolut konvergent.

**Folgerung 4.5.14** Seien  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  und  $f(z)$  eine in  $U_R(z_0)$  holomorphe Funktion. Dann konvergiert die **TAYLOR-Entwicklung**

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \quad \forall z \in U_R(z_0)$$

absolut.

**Definition 4.5.15** Wenn die Voraussetzungen von Folgerung 4.5.13 für alle  $r_1 \in (0, r_2)$  erfüllt sind, bezeichnet man  $c_{-1}$  als das **Residuum** von  $f(z)$  an der Stelle  $z = z_0$ .

**Folgerung 4.5.16 (Residuensatz)** Sei  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück in  $\mathbb{C}$  und sei  $f(z)$  in einer Umgebung von  $\mathcal{S}$  mit Ausnahme endlich vieler (voneinander verschiedener) Punkte  $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{S} \setminus \partial \mathcal{S}$  holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial \mathcal{S}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}_{z_\nu}(f),$$

wobei  $\text{Res}_{z_\nu}(f)$  jeweils das Residuum von  $f(z)$  an der Stelle  $z = z_\nu$  bezeichnet.

**Folgerung 4.5.17 (Satz von LIOUVILLE)** Sei  $f(z)$  eine **ganze analytische Funktion**, d.h.  $f(z)$  sei in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

$$f \text{ ist polynomial beschränkt} \quad \implies \quad f \text{ ist ein Polynom.}$$

**Beweis:** Siehe Übungsaufgabe 42 von (Lücke, ftm). ■

**Folgerung 4.5.18 (Fundamentalsatz der Algebra)** Zu jedem Polynom  $n$ -ten Grades  $Q(z)$  existieren komplexe Zahlen  $a, z_1, \dots, z_n$  mit

$$Q(z) = a \prod_{j=1}^n (z - z_j) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Beweis:** Siehe Satz 3.1.2 von (Lücke, ftm). ■

**Lemma 4.5.19** Seien  $\epsilon, R > 0$  und sei  $\{c_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu R^\nu < \infty$ . Dann konvergiert  $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$  absolut und gleichmäßig für alle  $z \in U_{R-\epsilon}(0)$  gegen eine holomorphe Funktion mit:

$$\frac{d}{dz} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu z^{\nu-1} \quad \forall z \in U_{R-\epsilon}(0).$$

**Beweisskizze:** Aus der Konvergenz von  $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu R^\nu$  folgt

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}_+} |c_\nu R^\nu| < \infty$$

und somit

$$\left| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} c_\nu z^\nu \right| \leq S \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \left( \frac{R-\epsilon}{R} \right)^\nu \quad \forall z \in U_{R-\epsilon}(0),$$

woraus die Behauptung leicht folgt. ■





**Teil III**  
**Differentialgleichungen**



# Kapitel 5

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

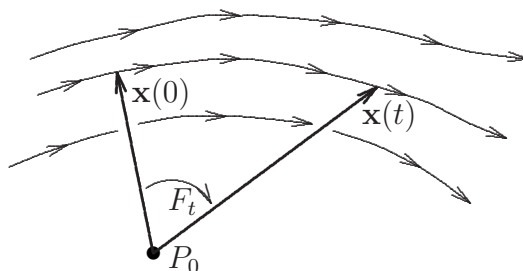
### 5.1 Vektorielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

#### 5.1.1 Motivation und Definitionen

Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  das (stationäre) Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit. Die Bahnkurve (*Stromfaden*) eines 'Flüssigkeitspartikel' genügt dann der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) \quad (5.1)$$

Intuitiv ist klar, daß zu jedem Anfangswert  $\mathbf{x}(0)$  genau eine Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  existiert:



Wenn das richtig ist, kann man also definieren:

$$F_t(\mathbf{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) \text{ Lösung von (5.1) mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.2)$$

Die Schar von Abbildungen  $F_t$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , bezeichnet man dann als den **Fluß** des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , und dafür gilt:

$$F_t F_{t'} = F_{t+t'} \quad (5.3)$$

**Beweis:** Sei  $\mathbf{x}(t)$  die Lösung zur Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Dann ist  $\mathbf{x}'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t+t')$  die Lösung zur Anfangsbedingung  $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}'(t')$  und somit

$$F_{t+t'}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t+t') = \mathbf{x}'(t) = F_t(\mathbf{x}'_0) = F_t(F_{t'}(\mathbf{x}_0))$$

■

Die Konsequenzen aus diesen Betrachtungen sollten sich auch auf den Fall übertragen lassen, daß die Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v}$  Räumen mit von 3 verschiedener Dimension angehören. In diesem Sinne ist (5.1) der Prototyp einer vektoriellen Differentialgleichung 1. Ordnung:

**Definition 5.1.1** *Unter einer (expliziten, gewöhnlichen<sup>1</sup>) vektoriellen Differentialgleichung 1. Ordnung verstehen wir eine Gleichung der Form*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}(t)), \quad (5.4)$$

wobei  $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}(t))$  ein  $t$ -abhängiges Vektorfeld über einem  $n$ -dimensionalen (euklidischen) Vektorraum  $V_n$  ist.

Als **Lösung** der Differentialgleichung bezeichnen wir jede stetig differenzierbare Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  (mit Werten in  $V_n$ ), für die (5.4) gilt.

Die Differentialgleichung heißt **linear**, falls eine Vektorfunktion  $\mathbf{v}_0(t)$  (**Inhomogenität**) und ein lineares,<sup>2</sup>  $t$ -abhängiges Vektorfeld  $\mathbf{T}_t(\mathbf{x})$  existieren mit

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(t) + \mathbf{T}_t(\mathbf{x}).$$

Die lineare Differentialgleichung heißt **homogen**, falls  $\mathbf{v}_0 = 0$ .

### Anmerkungen:

- (i) Bei Darstellung in Spaltenschreibweise bzgl. einer Basis bezeichnet man (5.4) auch als ein **System von** (i.a. gekoppelten) **Differentialgleichungen 1. Ordnung**.
- (ii) Von der  $t$ -Abhängigkeit des Vektorfeldes  $\mathbf{v}_t(\mathbf{x})$  kann man sich durch Erhöhung der Dimension des Vektorraumes befreien. Indem man nämlich bzgl. einer Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n+1}\}$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_{X^{n+1}/E}^1(X^1, \dots, X^n) \\ \vdots \\ v_{X^{n+1}/E}^n(X^1, \dots, X^n) \\ E \end{pmatrix}, \quad E \stackrel{\text{def}}{=} \text{phys. Einh. v. } \mathbf{v}_t,$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Während die sog. **gewöhnlichen Differentialgleichungen** nur Funktionen einer einzigen Variablen behandeln, stellen die sog. **partiellen Differentialgleichungen**, wie etwa die MAXWELLSchen Gleichungen, Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher dar.

<sup>2</sup>Es gilt also  $\mathbf{T}_t(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{T}_t(\mathbf{y})$ .

wählt, ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(t)), \\ X^{n+1}(0) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}(t)) \\ \text{für } \mathbf{x}(t) = (X^1(t), \dots, X^n(t))^T. \end{array} \right.$$

**Beispiel:**<sup>3</sup> Der Impuls  $\mathbf{p}(t)$  eines Elektrons im homogenen zeitabhängigen elektromagnetischen Feld  $\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)$  genügt der vektoriellen, inhomogenen, linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{T}_t(\mathbf{p}(t)), \quad \mathbf{G}(t) \stackrel{\text{def}}{=} q_e \mathbf{E}(t), \quad \mathbf{T}_t(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_e}{m_e} \mathbf{p} \times \mu_0 \mathbf{H}(t)$$

(im S.I. in nichtrelativistischer Näherung).

### 5.1.2 Eindeutigkeit von Lösungen

#### Satz 5.1.2

- Gegeben:
- (i)  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum  $V_n$
  - (ii) bzgl.  $t$  und  $\mathbf{x}$  gleichzeitig stetig differenzierbares  $t$ -abhängiges Vektorfeld  $\mathbf{v}_t(\mathbf{x})$  über  $V_n$
  - (iii)  $\mathbf{x}_0 \in V_n$
  - (iv) Zeitpunkt  $t_0$
  - (v)  $\delta > 0$
  - (vi) stetig differenzierbare Vektorfunktionen  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  mit  $\mathbf{x}_j(t_0) = \mathbf{x}_0$  und  $\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}_j(t))$  für  $\|t - t_0\| < \delta, j \in \{1, 2\}$

Behauptung:  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$  für  $\|t - t_0\| < \delta$ .

**Beweisskizze:** Für gegebenes  $t_0$  und  $\delta' > 0$  bezeichne  $B_{t_0, \delta'}$  jeweils die Menge aller stetigen Vektorfunktionen  $\boldsymbol{\xi}(t)$  über  $U_{\delta'}(t_0)$  mit endlicher Norm

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_{t_0, \delta'} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in U_{\delta'}(t_0)} |\boldsymbol{\xi}(t)|.$$

Für beliebig vorgegebene  $T, R$  ist dann die Einschränkung der Abbildung

$$\boldsymbol{\xi}(t) \longrightarrow \left( \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi} \right) (t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\xi}(t')) dt'$$

auf<sup>4</sup>

$$M_{t_0, \mathbf{x}_0, R} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{\xi} \in B_{t_0, \delta'} : \|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}\|_{t_0, \delta'} < R \right\}$$

<sup>3</sup>Vgl. Übungsaufgabe 29.

<sup>4</sup>Hier identifizieren wir  $\mathbf{x}_0$  mit der entspr. konstanten Funktion.

für hinreichend kleines  $\delta' \in (0, \delta)$  **kontrahierend** bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{t_0, \delta'}$ ; d.h. es existiert ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit

$$\left\| \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, \delta'} \leq \lambda \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|_{t_0, \delta'} \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in M_{t_0, \mathbf{x}_0, R}.$$

Da andererseits aus (vi) entsprechend dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$\hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_j(t) \quad \text{für } t \in U_{\delta'}(t_0), j \in \{1, 2\}$$

folgt, muß somit

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{t_0, \delta'} = 0$$

gelten, wenn  $R$  hinreichend groß gewählt war. Da die entspr. Aussage offensichtlich auch für jeden anderen Zeitpunkt  $t'_0 \in (t - \delta, t + \delta)$  anstelle von  $t_0$  gilt, folgt somit die Behauptung. ■

**Nachweis der Kontraktionseigenschaft:** Aus (ii) und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\eta} + r\mathbf{e}) \Big|_{r=0}^{r=|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|} \\ &= |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| (\mathcal{L}_{\mathbf{e}} \mathbf{v}_{t'}) (\boldsymbol{\eta} + r'\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|} \end{aligned}$$

für geeignetes  $r' = r'(t', \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in [0, |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|]$ . Für beliebige  $T, R$  genügt  $\mathbf{v}(\cdot)$  im Gebiet

$$|t| < T, \quad |\boldsymbol{\xi}| < R, \quad |\boldsymbol{\eta}| < R$$

daher der sog. **LIPSCHITZ-Bedingung**

$$|\mathbf{v}_t(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{v}_t(\boldsymbol{\eta})| \leq C|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C = C(T, R)$ . Daraus ergibt sich die Kontraktionseigenschaft gemäß

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|_{t_0, \delta'} &= \sup_{t \in U_{\delta'}(t_0)} \left| \int_{t_0}^t (\mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\xi}(t')) - \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\eta}(t'))) dt' \right| \\ &\leq \delta' \sup_{t' \in U_{\delta'}(t_0)} |\mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\xi}(t')) - \mathbf{v}_{t'}(\boldsymbol{\eta}(t'))|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Offensichtlich lassen sich  $\delta'$  und  $\lambda$  sogar unabhängig von  $t_0 \in T$  wählen!

### 5.1.3 Existenz der Flußlinien

Aus dem Beweis von Satz 5.1.2 erkennt man auch die Gültigkeit von

**Satz 5.1.3**

Gegeben:  $V_n, \mathbf{v}_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0$  wie in Satz 5.1.2

Behauptung: Es existieren ein **maximales**, offenes Zeitintervall  $I$  (i.d. Regel  $I = \mathbb{R}$ ) mit  $t_0 \in I$  sowie eine stetig differenzierbare Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  über  $I$  mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  und

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in I.$$

Wenn sich  $t$  einer **endlichen** Intervallgrenze von  $I$  (sofern eine solche überhaupt existiert) nähert, strebt  $|\mathbf{x}(t)|$  gegen Unendlich.

**Beweisskizze [PICARD-LINDELÖF-Verfahren]:** Wir definieren

$$\boldsymbol{\eta}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_0 \quad \forall t$$

und wählen  $R$  groß genug, daß

$$\left\| \boldsymbol{\eta} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, 1} < \frac{R}{2}$$

gilt. Gemäß Beweis zu Satz 5.1.2 existiert ein  $\delta' \in (0, 1)$ , für das

$$\left\| \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}_1 - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}_2 \right\|_{t_0, \delta'} \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|_{t_0, \delta'} \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in M_{t_0, \mathbf{x}_0, R}$$

gilt. Mit der rekursiven Definition

$$\hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^0 \boldsymbol{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\xi}, \quad \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^{\nu+1} \boldsymbol{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} N_{t_0, \mathbf{x}_0}^\nu (\hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^\nu \boldsymbol{\xi}) \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & \left\| \boldsymbol{\eta} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^{\nu+1} \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, \delta'} \\ & \leq \underbrace{\left\| \boldsymbol{\eta} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, \delta'}}_{\leq R/2} + \underbrace{\left\| \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\eta} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^2 \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, \delta'}}_{\leq 2^{-1} R/2} + \dots + \underbrace{\left\| \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^\nu \boldsymbol{\eta} - \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^{\nu+1} \boldsymbol{\eta} \right\|_{t_0, \delta'}}_{\leq 2^{-\nu} R/2} \\ & < R. \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, daß

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left( \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0}^\nu \boldsymbol{\eta} \right) (t) \quad \text{für } t \in U_{\delta'}(t_0)$$

als stetige<sup>5</sup> Funktion über  $U_{\delta'}(t_0)$  existiert und dort der Gleichung

$$\mathbf{x}(t) = \left( \hat{N}_{t_0, \mathbf{x}_0} \mathbf{x} \right) (t);$$

d.h. der Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_{t'}(\mathbf{x}(t')) dt' \quad \forall t \in U_{\delta'}(t_0)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Ganz allgemein sind die Grenzwerte gleichmäßig konvergenter Folgen stetiger Funktionen auch stetige Funktionen, wie man leicht sieht.

genügt. Aus dieser Integralgleichung folgt

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

sowie durch Differentiation:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in U_{\delta'}(t_0).$$

Es existiert also die gesuchte Lösung in einer Umgebung von  $t = t_0$ . Wenn diese Lösung bei maximaler Fortsetzung z.B. in Richtung wachsender  $t$  beschränkt bleibt, ergibt sich durch ständige Wiederholung des beschriebenen Verfahrens für wachsende Anfangszeiten eine Fortsetzung auf  $[t_0, +\infty)$ . Eine analoge Überlegung gilt für die linke Grenze von  $I$ . ■

## 5.2 Vektorielle Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 5.2.1 2. Ordnung zur Orientierung

Als Prototyp einer (expliziten,<sup>6</sup> gewöhnlichen) vektoriellen Differentialgleichung 2. Ordnung kann man die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes  $m$  in einem Geschwindigkeits- und Zeit-abhängigem Kraftfeld<sup>7</sup>  $\mathbf{F}_t$  ansehen:

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \quad (5.5)$$

Das zugehörige Anfangswertproblem<sup>8</sup> ist im Prinzip dasselbe, wie das in 5.1 behandelte. Mit den Definitionen<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \text{ Zeiteinh.}) \in V_{2n} \\ \mathbf{V}_t(\mathbf{X}(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \dot{\mathbf{x}}(t), \frac{1}{m} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \text{ Zeiteinh.} \right) \in V_{2n} \end{aligned}$$

ist (5.5) nämlich äquivalent zu

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{V}_t(\mathbf{X}(t)) \quad (5.6)$$

und die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

sind äquivalent zu

$$\mathbf{X}(t_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 \text{ Zeiteinh.})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>**Explizit** heißt eine Differentialgleichung, wenn sie die höchste Ableitung durch die niedrigeren ausdrückt.

<sup>7</sup>Z.B.  $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = q(\mathbf{E}_t(\mathbf{x}(t)) + \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B}_t(\mathbf{x}(t)))$

<sup>8</sup>Vgl. 3.3.2.

<sup>9</sup>Hierbei sind  $\mathbf{x}(t)$  und  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  formal als unabhängig zu betrachten. Siehe dazu 5.2.3.



### 5.2.2 Allgemeine Definition

**Definition 5.2.1** Unter einer (expliziten, gewöhnlichen) **vektoriellen Differentialgleichung  $N$ -ter Ordnung** verstehen wir eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^N \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_t \left( \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \text{ Zeiteinh.}, \dots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{N-1} \mathbf{x}(t) (\text{Zeiteinh.})^{N-1} \right),$$

wobei  $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  eine  $t$ -abhängige  $V_n$ -wertige<sup>10</sup> Funktion der  $N$  Vektor-Variablen  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in V_n$  ist. Als **Lösung** der Differentialgleichung bezeichnen wir jede  $N$ -mal stetig differenzierbare Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  (mit Werten in  $V_n$ ), die der Differentialgleichung genügt. Die Differentialgleichung heißt **linear**, falls eine Vektorfunktion  $\mathbf{G}(t)$  (**Inhomogenität**) und lineare  $t$ -abhängige Vektorfelder  $\mathbf{T}_{1,t}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{T}_{N,t}(\mathbf{x})$  über  $V_n$  existieren mit

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \mathbf{G}(t) + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{T}_{\nu,t}(\mathbf{x}_\nu).$$

Die lineare Differentialgleichung heißt **homogen**, falls  $\mathbf{G}(t) = 0$  für alle  $t$ .

#### Anmerkungen:

- (i) Bei Darstellung in Spaltenschreibweise bzgl. einer Basis spricht man von einem **System von** (i.a. gekoppelten) **Differentialgleichungen  $N$ -ter Ordnung**.
- (ii) Eine **skalare** (d.h.  $n = 1$ ) **lineare** Differentialgleichung  $N$ -ter Ordnung ist also stets von der Form

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^N x(t) = \underbrace{g(t)}_{\text{Inhom.}} + \sum_{\nu=1}^N q_\nu(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu-1} x(t).$$

### 5.2.3 Rückführung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung

Nach 5.2.1 ist klar, wie sich eine vektorielle Differentialgleichung  $N$ -ter Ordnung auf eine solche der Form (5.6) zurückführen läßt:

Mit dem Vektorfeld

$$\mathbf{V}_t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \cdot (\text{Zeiteinh.})^N) / \text{Zeiteinh.} \quad (5.7)$$

<sup>10</sup> $V_n$  bezeichnet wieder den  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum.

gilt

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \left( \mathbf{x}(t), \dots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{N-1} \mathbf{x}(t) \cdot (\text{Zeiteinh.})^{N-1} \right), \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^N \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_t(\mathbf{X}(t)), \\ \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^\nu \mathbf{x}(t)\right)_{|t=t_0} = (\text{Zeiteinh.})^{-\nu} \mathbf{x}_\nu \text{ für } \nu = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\iff \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{V}_t(\mathbf{X}(t)), \\ \mathbf{X}(t_0) = (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \end{cases}$$

Auf diese Weise lassen sich die Sätze 5.1.2 und 5.1.3 auf (vektorielle) Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anwenden!

## 5.3 Lineare vektorielle Differentialgleichungen

### 5.3.1 Rückführung des homogenen Problems auf ein fundamentales Lösungssystem

Das **allgemeine** (also für bel.  $\mathbf{X}(t_0)$ ) Anfangswertproblem

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (5.9)$$

zur **homogenen, linearen** Differentialgleichung<sup>11</sup>

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{T}_t(\mathbf{X}(t)) \quad (5.10)$$

ist praktisch gelöst, wenn ein **fundamentales Lösungssystem** gefunden ist,<sup>12</sup> d.h. ein Satz von  $N'$  Lösungen<sup>13</sup>  $\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t)$  von (5.10) mit

$$\{\mathbf{X}_1(t_0), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t_0)\} \text{ Basis von } V_{N'} \quad (5.11)$$

Die gesuchte Lösung von (5.9)/(5.10) ist dann nämlich nach (2.28):

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^{N'} (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}^j) \mathbf{X}_j(t) \quad (5.12)$$

wobei:  $\{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^{N'}\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{zu } \{\mathbf{X}_1(t_0), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t_0)\} \text{ reziproke Basis}$

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup> $\mathbf{T}_t(\mathbf{X}(t))$  ist also ein **lineares** Vektorfeld.

<sup>12</sup>Für zeitunabhängiges  $\mathbf{T}_t$  ist die Lösung des Anfangswertproblems direkt durch  $\mathbf{X}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \underbrace{\mathbf{T}_t(\mathbf{T}_t \dots \mathbf{T}_t(\mathbf{X}_0))}_{\nu\text{-mal}}$  gegeben.

<sup>13</sup> $N' = N \cdot n$ , vgl. (5.7).

In Verallgemeinerung von (2.34) läßt sich zeigen, daß (5.11) äquivalent dazu ist, daß die sog. **WRONSKI-Determinante**

$$\det(\mathbf{X}_1(t_0), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t_0))$$

des Fundamentalsystems zur Zeit  $t_0$  von Null verschieden ist (siehe (7.31) und Lemma 7.3.8 von (Lücke, eine)). Aufgrund der entsprechenden Verallgemeinerung der CRAMERSchen Regel (siehe Aufgabe E16e) von (Lücke, eine)) sind die Entwicklungskoeffizienten in (5.12) durch

$$(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}^j) = \frac{\det(\mathbf{X}_1(t_0), \dots, \mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{N'}(t_0))}{\det(\mathbf{X}_1(t_0), \dots, \mathbf{X}_j(t_0), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t_0))} \quad (5.13)$$

gegeben (Auswertung für den Fall (5.7) mit  $n = 1$  als Übungsvorschlag).

### 5.3.2 Rückführung des inhomogenen Problems auf das homogene

Wie in Übungsaufgabe 32 überzeugt man sich leicht davon, daß sich das **allgemeine** Anfangswertproblem zur inhomogenen, **linearen** Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{T}_t(\mathbf{X}(t)) \quad (5.14)$$

auf dasjenige (nämlich (5.9)/(5.10)) der zugehörigen homogenen Gleichung zurückführen läßt, wenn man irgendeine **partikuläre** Lösung  $\mathbf{X}_{\text{part}}(t)$  um den Zeitpunkt  $t = t_0$  herum bereits kennt.<sup>14</sup> Dann folgt nämlich aus der Linearität von  $\mathbf{T}_t$ , daß

$$\mathbf{X}_{\text{hom}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_{\text{part}}(t) \quad (5.15)$$

genau dann die—nach Satz 5.1.2 eindeutige—Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{X}_{\text{hom}}(t_0) = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_{\text{part}}(t_0) \quad (5.16)$$

zur homogenen Gleichung (5.10) ist, wenn  $\mathbf{X}(t)$  die gesuchte Lösung von (5.9)/(5.14) ist.

Falls ein fundamentales Lösungssystem  $\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t)$  der homogenen Gleichung (5.10) bekannt ist, so ergibt sich daraus eine partikuläre Lösung von (5.14) durch **Variation der Konstanten**  $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}^j)$  in (5.12) in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\mathbf{X}_{\text{part}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N'} C_j(t) \mathbf{X}_j(t)$$

$$\text{wobei:}^{15} C_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Zeiteinh.}^{-1} \int_{t_0}^t \frac{\det(\mathbf{X}_1(t'), \dots, \mathbf{G}(t') \cdot \text{Zeiteinh.}, \dots, \mathbf{X}_{N'}(t'))}{\det(\mathbf{X}_1(t'), \dots, \mathbf{X}_j(t'), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t'))} dt' \quad (5.17)$$

<sup>14</sup> $\mathbf{X}_{\text{part}}(t)$  soll (5.14) erfüllen und in einer Umgebung von  $t = t_0$  erklärt sein. Die Anfangsbedingung (5.9) muß jedoch **nicht** erfüllt sein.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{X}}_{\text{part}}(t) \\
 = & \underbrace{\sum_{j=1}^{N'} C_j(t) \dot{\mathbf{X}}_j(t)}_{\substack{(5.10) \\ \text{Linear.}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N'} \dot{C}_j(t) \mathbf{X}_j(t)}_{\substack{(5.17) \\ \text{Cramer}}} \\
 & \quad \quad \quad = \sum_{j=1}^{N'} C_j(t) \mathbf{T}_t(\mathbf{X}_j(t)) \quad \quad \quad = \text{Zeiteinh.}^{-1} \sum_{j=1}^{N'} \frac{\det(\mathbf{X}_1(t'), \dots, \mathbf{G}(t') \cdot \text{Zeiteinh.}, \dots, \mathbf{X}_{N'}(t'))}{\det(\mathbf{X}_1(t'), \dots, \mathbf{X}_j(t'), \dots, \mathbf{X}_{N'}(t'))} \mathbf{X}_j(t) \\
 & \quad \quad \quad = \mathbf{T}_t(\mathbf{X}_{\text{part}}(t)) \quad \quad \quad = \mathbf{G}(t)
 \end{aligned}$$

■

Man beachte, daß (5.17) auch die (eindeutige) Lösung des sog **Einschaltproblems**

$$(\mathbf{G}(t) = 0 \text{ für } t < t_0) \implies (\mathbf{X}_{\text{part}}(t) = 0 \text{ für } t < t_0) \quad (5.18)$$

darstellt!

Bzgl. weiterer spezieller Lösungsmethoden siehe  
(Kamke, 1961; Kamke, 1965)

### 5.3.3 Anwendungsbeispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist von der Form

$$m \ddot{x}(t) + 2\rho \dot{x}(t) + \kappa x(t) = f(t). \quad (5.19)$$

Da dies mit

$$F_t(X^1, X^2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} (f(t) - \kappa X^1 - 2\rho X^2 / \text{Zeiteinh.})$$

die Form

$$\ddot{x}(t) = F_t(x(t), \dot{x}(t) \cdot \text{Zeiteinh.})$$

annimmt, ist (5.19) mit der Identifizierung

$$\mathbf{X}(t) \hat{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \cdot \text{Zeiteinh.} \end{pmatrix}$$

nach 5.2.3 äquivalent zur linearen Differentialgleichung **1. Ordnung**

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{T}(\mathbf{X}(t)), \quad (5.20)$$

wobei:<sup>16</sup>

$$\mathbf{G}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\text{Zeiteinh.}}{m} f(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} X^2/\text{Zeiteinh.} \\ -\frac{\text{Zeiteinh.}}{m} \kappa X^1 - \frac{2}{m} \rho X^2 \end{pmatrix}.$$

Für **kleine Dämpfung**, d.h. für

$$m \kappa > \rho^2 \geq 0 \quad (5.21)$$

ist **ein** fundamentales Lösungssystem von (5.20) durch

$$\mathbf{X}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \cdot \text{Zeiteinh.} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \cdot \text{Zeiteinh.} \end{pmatrix}$$

und

$$x_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\rho t} \cos(\omega_0 t), \quad x_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\rho t} \sin(\omega_0 t), \quad \text{mit } \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sqrt{m \kappa - \rho^2} \quad (5.22)$$

gegeben.<sup>17</sup> Die Entwicklungskoeffizienten der partikulären Lösung (5.17) von (5.20) sind also:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & e^{-\rho t'} \sin(\omega_0 t') \\ \frac{1}{m} f(t') & e^{-\rho t'} (-\rho \sin(\omega_0 t') + \omega_0 \cos(\omega_0 t')) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} e^{-\rho t'} \cos(\omega_0 t') & e^{-\rho t'} \sin(\omega_0 t') \\ e^{-\rho t'} (-\rho \cos(\omega_0 t') - \omega_0 \sin(\omega_0 t')) & e^{-\rho t'} (-\rho \sin(\omega_0 t') + \omega_0 \cos(\omega_0 t')) \end{pmatrix}} dt' \\ &= \frac{-1}{m \omega_0} \int_{t_0}^t f(t') \sin(\omega_0 t') e^{+\rho t'} dt', \\ C_2(t) &= \frac{+1}{m \omega_0} \int_{t_0}^t f(t') \cos(\omega_0 t') e^{+\rho t'} dt'. \quad (\text{analoge Rechnung}) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x_{\text{part}}(t) &= \frac{e^{-\rho t}}{m \omega_0} \left( \sin(\omega_0 t) \int_{t_0}^t f(t') \cos(\omega_0 t') e^{+\rho t'} dt' - \cos(\omega_0 t) \int_{t_0}^t f(t') \sin(\omega_0 t') e^{+\rho t'} dt' \right) \end{aligned}$$

die Lösung des Einschaltproblems

$$\left( f(t) = 0 \text{ für } t < t_0 \right) \implies \left( x_{\text{part}}(t) = 0 \text{ für } t < t_0 \right)$$

zu (5.19) für den Fall (5.21).

---

Version vom 26. März 2009

<sup>16</sup> $\mathbf{v}_t(\mathbf{X}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}(t) + \mathbf{T}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ F_t(\mathbf{X}(t)) \cdot \text{Zeiteinh.} \end{pmatrix}$  im Einklang mit (5.7).

<sup>17</sup>Vgl. Übungsaufgabe 34.



# Kapitel 6

## Lineare partielle Differentialgleichungen

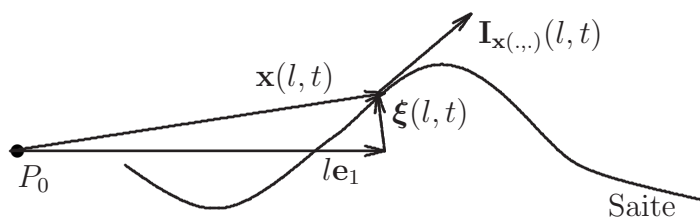
### 6.1 Kleine Schwingungen einer Saite

#### 6.1.1 Bewegungsgleichung

Es soll die Bewegungsgleichung für die Schwingungen einer gespannten Saite in folgender Näherung abgeleitet werden:<sup>1</sup>

- Der Biege­widerstand wird vernachlässigt, weil die Saite hinreichend dünn ist.
- Für die Zugkraft wird das **HOOKEsche Gesetz** angenommen: Der Betrag der Zugkraft ist proportional zur relativen Längenänderung der Saite am jeweiligen Ort.
- Die ungespannte Saite ist homogen.

Im Gleichgewichtszustand ohne äußere Kraft befinde sich die Saite auf der Geraden parallel  $\mathbf{e}_1$  durch den Bezugspunkt  $P_0$  der Ortsvektoren.  $\mathbf{x}(l, t)$  bezeichne jeweils den Ortsvektor zur Zeit  $t$  desjenigen Saitenquerschnitts, dessen Ortsvektor im Ruhezustand (ohne äußere Kraft)  $l\mathbf{e}_1$  ist:



Die Auslenkung aus dem Gleichgewichtszustand wird also durch die Vektorfunktion

$$\boldsymbol{\xi}(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(l, t) - l\mathbf{e}_1 \quad (6.1)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Die Schwerkraft wird gegebenenfalls als äußere Kraft berücksichtigt.

gegeben. Die innere Kraft, mit der der Teil der Saite zu  $l > l_0$  an dem Teil zu  $l < l_0$  angreift, sei jeweils mit  $\mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l_0, t)$  bezeichnet. Die Vektorsumme aller äußeren Kräfte, die auf das Teilstück zu  $l_1 < l < l_2$  wirken, sei jeweils mit  $\mathbf{F}(l_1, l_2; t)$  bezeichnet. Dann gilt für jedes solche Teilstück mit  $l_2 > l_1$

$$\mu \int_{l_1}^{l_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{x}(l, t) dl = \mathbf{F}(l_1, l_2; t) + \mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l_2, t) - \mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l_1, t)$$

wobei:

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Masse eines Saitenstücks der Länge } L \text{ im Gleichgewichtszustand (ohne äußere Kräfte)}}{L}. \quad (6.2)$$

Nach Division durch  $l_2 - l_1$  und Grenzübergang  $l_2 \rightarrow l_1$  ergibt sich somit die Bewegungsgleichung

$$\mu \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{x}(l, t) = \mathbf{f}(l, t) + \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l, t), \quad (6.3)$$

wobei

$$\mathbf{f}(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta l \rightarrow +0} \frac{\mathbf{F}(l, l + \Delta l; t)}{\Delta l}$$

die äußere Kraft pro  $l$ -Intervall bezeichnet. Es ist also nur noch  $\mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l, t)$  zu bestimmen:

Die Länge des Saitenstücks zum Parameterbereich  $[l - \Delta l, l]$  ist

$$L_1 = \Delta l$$

im Gleichgewichtszustand (ohne äußere Kräfte) und

$$L_1 + \Delta L = \int_{l-\Delta l}^l \left| \frac{\partial}{\partial l'} \mathbf{x}(l', t) \right| dl'$$

im gemäß  $\mathbf{x}(\cdot, t)$  ausgelenkten Zustand. Daher gilt<sup>2</sup>

$$\mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow +0} \left( (E_1 - E_0) + \frac{E_1}{\Delta l} \left( \int_{l-\Delta l}^l \left| \frac{\partial}{\partial l'} \mathbf{x}(l', t) \right| dl' - \Delta l \right) \right) \frac{\frac{\partial}{\partial l} \mathbf{x}(l, t)}{\left| \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{x}(l, t) \right|}$$

mit

$E_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Elastizitätsmodul der entspannten Saite,}$

$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Elastizitätsmodul der Saite im (gespannten) Gleichgewichtszustand,}$

und somit

$$\mathbf{I}_{\mathbf{x}(\cdot, \cdot)}(l, t) = \left( (E_1 - E_0) + E_1 \left( \left| \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{x}(l, t) \right| - 1 \right) \right) \frac{\frac{\partial}{\partial l} \mathbf{x}(l, t)}{\left| \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{x}(l, t) \right|}. \quad (6.4)$$



Wir wollen im folgenden die Schreibweise

$$f'(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial l} f(l, t), \quad \dot{f}(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} f(l, t)$$

sowie das entsprechende für höhere Ableitungen und vektorwertige Funktionen verwenden. Mit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'| &= \sqrt{1 + 2\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}' + (\boldsymbol{\xi}')^2} \\ &\underset{\text{lin. Näh.}}{\approx} 1 + \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}', \\ \frac{1}{|\mathbf{x}'|} &\underset{\text{lin. Näh.}}{\approx} 1 - \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}', \\ \left( \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} \right)' &= \frac{\overbrace{\mathbf{x}''}^{=\boldsymbol{\xi}''} |\mathbf{x}'| - \overbrace{\mathbf{x}'}^{=\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\xi}'} (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'') / |\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}'|^2} \\ &\underset{\text{lin. Näh.}}{\approx} \boldsymbol{\xi}_\perp'' \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\xi}'' - (\boldsymbol{\xi}'' \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \\ |\mathbf{x}''| &= \mathbf{x}'' \cdot \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} \\ &\underset{\text{lin. Näh.}}{\approx} \boldsymbol{\xi}'' \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

gilt dann nach (6.4)

$$\mathbf{I}'_{\mathbf{x}(\dots)} \underset{\text{lin. Näh.}}{\approx} (E_1 - E_0) \boldsymbol{\xi}_\perp'' + E_1 (\boldsymbol{\xi}'' \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$$

und somit für (6.3)

**in linearer Näherung:**

$$\left( \frac{1}{c_j} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \xi^j(l, t) - \left( \frac{\partial}{\partial l} \right)^2 \xi^j(l, t) = \frac{1}{E_j} f^j(l, t) \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

mit den Definitionen

$$c_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{E_j}{\mu}}, \quad E_2 \stackrel{\text{def}}{=} E_3 \stackrel{\text{def}}{=} E_1 - E_0.$$

und

$$\xi^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad f^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f},$$

wobei  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  eine beliebige Ergänzung von  $\mathbf{e}_1$  zu einer Orthonormalbasis ist.

Die Gleichungen für die **longitudinale Schwingung**  $\xi^1$  und die **transversalen Schwingungen**  $\xi^2, \xi^3$  sind also in linearer Näherung entkoppelt<sup>3</sup> und dementsprechend unabhängig voneinander zu lösen.

<sup>3</sup>Weil wir die äußere Kraft als vom Schwingungszustand unabhängig vorausgesetzt haben.

### 6.1.2 Energiesatz und Anfangswertproblem

Alle drei Gleichungen in (6.5) haben die Form der 1-dimensionalen *inhomogenen Wellengleichung*

$$\hat{c}^{-2} \ddot{\Psi}(l, t) - \Psi''(l, t) = j(l, t), \quad (6.6)$$

deren allgemeine Lösung sich analog zum Vorgehen bei gewöhnlichen **linearen** Differentialgleichungen<sup>4</sup> nach Auffinden einer partiellen Lösung auf die Lösung der **homogenen Wellengleichung**

$$\boxed{\hat{c}^{-2} \ddot{\Psi}(l, t) - \Psi''(l, t) = 0} \quad (6.7)$$

zurückführen läßt.

Der Einfachheit halber sei angenommen, daß die Saite bei  $l = l_1$  und  $l = l_2$  fest eingespannt sei, also die **Randbedingungen**<sup>5</sup>

$$\boxed{\Psi(l_1, t) = \Psi(l_2, t) = 0 \quad \forall t} \quad (6.8)$$

erfüllt seien, was natürlich

$$j(l_1, t) = j(l_2, t) = 0 \quad \forall t$$

voraussetzt. Dann ergibt sich durch partielle Integration<sup>6</sup>

$$\int_{l_1}^{l_2} \dot{\Psi}(l, t) \Psi''(l, t) dl = -\frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi'(l, t))^2 dl$$

und somit nach Multiplikation von (6.7) mit  $\mu \hat{c}^2 \dot{\Psi}(l, t)$  sowie Integration über  $l$  der Erhaltungssatz

$$(6.7) \implies \frac{d}{dt} E_{\Psi}(t) = 0, \quad (6.9)$$

wobei

$$E_{\Psi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\frac{\mu}{2} \int_{l_1}^{l_2} (\dot{\Psi}(l, t))^2 dl}_{=E_{\dot{\Psi}}^{\text{kin}}(t)} + \underbrace{\frac{\mu \hat{c}^2}{2} \int_{l_1}^{l_2} (\Psi'(l, t))^2 dl}_{=E_{\Psi}^{\text{pot}}(t)} \quad (6.10)$$

als Energie (des betrachteten Schwingungsfreiheitsgrads) zur Zeit  $t$  zu interpretieren ist. Wie beim harmonischen Oszillator<sup>7</sup> folgt aus dem Energiesatz (6.9) die Eindeutigkeit der Lösung von (6.7) zu vorgegebenen Anfangswerten

$$\Psi(l, 0) = g(l), \quad \dot{\Psi}(l, 0) = h(l). \quad (6.11)$$

<sup>4</sup>Siehe 5.3.2

<sup>5</sup>Geeignete Randbedingungen sind in der Tat notwendig, um die Lösung des Anfangswertproblems (6.7)/(6.11) eindeutig festzulegen. Auf die allgemeinsten Randbedingungen, die in diesem Sinne geeignet sind, sei hier nicht eingegangen.

<sup>6</sup>Siehe Gleichung (4.11)

<sup>7</sup>Siehe 3.5.1 und Übungsaufgaben 31,32.

Für je zwei Lösungen  $\Psi_1, \Psi_2$  des Anfangswertproblems (6.7)/(6.11) mit den Randbedingungen (6.8) ist nämlich

$$\Psi(l, t) = \Psi_1(l, t) - \Psi_2(l, t)$$

eine Lösung von (6.7) zu den Anfangswerten

$$\Psi(l, 0) = \dot{\Psi}(l, 0) = 0 \quad \forall l,$$

und Randbedingungen (6.8), woraus mit (6.9)

$$E_{\Psi}(t) = 0 \quad \forall t$$

und somit gemäß (6.10)

$$\Psi(l, t) = 0 \quad \forall l, t$$

folgt.

### 6.1.3 Lösungen für die fest eingespannte Saite

Die Saite sei an den Punkten

$$\boxed{l_1 = 0, l_2 = L} \tag{6.12}$$

eingespannt. Für natürliches  $n$  ist dann  $\Psi(l, t) = \Phi_n(l, t)$  mit

$$\Phi_n(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right) \cos(n\omega_0 t), \quad \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{L}\hat{c} \tag{6.13}$$

jeweils Lösung<sup>8</sup> von (6.7) zu den Randbedingungen (6.8) und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Phi_n(l, 0) &= \sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right) \quad \forall l, \\ \dot{\Phi}_n(l, 0) &= 0 \quad \forall l. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Entsprechend ist  $\Psi(l, t) = \Psi_n(l, t)$  mit

$$\Psi_n(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right) \sin(n\omega_0 t) \tag{6.15}$$

jeweils Lösung von (6.7) zu den Randbedingungen (6.8) und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Psi_n(l, 0) &= 0 \quad \forall l, \\ \dot{\Psi}_n(l, 0) &= n\omega_0 \sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right) \quad \forall l. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Hinsichtlich der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit reellen Zahlen bilden die Lösungen von (6.7)/(6.8)/(6.12) einen reellen Vektorraum  $V_{\text{Saite}}$  gemäß Definition 1.2.1. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Vektoren  $\Phi_n$  und

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Auf solche Lösungen führt der *Separationsansatz*  $\Psi(l, t) = g(l)\chi(t)$ .

$\Psi_n$  für natürliche  $n$  in  $V_{\text{Saite}}$  insgesamt linear unabhängig voneinander sind.<sup>9</sup> Nach Lemma 1.2.6 kann  $V_{\text{Saite}}$  also nicht endlichdimensional sein. Auch bilden die  $\Phi_n$  und  $\Psi_n$  keine Basis von  $V_{\text{Saite}}$  in dem Sinne, daß sich jedes Element von  $V_{\text{Saite}}$  als Linearkombination **endlich vieler**  $\Phi_n$  und  $\Psi_n$  darstellen läßt (**HAMEL-Basis**). Dagegen werden wir mithilfe der FOURIER-Theorie zeigen, daß sich jede Lösung von (6.7)/(6.8) als **unendliche** Linearkombination der  $\Phi_n$  und  $\Psi_n$  schreiben läßt.

Dazu beachten wir zweckmäßigerweise, daß jede (2-mal stetig differenzierbare) Lösung von (6.7)/(6.8)/(6.12) eine eindeutige (2-mal stetig differenzierbare) Fortsetzung zu beliebigen  $l$  erlaubt, die den Bedingungen

$$\boxed{\Psi(l, t) = -\Psi(-l, t) \quad \forall l, t} \quad (6.17)$$

und

$$\boxed{\Psi(l + 2L, t) = \Psi(l, t) \quad \forall l, t} \quad (6.18)$$

genügt. Umgekehrt garantieren die Bedingungen (6.17)/(6.18) die Randbedingungen (6.8) für  $[l_1, l_2] = [0, L]$ . Statt (6.7) über  $[0, L]$  mit diesen Randbedingungen zu lösen, kann man also (6.7) über  $\mathbb{R}$ -Längeneinheit mit den Zusatzbedingungen (6.17)/(6.18) lösen. Die allgemeine Lösung dafür ist nach D'ALEMBERT:

$$\boxed{\Psi(l, t) = \Psi_f(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\hat{c}t - l) - f(\hat{c}t + l),} \quad (6.19)$$

wobei  $f(l) = f(l + 2L) \quad \forall l$ .

Mit

$$f(l) = -\frac{1}{2} \left( g(l) + \frac{1}{\hat{c}} \int_0^l h(l') dl' \right)$$

sind dazu die Anfangsbedingungen (6.11) für ungerade, periodische  $g(l)$ ,  $h(l)$  erfüllt. Insbesondere gilt also

$$\Psi_f = \begin{cases} \Phi_n & \text{für } f(l) = -\frac{1}{2} \sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right), \\ \Psi_n & \text{für } f(l) = +\frac{1}{2} \cos\left(n\frac{\pi}{L}l\right). \end{cases}$$

Außerdem erkennt man aus (6.19), daß  $\hat{c}$  der Betrag der Ausbreitungsgeschwindigkeit der fortschreitenden Saitenwellen ist.

## 6.2 FOURIER-Theorie

Die Ausführungen von 6.1.3 führen auf die Frage, welche  $2L$ -periodischen Funktionen von  $l$  sich als unendliche Linearkombinationen der speziellen Funktionen  $\sin\left(n\frac{\pi}{L}l\right)$  und  $\cos\left(n\frac{\pi}{L}l\right)$  schreiben lassen. Dabei ist es zweckmäßig, mit komplexen Zahlen zu arbeiten. Statt  $\frac{\pi}{L}l$  werden wir zunächst  $\omega t$  schreiben.

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Z.B. mithilfe des inneren Produktes  $\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(l)g(l) dl$ .

### 6.2.1 FOURIER-Reihen

**Definition 6.2.1** Eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  heißt **stückweise stetig**, wenn sich jedes endliche Intervall so in endlich viele Teilintervalle zerlegen läßt, daß für jedes dieser Teilintervalle  $I$  folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $f(t)$  ist im Inneren von  $I$  stetig.
- (ii) Es existieren die Grenzwerte von  $f(\inf(I) + \epsilon)$  und  $f(\sup(I) - \epsilon)$  für  $\epsilon \rightarrow +0$ .

**Definition 6.2.2** Eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sich jedes endliche Intervall so in endlich viele Teilintervalle zerlegen läßt, daß für jedes dieser Teilintervalle  $I$  folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Im Inneren von  $I$  existiert die Ableitung  $\dot{f}(t)$  von  $f(t)$  und ist stetig.
- (ii) Es existieren die Grenzwerte von  $\dot{f}(\inf(I) + \epsilon)$  und  $\dot{f}(\sup(I) - \epsilon)$  für  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sie stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

**Definition 6.2.3** Eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  heißt **stückweise monoton**, wenn sich jedes endliche Intervall so in endlich viele Teilintervalle zerlegen läßt, daß  $f(t)$  im Inneren jedes dieser Teilintervalle monoton ist.

**Definition 6.2.4** Man sagt, eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  erfülle die **DIRICHLET-Bedingungen** zur Periode  $\frac{2\pi}{\omega}$ , wenn folgende vier Aussagen gelten:

- (i) Für alle  $t$  gilt  $f(t) = f(t + \frac{2\pi}{\omega})$ .
- (ii)  $f$  ist stückweise stetig.
- (iii)  $\Re(f)$  und  $\Im(f)$  sind stückweise monoton.
- (iv) Für alle  $t$  gilt  $f(t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} (f(t + \Delta t) + f(t - \Delta t))$ .

**Satz 6.2.5** Die komplexwertige Funktion  $f(t)$  genüge den DIRICHLETschen Bedingungen zur Periode  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Mit den **FOURIERSchen Entwicklungskoeffizienten**<sup>10</sup>

$$c_\nu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(t) e^{-i\nu\omega t} dt \quad \text{für } \nu \in \mathbb{Z} \quad (6.20)$$

<sup>10</sup>Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit  $\mathbb{Z}$  die Menge aller ganzen Zahlen.

gilt dann die **FOURIERSche Reihenentwicklung**

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu(f) e^{i\nu\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \cdot \text{Zeiteinheit}. \quad (6.21)$$

Die Konvergenz in (6.21) ist gleichmäßig über jedem abgeschlossenen Intervall  $I$ , über dem  $f$  stetig ist.<sup>11</sup> Falls  $f$  überall stetig ist und stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert (6.21) absolut und es gilt

$$c_\nu(f) = \frac{c_\nu(\dot{f})}{i\nu\omega} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}. \quad (6.22)$$

**Beweis:** Siehe Anhang B. ■

Indem wir nun wieder  $\frac{\pi}{L}l$  statt  $\omega t$  schreiben, wird (6.21) zu

$$f\left(\frac{\pi}{\omega L}l\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu(f) e^{i\frac{\nu\pi}{L}l} \quad \forall l \in \mathbb{R} \cdot \text{Längeneinheit}$$

und (6.20) zu

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2L} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{+\frac{\pi}{\omega}} f\left(\frac{\pi}{\omega L}l\right) e^{-i\frac{\nu\pi}{L}l} dl.$$

Damit ergibt sich für  $\omega = \pi/L$

für **ungerade**  $f$  :

$$\begin{aligned} f(l) &= 2i \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(f) \sin\left(\frac{\nu\pi}{L}l\right) \quad \forall l \in [-L, +L] \\ \text{mit } c_\nu &= -c_{-\nu}(f) \\ &= \frac{1}{2iL} \int_{-L}^L f(l) \sin\left(\frac{\nu\pi}{L}l\right) dl \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Entsprechend ergibt sich

für **gerade**  $f$  :

$$\begin{aligned} f(l) &= c_0(f) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(f) \cos\left(\frac{\nu\pi}{L}l\right) \quad \forall l \in [-L, +L] \\ \text{mit } c_\nu &= c_{-\nu}(f) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(l) \cos\left(\frac{\nu\pi}{L}l\right) dl \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

<sup>11</sup>Dank der DIRICHLET-Bedingungen ist  $f$  dann für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  auch über  $U_\epsilon(I)$  stetig.

Für stetig differenzierbare  $f$  ist die Konvergenz in (6.23) und (6.24) nach Satz 6.2.5 absolut und gleichmäßig über  $[-L, L]$ . Daher läßt sich die (nach 6.1.2 eindeutige) Lösung  $\Psi(l, t)$  der homogenen Wellengleichung (6.7) zu den Randbedingungen (6.8)/(6.12) und Anfangsbedingungen (6.11) für hinreichend gutartige  $g, h$  in der Form

$$\Psi(l, t) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n(g) \Phi_n(l, t) + \frac{c_n(h)}{n \omega_0} \Psi_n(l, t) \right)$$

darstellen, wobei die  $\Phi_n(l, t), \Psi_n(l, t)$  die speziellen Lösungen aus 6.1.3 sind und die Anfangswertfunktionen  $g$  und  $h$  als ungerade Funktionen fortgesetzt zu denken sind (Beweis als Übungsvorschlag).

## 6.2.2 FOURIER-Integrale

Für  $L \rightarrow +\infty$  bzw.  $\omega \rightarrow 0$  geht die FOURIER-Reihe in ein FOURIER-Integral über:

**Satz 6.2.6** Die komplexwertige Funktion  $f(t)$  genüge den DIRICHLETschen Bedingungen mit Ausnahme der Periodizitätsforderung (i) und sei absolut integrierbar, d.h. es sei

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T |f(t)| dt < \infty.$$

Dann existiert die sog. **FOURIER-Transformierte**

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R} / \text{Zeiteinheit} \quad (6.25)$$

und genügt der Bedingung

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \forall t \in \mathbb{R} \cdot \text{Zeiteinheit}. \quad (6.26)$$

**Beweis:** Siehe Anhang B. ■

**Anmerkung:** Zur (approximativen) numerischen Bestimmung des FOURIER-Integrals wird in der Praxis die sog. *schnelle FOURIER-Transformation* (FFT) — siehe z.B. Anhang A.1 von (Lücke, musi) — benutzt.

Für hinreichend gutartige  $f$  erkennt man leicht<sup>12</sup> die Gültigkeit des folgenden ‘FOURIER-Vokabulars’:

<sup>12</sup>Regel (F9) ist eine einfache Folgerung aus (4.99).

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$	$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$	
$c f(t)$	$c \tilde{f}(\omega)$	(F1)
$f_1(t) + f_2(t)$	$\tilde{f}_1(\omega) + \tilde{f}_2(\omega)$	(F2)
$\frac{\partial}{\partial t} f(t)$	$i\omega \tilde{f}(\omega)$	(F3)
$t f(t)$	$i \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{f}(\omega)$	(F4)
$f(t + \tau)$	$e^{+i\omega\tau} \tilde{f}(\omega)$	(F5)
$e^{-i\omega_0 t} f(t)$	$\tilde{f}(\omega + \omega_0)$	(F6)
$(f(t))^*$	$(\tilde{f}(-\omega))^*$	(F7)
$(f(-x))^*$	$(\tilde{f}(\omega))^*$	(F8)
$f(t) = e^{-\lambda t^2}$	$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{1}{4\lambda}\omega^2}$	(F9)
$\sqrt{2\pi} f_1(t) f_2(t)$	$\int \tilde{f}_1(\omega') \tilde{f}_2(\omega - \omega') d\omega'$	(F10)
$\int f_1(t') f_2(t - t') dt'$	$\sqrt{2\pi} \tilde{f}_1(\omega) \tilde{f}_2(\omega)$	(F11)
$\int f(t) dt = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(0)$		(F12)

## 6.3 Feldgleichungen

### 6.3.1 Freie elektromagnetische Wellen

In der Vorlesung über klassische Elektrodynamik wird gezeigt werden, daß die Komponenten sowohl der elektrischen Feldstärke als auch der magnetischen Kraftflußdichte elektromagnetischer Strahlung der **homogenen Wellengleichung**

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi(\mathbf{x}, t) - \Delta \Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6.27)$$

über dem  $\mathbb{R}^3$  genügen, wobei  $c$  nun den Betrag der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Anstelle von (6.8) verlangt man nun, daß die Lösungen  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  für  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  hinreichend schnell abfallen. Dann rechnet man mithilfe des GAUSSschen Satzes und (4.91) leicht nach, daß die analog (6.10) definierte ‘Energie’

$$E_\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t)\right)^2 + (\nabla \Psi(\mathbf{x}, t))^2 \right) dV_{\mathbf{x}} \quad (6.28)$$

zeitlich konstant ist. Wie in 6.1.2 folgt daraus die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}). \quad (6.29)$$



Direkte Verallgemeinerung der D'ALEMBERTSche Lösung (6.19) von (6.7) liefert die speziellen Lösungen<sup>13</sup>

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_{f, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(c|\mathbf{k}|t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (6.30)$$

von (6.27), die man als (nicht monochromatische) **ebene Wellen** bezeichnet. Dabei darf  $f$  natürlich nicht mehr periodisch sein, sondern sollte stattdessen im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden. (6.27) stellt zwar nicht mehr die allgemeinste Lösung von (6.27) dar, aber die Resultate zum FOURIER-Integral zeigen, daß sich jede Lösung von (6.27) als (kontinuierliche) Überlagerung von Lösungen der Form (6.30) darstellen läßt:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( e^{+i|\mathbf{k}|ct} \tilde{\Psi}_+(\mathbf{k}) + e^{-i|\mathbf{k}|ct} \tilde{\Psi}_-(\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dV_{\mathbf{k}} \quad (6.31)$$

mit

$$\tilde{\Psi}_{\pm}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \tilde{h}(\mathbf{k}) \pm \frac{\tilde{g}(\mathbf{k})}{i|\mathbf{k}|c} \right),$$

ist offensichtlich die Lösung von (6.27) zu den Anfangsbedingungen (6.29), wobei

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-3/2} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dV_{\mathbf{x}} \quad (6.32)$$

die direkte 3-dimensionale Verallgemeinerung der FOURIER-Transformierten (6.25) ist.

### 6.3.2 Wärmeleitung

Die Lösung (6.31) von (6.27) hätte man mithilfe der FOURIERSchen Integraltransformation auch systematisch ableiten können. Die Verfahren soll am Beispiel der Wärmeleitung erläutert werden:

Die Temperaturverteilung  $u(\mathbf{x}, t)$  eines homogenen, isotropen Körpers genügt — solange keine Wärmequellen (oder -Senken) vorhanden sind — der **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = D \Delta u(\mathbf{x}, t), \quad (6.33)$$

also der Diffusionsgleichung (4.57) mit der ‘Diffusionskonstanten’

$$D = \frac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{(\text{spezifische Wärme}) \cdot (\text{Massendichte})}.$$

---

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Antisymmetrie in  $\mathbf{x}$  muß nicht mehr gefordert werden, da im Endlichen keine Randbedingungen gestellt sind.

**Anmerkung:** (6.33) entspricht der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$$

für die Wärmestromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{grad} u(\mathbf{x}, t) \cdot \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

und die räumliche Wärmemengendichte

$$\rho(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) \cdot (\text{spezifische Wärme}) \cdot \text{Massendichte}.$$

Offensichtlich ist (6.33) – für hinreichend gutartige  $u(\mathbf{x}, t)$  – äquivalent zu der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\mathbf{k}, t) = -D |\mathbf{k}|^2 \tilde{u}(\mathbf{k}, t) \quad (6.34)$$

für die FOURIER-Transformierte

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, t) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-3/2} \int u(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV_{\mathbf{x}}$$

von  $u(\mathbf{x}, t)$  bzgl.  $\mathbf{x}$ . Die allgemeine Lösung von (6.34) ist

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, t) = e^{-D|\mathbf{k}|^2 t} \tilde{u}(\mathbf{k}),$$

wobei  $u(\mathbf{k})$  beliebig ist. Die Lösung von (6.33) zu (hinreichend gutartig) vorgegebenem  $u(\mathbf{x}, 0)$  ist also

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-D|\mathbf{k}|^2 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{u}(\mathbf{k}) dV_{\mathbf{k}}, \quad (6.35)$$

mit

$$\tilde{u}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-3/2} \int u(\mathbf{x}, 0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV_{\mathbf{x}}.$$

Mit den Regeln zur FOURIER-Transformation folgt daraus für  $t \geq 0$ :

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int p_t(\mathbf{x}') u(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) dV_{\mathbf{x}'},$$

wobei

$$\begin{aligned} p_t(\mathbf{x}') &\stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-D|\mathbf{k}|^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV_{\mathbf{k}} \\ &= (Dt)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}'|^2}{4Dt}}. \end{aligned}$$

Im Einklang mit der physikalischen Interpretation gilt also

$$\left( u(\mathbf{x}, 0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right) \quad \implies \quad \left( u(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \right).$$

Daß (6.35) für negative  $t$  i.a. **nicht** existiert, ist physikalisch durchaus plausibel (Irreversibilität des Wärmetransports).

# Anhang A

## Tensoren<sup>1</sup>

### A.1 Der Dualraum

#### A.1.1 Linearformen

**Definition A.1.1** Unter einer **Linearform** über einem reellen Vektorraum  $V$  versteht man eine Zuordnung

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{\in V} \mapsto \underbrace{\Phi(\mathbf{v})}_{\text{reelle Zahl}},$$

die die Bedingung

$$\Phi(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = \alpha \Phi(\mathbf{v}_1) + \beta \Phi(\mathbf{v}_2)$$

für alle  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  und für alle reellen  $\alpha, \beta$  erfüllt.

**Definition A.1.2** Seien  $\Phi_1, \Phi_2$  Linearformen über einunddemselben reellen Vektorraum  $V$  und sei  $\gamma$  eine beliebige reelle Zahl. Dann definiert man die Linearformen  $\gamma \Phi_1$  und  $\Phi_1 + \Phi_2$  durch:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma \Phi_1)(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\Phi_1(\mathbf{v})), \\ (\Phi_1 + \Phi_2)(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1(\mathbf{v}) + \Phi_2(\mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{v} \in V.$$

**Lemma A.1.3** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Dann ist die Menge  $V^*$  aller Linearformen über  $V$  mit der in Definition A.1.2 erklärten Multiplikation und Addition ebenfalls ein reeller Vektorraum, der sog. zu  $V$  **duale Vektorraum** (der **Kovektoren**).

**Beweis:** Offensichtlich. ■

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Siehe auch (Fischer und Kaul, 2003, Kap. II, § 8, Nr. 4)

### A.1.2 Die duale Basis

**Lemma A.1.4** Sei  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraumes  $V$ . Dann gibt es genau eine (Minimal-) Basis  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$  von  $V^*$ , die sog. zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  **duale Basis**, mit

$$\Phi^j(\mathbf{b}_k) = \delta_k^j \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n.$$

**Beweis:** Jeder Vektor  $\mathbf{v} \in V$  läßt sich eindeutig in der Form

$$\mathbf{v} = \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda^n \mathbf{b}_n$$

darstellen, weshalb die Definition

$$\Phi^j(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^j$$

erlaubt und notwendig ist. Man erkennt daraus auch unmittelbar, daß für beliebige  $\Phi \in V^*$  die Darstellung

$$\Phi = \mu_1 \Phi^1 + \dots + \mu_n \Phi^n$$

gilt, wobei die  $\mu_j$  eindeutig und durch

$$\mu_j = \Phi(\mathbf{b}_j)$$

gegeben sind. ■

**Folgerung A.1.5** Sei  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraumes  $V$ . Dann gilt für die zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  **reziproke Basis**  $\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$  in  $V$  und die zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  **duale Basis**  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$  in  $V^*$  der Zusammenhang

$$\Phi^j(\mathbf{v}) = (\mathbf{b}^j, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V \text{ und } j = 1, \dots, n.$$

**Beweis:** Folgt direkt aus Lemma A.1.4 und (2.30). ■

### A.1.3 Basiswechsel

#### Lemma A.1.6

- Gegeben: (i)  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,  
(ii) reelle Zahlen  $\lambda_j^k$ ,  
(iii) Basen  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  und  $\{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$  von  $V$  mit<sup>2</sup>  
 $\mathbf{b}'_k \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_k^l \mathbf{b}_l$  für  $k = 1, \dots, n$ .

Behauptung: Der Zusammenhang zwischen der zu  $\{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$  dualen Basis  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$  und der zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  dualen Basis  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$  ist durch

$$\Phi^j = \lambda_k^j \Phi'^k$$

und somit auch durch

$$\Phi'^j = \lambda_k^j \Phi^k$$

gegeben, wobei die  $\lambda_k^j$  eindeutig durch

$$\lambda_j^l \lambda_k^j = \delta_k^l \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n \quad (\text{K6})$$

charakterisiert sind.

**Beweisskizze:** Die Gleichung  $\Phi^j = \lambda_k^j \Phi'^k$  folgt aufgrund der Eindeutigkeit der Entwicklungskoeffizienten aus

$$\begin{aligned} \Phi^j(\mathbf{b}'_r) &= \lambda_r^l \Phi^j(\mathbf{b}_l) \\ &= \lambda_r^j \\ &= \lambda_l^j \Phi'^k(\mathbf{b}'_r). \end{aligned}$$

Entsprechend folgt (K6) durch Einsetzen von  $\Phi'^j = \lambda_k^j \Phi^k$  in  $\Phi^l = \lambda_j^l \Phi'^j$ . ■

## A.2 Allgemeine Tensoren

### A.2.1 Definitionen

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Wir benutzen die EINSTEINSche Summationskonvention: Wenn in einem Produkt einund dieselbe Variable einmal als oberer und einmal als unterer Index auftritt, dann ist darüber von 1 bis  $n$  zu summieren. Es gilt also z.B.

$$\lambda_k^l \mathbf{b}_l = \lambda_k^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_k^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_k^n \mathbf{b}_n.$$

**Definition A.2.1** Seien  $V_1, \dots, V_N$  reelle Vektorräume. Dann versteht man unter einer **Multilinearform** über  $V_1 \times \dots \times V_N$  eine Zuordnung

$$\underbrace{\mathbf{v}_1}_{\in V_1} \underbrace{\mathbf{v}_2}_{\in V_2}, \dots, \underbrace{\mathbf{v}_N}_{\in V_N} \longrightarrow \underbrace{T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)}_{\text{reelle Zahl}},$$

die die Bedingung

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \alpha \mathbf{v}_j + \beta \mathbf{v}'_j, \dots, \mathbf{v}_N) = \alpha T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) + \beta T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_j, \dots, \mathbf{v}_N)$$

für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$ , alle  $\mathbf{v}'_j \in V_j$ , alle  $\mathbf{v}_k \in V_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) und alle reellen  $\alpha, \beta$  erfüllt.

**Definition A.2.2** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Unter einem  **$p$ -stufig kontravarianten und  $q$ -stufig kovarianten Tensor** über  $V$  versteht man<sup>3</sup> dann eine Multilinearform über  $V_1 \times \dots \times V_{p+q}$ , sofern genau  $p$  der Vektorräume  $V_1, \dots, V_{p+q}$  mit  $V^*$ , die übrigen mit  $V$  übereinstimmen. Im Falle  $q = 0$  spricht man auch von einem **kontravarianten Tensor  $p$ -ter Stufe** und im Falle  $p = 0$  von einem **kovarianten Tensor  $q$ -ter Stufe**. Unter einem **Tensor 0. Stufe**, auch **Skalar** genannt, versteht man eine reelle Zahl. Tensoren 2. Stufe nennt man auch **Dyaden**.

**Definition A.2.3** Sei  $T$  ein Tensor der Stufe  $(p, q)$  über dem reellen Vektorraum  $V$ . Dann nennt man  $T$  **symmetrisch**, falls

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+q}) = T(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(p+q)})$$

für alle Permutationen  $\pi$  von  $1, \dots, p+q$  gilt, die die Bedingung

$$V_j = V \iff V_{\pi(j)} = V \quad \text{für } j = 1, \dots, p+q$$

erfüllen. Im Falle

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+q}) = \text{sign}(\pi) T(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(p+q)})$$

nennt man  $T$  **antisymmetrisch**.

**Beispiele:**

(i) Jedem Vektor  $\mathbf{v} \in V$  entspricht (1-1-deutig) ein kontravarianter Tensor

$$T_{\mathbf{v}}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathbf{v}) \quad \text{für } \Phi \in V^*$$

1. Stufe über  $V$ .

<sup>3</sup>Siehe z.B. (Naas und Schmid, 1967).

- (ii) jeder Kovektor  $\Phi \in V^*$  ist ein kovarianter Tensor 1. Stufe über  $V$ .
- (iii) Das Skalarprodukt eines euklidischen reellen Vektorraumes  $V$  ist ein symmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe über  $V$ .
- (iv) Das Spat-Produkt eines 3-dimensionalen euklidischen reellen Vektorraumes  $V$  ist ein antisymmetrischer kovarianter Tensor 3. Stufe über  $V$ .
- (v) Jeder linearen Abbildung  $\mathbf{L}$  eines reellen Vektorraumes  $V$  in sich entspricht (1-1-deutig) ein ‘gemischter’ Tensor

$$T_{\mathbf{L}}(\Phi, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathbf{L}(\mathbf{v})) \quad \text{für } \Phi \in V^*, \mathbf{v} \in V$$

der Stufe (1,1) über  $V$ .

**Definition A.2.4** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Seien weiterhin  $T_1, T_2$  Tensoren über  $V$  der Stufe  $(p_1, q_1)$  bzw.  $(p_2, q_2)$ . Dann definiert man als Produkt (**Tensorprodukt**, im Falle  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1$  auch **dyadisches Produkt** genannt) die Multilinearform<sup>4</sup>

$$(T_1 \otimes T_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p_1+q_1}, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{p_2+q_2}) \stackrel{\text{def}}{=} T_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p_1+q_1}) T_2(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{p_2+q_2})$$

über  $V_1 \times \dots \times V_{p_1+q_1} \times V'_1 \times \dots \times V'_{p_2+q_2}$ .

---

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Somit ist  $T_1 \otimes T_2$  also ein Tensor der Stufe  $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$  über  $V$ .

## A.2.2 Komponenten-Darstellung von Tensoren

### Lemma A.2.5

- Gegeben: (i) Ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,  
(ii) ein Tensor  $T$  über  $V$  der Stufe  $(p, q)$   
mit  $V_1, \dots, V_p = V^*$  und  $V_{p+1}, \dots, V_{p+q} = V$ ,  
(ii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ .

Behauptung: Für alle reellen Zahlen  $\mu^r_k, \mu_s^k$  ( $r = 1, \dots, p, s = 1, \dots, q; k = 1, \dots, n$ ) gilt

$$T\left(\mu^1_{k_1}\Phi^{k_1}, \dots, \mu^p_{k_p}\Phi^{k_p}, \mu_1^{j_1}\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mu_q^{j_q}\mathbf{v}_{j_q}\right) = \mu^1_{k_1} \cdots \mu^p_{k_p} \mu_1^{j_1} \cdots \mu_q^{j_q} T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q},$$

wobei die reellen Zahlen  $T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q}$ , die sog. **Komponenten** von  $T$  bzgl. der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eindeutig und durch

$$T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q} \stackrel{\text{def}}{=} T\left(\Phi^{k_1}, \dots, \Phi^{k_p}, \mathbf{b}_{j_1}, \dots, \mathbf{b}_{j_q}\right)$$

gegeben sind.<sup>5</sup>

**Beweis:** Offensichtlich. ■

### Beispiele:

- (i) Für  $\mathbf{v} \in V$  gilt<sup>6</sup>

$$(T_{\mathbf{v}})^k = \Phi^k(\mathbf{v}) \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

- (ii) Für  $\Phi \in V^*$  gilt

$$(T_{\Phi})_j = \Phi(\mathbf{b}_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

- (iii) Falls die lineare Abbildung  $\mathbf{L}$  von  $V$  in  $V$  durch

$$\mathbf{L}(\mathbf{b}_j) = \lambda_j^k \mathbf{b}_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

charakterisiert ist, gilt

$$(T_{\mathbf{L}})^k_j = \lambda_j^k \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Wie in A.1.2 bezeichnet  $\{\Phi^{k_1}, \dots, \Phi^{k_p}\}$  die zu  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  duale Basis.

<sup>6</sup>Vgl. Beispiel (i) in A.2.1.



Für einen Tensor entsprechend Lemma A.2.5 gilt offensichtlich:

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p} T_{\mathbf{b}_{k_1}} \otimes \dots \otimes T_{\mathbf{b}_{k_p}} \otimes T_{\Phi^{j_1}} \otimes \dots \otimes T_{\Phi^{j_q}}.$$

Die Gesamtheit dieser Vektoren (zu festen  $n, p, q$ ) bildet einen reellen Vektorraum der Dimension  $n^{p+q}$ .

### Lemma A.2.6

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,  
(ii) ein Tensor  $T$  über  $V$  der Stufe  $(p, q)$  mit  
 $V_1 = \dots = V_p = V^*$  und  $V_{p+1} = \dots = V_{p+q} = V$ ,  
(iii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ .  
(iv) reelle Zahlen  $\lambda_j^k$  mit  $\det(\lambda_j^k) \neq 0$ .

Behauptung: Der Zusammenhang zwischen den Komponenten  $T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p}$  von  $T$  bzgl. der neuen Basis der

$$\mathbf{b}'_j \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j^k \mathbf{b}_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und den Komponenten  $T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p}$  von  $T$  bzgl. der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  ist gegeben durch

$$T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p} = \lambda_{l_1}^{k_1} \dots \lambda_{l_p}^{k_p} \lambda_{j_1}^{m_1} \dots \lambda_{j_q}^{m_q} T_{m_1 \dots m_q}^{l_1 \dots l_p},$$

wobei die  $\lambda_j^k$  wieder durch (K6) eindeutig charakterisiert sind.

**Beweis:** Direkte Folge von Lemma A.1.6 und Lemma A.2.5. ■

**Anmerkung:** Entsprechendes gilt für andere Anordnungen von  $V$  und  $V^*$  in der Folge  $V_1, \dots, V_{p+q}$ . Z.B. definiert man für den Tensor  $T$  der Stufe  $(2,3)$  im Falle  $V_1 = V_4 = V^*$ ,  $V_2 = V_3 = V_5 = V$ :

$$T_{j_1 j_2 j_3}^{k_1 k_2} \stackrel{\text{def}}{=} T(\Phi^{k_1}, \mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \Phi^{k_2}, \mathbf{b}_{j_3})$$

für  $k_1, k_2, j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt entsprechend:

$$T_{j_1 j_2 j_3}^{k_1 k_2} = \lambda_{l_1}^{k_1} \lambda_{j_1}^{m_1} \lambda_{j_2}^{m_2} \lambda_{l_2}^{k_2} \lambda_{j_3}^{m_3} T_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2}.$$

**Folgerung A.2.7** Im Falle  $p, q \geq 1$  gibt es unter den Voraussetzungen von Lemma A.2.6 einen Tensor  $\hat{T}$  der Stufe  $(p-1, q-1)$ , dessen Komponenten  $\hat{T}_{j_1 \dots j_{q-1}}^{k_1 \dots k_{p-1}}$  bzgl.  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  aus denen von  $T$  durch sog. **Kontraktion** der Indizes  $k_p$  und  $j_q$  hervorgehen:

$$\hat{T}_{j_1 \dots j_{q-1}}^{k_1 \dots k_{p-1}} = T_{j_1 \dots j_{q-1} k_p}^{k_1 \dots k_p}.$$

**Beweis:** Direkte Folge von Lemma A.2.6 und (K6). ■

### A.2.3 Natürliche Zuordnungen

Nach Beispiel (i) von A.2.1 lassen sich die Vektoren  $\mathbf{v} \in V$  in natürlicher Weise eindeutig den kovarianten Tensoren 1. Stufe über  $V$  zuordnen; weshalb vielfach beide Begriffe synonym benutzt werden. Entsprechendes gilt gemäß Beispiel (v) von A.2.1 für den Zusammenhang zwischen den linearen Abbildungen von  $V$  in  $V$  und den Tensoren der Stufe (1,1) über  $V$ .

Wenn  $V$  euklidisch ist, dann liefert das Skalarprodukt nach Folgerung A.1.5 auf natürliche Weise eine eindeutige (strukturerehaltende) Zuordnung zwischen den Elementen von  $V^*$  und  $V$ . Daraus folgt eine natürliche Zuordnung zwischen Tensoren über  $V$  zu gleichem  $p + q$ .

#### Lemma A.2.8

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler, euklidischer (reeller) Vektorr.  $V$ ,  
(ii) ein Tensor  $T$  über  $V$  der Stufe  $(p, q)$ ,  
wobei  $V_1 = \dots = V_p = V^*$ ,  
(iii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ .

1. Behauptung: Die Zuordnung<sup>7</sup>

$$\underbrace{\Psi^1, \dots, \Psi^{p+1}}_{\in V^*}, \underbrace{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q}_{\in V} \longmapsto T(\Psi^1, \dots, \Psi^p, \Psi^{p+1}(\mathbf{b}^j) \mathbf{b}_j, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$$

ist von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  unabhängig und stellt (im Falle  $q > 0$ ) einen Tensor der Stufe  $(p + 1, q - 1)$  über  $V$  dar, dessen Komponenten bzgl.  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  konventionsgemäß mit

$$T^{k_1 \dots k_{p+1}}_{j_2 \dots j_q}$$

bezeichnet werden, um den engen Zusammenhang mit  $T$  zu betonen.

2. Behauptung: Die Zuordnung<sup>8</sup>

$$\underbrace{\Psi^1, \dots, \Psi^{p-1}}_{\in V^*}, \underbrace{\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q}_{\in V} \longmapsto T(\Psi^1, \dots, \Psi^{p-1}, (\mathbf{b}_j, \mathbf{v}_{q+1}) \Phi^j, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)$$

ist von der speziellen Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  unabhängig und stellt (im Falle  $p > 0$ ) einen Tensor der Stufe  $(p - 1, q + 1)$  über  $V$  dar, dessen Komponenten bzgl.  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  konventionsgemäß mit

$$T^{k_1 \dots k_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q+1}}$$

bezeichnet werden.<sup>9</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>7</sup>Hier bezeichnet  $\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$  wieder die zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  reziproke Basis.

<sup>8</sup>Hier bezeichnet  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^m\}$  wieder die zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  duale Basis.

<sup>9</sup>Die Bezeichnungsweise ist konsistent: Herunterziehen eines zuvor heraufgezogen Indexes — bzw. umgekehrt — führt auf die ursprünglichen Komponenten zurück.

**Beweis:** Der Tensorcharakter der angegebenen Zuordnungen ist evident. Es ist also nur die Basisunabhängigkeit der Definitionen, d.h. von  $\Psi^{p+1}(\mathbf{b}^j) \mathbf{b}_j$  und  $(\mathbf{b}_j, \mathbf{v}_{q+1}) \Phi^j$  zu zeigen. Das folgt aber aus

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_j = \lambda_j^k \mathbf{b}_k &\iff \mathbf{b}'^j = \lambda_k^j \mathbf{b}^k \\ &\iff \Phi'^j = \lambda_k^j \Phi^k, \end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang zwischen den  $\lambda_j^k$  und den  $\lambda_k^j$  durch (K6) bzw. durch

$$\lambda_j^k \lambda_l^j = \delta_l^k$$

gegeben ist.<sup>10</sup> ■

**Anmerkung:** Durch Mehrfachanwendung der in Lemma A.2.8 angegebenen Vorschrift sind natürlich auch die Tensoren mit den Komponenten

$$T^{k_1 \dots k_{p'}}_{k_{p'+1} \dots k_p j_1 \dots j_q}$$

(für beliebiges  $p \in \{0, \dots, p-2\}$ ) und

$$T^{k_1 \dots k_p j_1 \dots j_{q'}}_{j_{q'+1} \dots j_q}$$

(für beliebiges  $q \in \{0, \dots, q-2\}$ ) erklärt.

### Folgerung A.2.9

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler, euklidischer (reeller) Vektorraum  $V$ ,  
(ii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ .

Behauptung: Für den sog. **metrischen Tensor**

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}_{\text{Skalarprod.}}$$

gilt

$$g_{kj} = (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j), \quad g^k_j = (\mathbf{b}^k, \mathbf{b}^l) g_{lj}, \quad g^{kj} = (\mathbf{b}^k, \mathbf{b}^j).$$

**Beweis:** Die erste Beziehung folgt direkt aus der Definition der Komponenten eines Tensors. Die zweite Beziehung folgt daraus mit

$$\begin{aligned} g^k_j &\stackrel{\text{per Def.}}{=} g(\Phi^k(\mathbf{b}^l) \mathbf{b}_l, \mathbf{b}_j) \\ &= \Phi^k(\mathbf{b}^l) g_{lj} \\ &\stackrel{\text{Folg. (A.1.5)}}{=} (\mathbf{b}^k, \mathbf{b}^l) g_{lj} \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Vgl. Lemma A.1.6 und Folgerung A.1.5.

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}^k, \mathbf{b}^l) (\mathbf{b}_l, \mathbf{b}_j) &= (\mathbf{b}^k, (\mathbf{b}_l, \mathbf{b}_j) \mathbf{b}^l) \\ &= (\mathbf{b}^k, \mathbf{b}_j) \\ &\stackrel{\text{Folg. (2.1.6)}}{=} \delta_j^k. \end{aligned}$$

Die letzte Beziehung folgt aus

$$g^{kj} = g(\Phi^k(\mathbf{b}^l) \mathbf{b}_l, \Phi^j(\mathbf{b}^m) \mathbf{b}_m)$$

analog zur ersten mit Folgerung A.1.5. ■

**Folgerung A.2.10** *Unter den Voraussetzungen von Lemma A.2.8 gilt für die dort angesprochenen Tensorkomponenten (im Falle  $q > 0$ )*

$$T_{j_2 \dots j_q}^{k_1 \dots k_{p+1}} = g^{k_{p+1} j_1} T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p}$$

und (im Falle  $p > 0$ )

$$T_{j_1 \dots j_{q+1}}^{k_1 \dots k_{p-1}} = g_{j_1 k_p} T_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p}$$

(die  $g_{jk}$  und  $g^{kj}$  sind wie in Folgerung A.2.9 definiert).

**Beweis:** Analog Folgerung A.2.9. ■

**Anmerkung:** Entsprechendes gilt für andere Anordnungen von  $V^*$  und  $V$  in der Folge  $V_1, \dots, V_{p+q}$ . Z.B. ist einem Tensor der Stufe (2,3) über  $V$  mit den Komponenten  $T_{j_1 j_2}^{k_1 k_2 k_3}$  genau ein Tensor der Stufe (3,2) mit den Komponenten

$$T_{j_1}^{k_1 k_2 k_3} = g_{j_1 l} g^{k_1 m} g^{k_3 r} T_{m j_2}^{l k_2 r}$$

bzgl. der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  zugeordnet.

## A.2.4 Physikalische Tensoren

Im Zusammenhang mit physikalischen Betrachtungen ist es oft zweckmäßig, auch das Produkt eines Tensors über  $V$  mit einer physikalischen Größeneinheit als Tensor (gleicher Stufe) über  $V$  zu bezeichnen. Wir beschränken uns hier auf 3-dimensionales  $V$ . Als Komponenten des neuen Tensors bzgl. der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  von  $V$  seien dann die mit der Größeneinheit multiplizierten Komponenten des ursprünglichen Tensors bezeichnet; z.B.

$$\hat{T}_{jkl} = \mathcal{V}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot \text{Volumeneinheit}$$

im Falle

$$\hat{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \cdot \text{Volumeneinheit} \quad \text{für } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in V.$$

Unter Verwendung der in 1.1.5 besprochenen natürlichen Zuordnungen zwischen verschiedenen 3-dimensionalen physikalischen Vektorräumen lassen sich dann Tensoren auch in natürlicher Weise mit multilinearen Abbildungen über Sequenzen verschiedener 3-dimensionaler physikalischer Vektorräume identifizieren; z.B.:

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{F}, \mathbf{x}) = T\left(\mathbf{v} \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Geschw.-Einh.}}, \mathbf{F} \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Kraftein.}}, \mathbf{x}\right) \cdot \frac{\text{Geschw.-Einh.}}{\text{Längeneinh.}} \cdot \frac{\text{Kraftein.}}{\text{Längeneinh.}}.$$

Die Regeln für das Herauf- und Herunterziehen von Tensorindizes entsprechend A.2.3 übertragen sich automatisch auf den so erweiterten Tensorbegriff.

## A.3 Antisymmetrische Tensoren

### A.3.1 Volumenformen

**Definition A.3.1** *Unter einer **Volumenform** über einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  versteht man einen antisymmetrischen kovarianten Tensor  $n$ -ter Stufe über  $V$ .*

#### Lemma A.3.2

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,  
 (ii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ ,  
 (iii) eine reelle Zahl  $\mathcal{V}_0$ .

Behauptung: *Es existiert genau eine Volumenform  $\mathcal{V}$  über  $V$  mit*

$$\mathcal{V}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \mathcal{V}_0,$$

*nämlich diejenige mit den Komponenten*

$$\mathcal{V}(\mathbf{b}_{k_1}, \dots, \mathbf{b}_{k_n}) = \epsilon_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n} \mathcal{V}_0$$

*bzgl.  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , wobei*

$$\epsilon_{k_1 \dots k_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } (k_1, \dots, k_n) \text{ gerade Permutation von } (j_1, \dots, j_n), \\ -1 & \text{falls } (k_1, \dots, k_n) \text{ ungerade Permutation von } (j_1, \dots, j_n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Für beliebige*

$$\mathbf{v}_j = \lambda_j^k \mathbf{b}_k \in V$$

*gilt also*

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda_j^k) \mathcal{V}_0,$$

*mit*

$$\det(\lambda_j^k) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} \epsilon_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n}.$$

**Beweis:** Offensichtlich. ■

### Lemma A.3.3

- Gegeben: (i) *ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,*  
(ii) *eine nichttriviale Volumenform  $\mathcal{V}$  über  $V$ ,*  
(iii) *Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ .*

Behauptung:  $\mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0 \iff \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  *linear abhängig.*

**Beweis:** Seien die  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear unabhängig. Dann ist  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  nach Lemma 1.2.6 eine Basis. Wenn  $\mathcal{V}$  aber für eine Basis verschwindet, muß  $\mathcal{V}$  nach Lemma A.3.2 für beliebige Argumente verschwinden. Nach Voraussetzungen (ii) müssen die  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  also linear abhängig sein, wenn  $\mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$  gilt. Seien nun die  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear abhängig angenommen. Dann läßt sich einer der Vektoren, den wir o.B.d.A. mit  $\mathbf{v}_1$  identifizieren können, als Linearkombination der übrigen schreiben:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda^n \mathbf{v}_n \quad \text{für geeignete } \lambda^2, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$$

(für  $n=1$  ist das Lemma trivial). Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &= \sum_{j=2}^n \lambda^j \mathcal{V}(\mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= \sum_{j=2}^n \lambda^j (-1)^j \mathcal{V}(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

und somit  $\mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$  aufgrund der Antisymmetrie von  $\mathcal{V}$ . ■

### Folgerung A.3.4

- Gegeben: (i) *ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,*  
(ii) *nichttriviale Volumenformen  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  über  $V$ .*

Behauptung: *Entweder gilt für jede Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$*

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \mathcal{V}_2(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) > 0,$$

oder es gilt für jede Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)\mathcal{V}_2(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) < 0.$$

**Beweis:** Folgt direkt aus Lemmata Lemma 2.7 und 2.8. ■

### A.3.2 Orientierung endlichdimensionaler Vektorräume

**Definition A.3.5** Unter einer **Orientierung** eines  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraumes versteht man die Einteilung aller Minimalbasen in **Rechts-** und **Linkssysteme** mithilfe einer nichttrivialen Volumenform  $\mathcal{V}$ :

$$\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \begin{cases} \text{Rechtssystem} & \text{falls } \mathcal{V}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) > 0, \\ \text{Linkssystem} & \text{falls } \mathcal{V}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) < 0 \end{cases}$$

(vgl. Folgerung von 2.2.1.)

**Folgerung A.3.6** Die Orientierung eines  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraumes ist bereits festgelegt, sobald für mindestens eine Minimalbasis gesagt ist, ob sie ein Rechts- oder ein Linkssystem ist.

**Beweis:** Folgt direkt aus Definition A.3.5 und Folgerung A.3.4. ■

**Folgerung A.3.7** Für reelle Zahlen  $\lambda_j^k, \mu_k^j$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ) gilt stets

$$\det \left( \lambda_j^l \mu_l^k \right) = \det \left( \lambda_j^k \right) \det \left( \mu_j^k \right)$$

(auf der rechten Seite ohne Summation über gleiche Indizes).

**Beweis:** Man wähle eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eines  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraumes, eine Volumenform  $\mathcal{V}$  darüber mit  $\mathcal{V}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = 1$  (nach Lemma A.3.2 stets möglich) und definiere:

$$\mathbf{c}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mu_j^k \mathbf{b}_k : \quad \mathbf{d}_j \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j^k \mathbf{c}_k = \left( \lambda_j^l \mu_l^k \right) \mathbf{b}_k.$$

Falls die  $\mathbf{c}_j$  linear abhängig sind, dann sind natürlich auch die  $\mathbf{d}_j$  linear abhängig und die Behauptung folgt direkt aus Lemmata A.3.2 und 2.1.7.

Andernfalls, wenn die  $\mathbf{c}_j$  linear unabhängig sind, also nach Lemma 1.2.6 eine Basis bilden, folgt gemäß Lemma A.3.2:

$$\begin{aligned} \det \left( \lambda_j^l \mu_l^k \right) &= \mathcal{V}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \\ &= \det \left( \lambda_j^k \right) \mathcal{V}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) \\ &= \det \left( \lambda_j^k \right) \det \left( \mu_j^k \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Lemma A.3.8

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler, reeller euklidischer Vektorraum  $V$ ,  
(ii) eine Volumenform  $\mathcal{V}$  über  $V$ ,  
(iii) zwei Orthonormalbasen  $\{\mathbf{e}_j\}$ ,  $\{\mathbf{e}'_j\}$  von  $V$ .

Behauptung:  $|\mathcal{V}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)| = |\mathcal{V}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)|$ .

**Beweis:** Zweifache Anwendung von Lemma 2.1.5 (für  $V' = V$ ) liefert

$$\mathbf{e}'_j = \lambda_j^l \mathbf{e}_l \tag{A.1}$$

$$= \lambda_j^l \mu_l^k \mathbf{e}'_k \tag{A.2}$$

mit

$$\lambda_j^k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}_k) = \mu_k^{kj}. \tag{A.3}$$

Aus (A.2) folgt mit Lemma 1.3

$$\lambda_j^l \mu_l^k = \delta_j^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} 1 = \det \left( \lambda_j^l \mu_l^k \right) &\stackrel{\text{Folg. (2.1.4)}}{=} \det \left( \lambda_j^k \right) \det \left( \mu_j^k \right) \\ &\stackrel{\text{(A.3)}}{=} \left| \det \left( \lambda_j^k \right) \right|^2, \end{aligned}$$

insbesondere also

$$\left| \det \left( \lambda_j^k \right) \right| = 1.$$

Mit (A.1) und Lemma A.3.2 folgt daraus die Behauptung.  $\blacksquare$



**Folgerung A.3.9**

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler, reeller euklidischer Vektorraum  $V$ ,  
(ii) eine Orientierung von  $V$ .

Behauptung: Es gibt genau eine Volumenform  $\mathcal{V}$  über  $V$ , die wir die **natürliche** nennen wollen, die die Bedingungen

$$\mathcal{V}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ Rechtssystem,} \\ -1 & \text{falls } \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ Linkssystem} \end{cases}$$

für jede Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  von  $V$  erfüllt.

**Beweis:** Folgt direkt aus Lemma A.3.2, Folgerung A.3.4 und Lemma A.3.8. ■

**Anmerkung:** Üblicherweise benutzt man die Schreibweise

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

für die natürliche Volumenform  $\mathcal{V}$ .

**A.3.3 Allgemeine antisymmetrische Tensoren**

Im Hinblick auf Abschnitt A.2.3 können wir uns hier auf kovariante Tensoren beschränken. Einen antisymmetrischen Tensor der Stufe  $(0, q)$  bezeichnet man auch als  **$q$ -Form**.

**Definition A.3.10** Seien  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum,  $A$  eine  $a$ -Form über  $V$  und  $B$  eine  $b$ -Form über  $V$ . Dann definiert man das **äußere Produkt**  $A \wedge B$  von  $A$  und  $B$  gemäß<sup>11</sup>

$$(A \wedge B)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{a+b}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a!} \frac{1}{b!} \epsilon_{1 \dots a+b}^{j_1 \dots j_{a+b}} A(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_a}) B(\mathbf{v}_{j_{a+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{a+b}})$$

für  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{a+b} \in V$ .

Für beliebige  $\Psi^1, \dots, \Psi^q \in V^*$  gilt entsprechend Definition A.3.10 also:<sup>12</sup>

$$\Psi^1 \wedge \dots \wedge \Psi^q = \epsilon_{j_1 \dots j_q}^{1 \dots q} \Psi^{j_1} \otimes \dots \otimes \Psi^{j_q}.$$

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich:

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Somit gilt hier:  $A \wedge B = (-1)^{ab} B \wedge A$ .

<sup>12</sup>Da die Produkte  $\otimes$  und  $\wedge$  assoziativ sind, kann hier auf die Verwendung von Klammern verzichtet werden.

**Lemma A.3.11**

- Gegeben: (i) ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$ ,  
(ii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ ,  
(iii) eine natürliche Zahl  $q$ ,  
(iii) eine  $q$ -Form  $A$  über  $V$ .

Behauptung: Mit der zu  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  dualen Basis  $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$  gilt:

$$A = \frac{1}{q!} A(\mathbf{b}_{j_1}, \dots, \mathbf{b}_{j_q}) \Phi^{j_1} \wedge \dots \wedge \Phi^{j_q}.$$

Die Gesamtheit aller  $q$ -Formen über einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  bilden also einen reellen Vektorraum der Dimension  $\binom{n}{q}$ . Für  $q > n$  stellt die Abbildung auf 0 die einzige  $q$ -Form über  $V$  dar.

**Lemma A.3.12**

- Gegeben: (i) ein euklidischer reeller Vektorraum  $V$ ,  
(ii) eine Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  von  $V$ ,  
(iii) eine natürliche Volumenform  $\mathcal{V}$  über  $V$ ,  
(iv) eine  $q$ -Form  $A$  über  $V$ ,  $q \leq n$ .

Behauptung: Die durch

$$(*A)(\mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q!} A(\mathbf{b}^{j_1}, \dots, \mathbf{b}^{j_q}) \mathcal{V}(\mathbf{b}_{j_1}, \dots, \mathbf{b}_{j_q}, \mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

für  $\mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$

gegebene  $n - q$ -Form  $*A$  ist von der Wahl der Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  unabhängig.

**Beweis:**  $*A$  ist das  $\frac{1}{q!}$  fache der  $q$ -fachen Kontraktion des Tensorprodukts von  $A$  und  $\mathcal{V}$ . Die Behauptung folgt also aus Folgerung A.2.7; bzw. direkt aus (K6). ■

Für (physikalisch) dimensionslose, rechtshändige Orthonormalbasen  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  gilt entsprechend Lemma A.3.12 für den sog. HODGE-**Sternoperator**  $*$  offensichtlich

$$(*A)(\mathbf{e}_{q+1}, \dots, \mathbf{e}_n) = A(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q).$$

Daraus erkennt man, daß der HODGE-Sternoperator bis auf ein eventuelles Vorzeichen idempotent ist, d.h.

$$*(*A) = (-1)^{q(n-q)} A,$$

und daß für  $n = 3$  in Analogie zum Vektorprodukt

$$*(\Phi^1 \wedge \Phi^2) = \Phi^3$$

gilt.



# Anhang B

## Beweise zur FOURIER-Theorie

### B.1 Integral-Sinus und Folgen vom Typ $\delta$

Der sog. *Integral-Sinus*

$$\operatorname{Si}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\lambda \frac{\sin(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1) \cdot (2\nu+1)!}$$

gehört zu den sog. ‘nicht elementaren Funktionen’, d.h. er läßt sich nicht durch eine Formel definieren, in der nur endlich viele algebraische oder trigonometrische Operationen mit der unabhängigen Variablen, der Funktion selbst und Konstanten ausgeführt werden. Der Grenzwert für  $\lambda \rightarrow +\infty$  läßt sich dagegen exakt als Vielfaches von  $\pi$  angeben:

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{\sin(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' = \frac{\pi}{2}.} \quad (\text{B.1})$$

**Beweisskizze zu (B.1):** Durch Unterteilung des Integrationsbereichs an den Nullstellen von  $\sin(\lambda')$  erkennt man leicht die Stetigkeit<sup>1</sup> von

$$h(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\epsilon\lambda'} \frac{\sin(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' \quad \text{für } \epsilon \geq 0.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Man beachte, daß beschränkte, monotone Folgen stets konvergieren und daß auch  $(1 - e^{-\lambda})/\lambda$  für  $\lambda > 0$  monoton fallend ist:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = -\frac{1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}}{\lambda^2} < 0 \quad \forall \lambda > 0; \quad \text{denn } 1 + \lambda < e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \dots$$

Für  $\epsilon > 0$  gilt darüber hinaus

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} h(\epsilon) &= - \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\lambda} \sin \lambda \, d\lambda \\ &= \frac{i}{2} \int_0^{\infty} (e^{-(\epsilon-i)\lambda} - e^{-(\epsilon+i)\lambda}) \, d\lambda \\ &= \frac{-1}{1 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

und somit

$$h(\epsilon) = \frac{\pi}{2} - \arctan \epsilon \quad \forall \epsilon > 0,$$

wegen  $\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} h(\epsilon) = 0$ . Für  $\epsilon \rightarrow +0$  ergibt sich damit die Behauptung.

■

**Definition B.1.1** Eine Folge stückweise stetiger, beschränkter Funktionen  $\delta_0(\lambda)$ ,  $\delta_1(\lambda)$ ,  $\delta_2(\lambda)$ , ... über  $\mathbb{R}$  bezeichnen wir als **Folge vom Typ  $\delta$** , wenn für jede stückweise stetige, beschränkte Funktion  $f(\lambda)$  über  $\mathbb{R}$  und für alle reellen  $a, b$  mit  $a < 0 < b$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f(\lambda) \delta_\nu(\lambda) \, d\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{f(+\epsilon) + f(-\epsilon)}{2}$$

gilt.

**Lemma B.1.2** Sei  $g(\lambda)$  eine komplexwertige, stückweise stetige, beschränkte Funktion über  $\mathbb{R}$ , die folgenden beiden Bedingungen genügt:

(i)

$$g(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

(ii)

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^0 g(\lambda') \, d\lambda' = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\lambda} g(\lambda') \, d\lambda' = \frac{1}{2}.$$

Dann ist

$$\delta_n(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} n g(n\lambda) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in \mathbb{R}$$

eine Folge vom Typ  $\delta$ .

**Beweisskizze:** Für beliebiges  $\epsilon > 0$  und natürliches  $n$  existieren nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung geeignete

$$\lambda_{\epsilon,n}^- \in (-\epsilon, 0), \quad \lambda_{\epsilon,n}^+ \in (0, +\epsilon)$$

mit

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(\lambda) n g(n\lambda) d\lambda = f(\lambda_{\epsilon,n}^-) \int_{-\epsilon}^0 n g(n\lambda) d\lambda + f(\lambda_{\epsilon,n}^+) \int_0^{+\epsilon} n g(n\lambda) d\lambda.$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) n g(n\lambda) d\lambda - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(\lambda) n g(n\lambda) d\lambda \right| \\ & \leq \sup_{\lambda' \in \mathbb{R}} |f(\lambda')| \left( \left( \frac{1}{2} - \int_{-\epsilon}^0 n g(n\lambda) d\lambda \right) + \left( \frac{1}{2} - \int_0^{+\epsilon} n g(n\lambda) d\lambda \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^0 n g(n\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\epsilon} n g(n\lambda) d\lambda = \frac{1}{2}$$

folgt daraus die Behauptung. ■

Nach (B.1) genügt

$$g(\lambda) = \frac{\sin \lambda}{\pi \lambda}$$

allen Anforderungen von Lemma B.1.2 mit Ausnahme der Positivitätsforderung (i). Daher<sup>2</sup> ist der Beweis von Lemma B.1.2 nicht übertragbar, aber

$$\delta_n(\lambda) = \frac{\sin(n\lambda)}{\pi \lambda}$$

ist dennoch eine Folge vom Typ  $\delta$ , wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

## B.2 DIRICHLETSCHES FORMEL

**Definition B.2.1** Man sagt von einer (komplexwertigen) Funktion  $f(t)$ , sie sei von **endlicher Variation** über  $[a, b]$ , falls eine Konstante  $C$  existiert mit:

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b \implies \sum_{\nu=1}^n |f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})| < C$$

(für alle natürlichen  $n$ ). Das dabei kleinstmögliche  $C$  bezeichnet man als die **Totalvariation**  $T_f[a, b]$  von  $f$  über  $[a, b]$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Leider divergiert auch  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \lambda}{\pi \lambda} \right| d\lambda$ .

**Lemma B.2.2** Sei  $f(t)$  eine stetige komplexwertige Funktion endlicher Variation<sup>3</sup> über  $[0, t']$ . Dann gilt für  $a, b, c \in [0, t']$  stets

$$a \leq b \leq c \implies T_f[a, b] + T_f[b, c] = T_f[a, c] \quad (\text{B.2})$$

und  $T_f[0, t]$  ist eine stetige Funktion von  $t$  über  $[0, t']$ .

**Beweisskizze:** Die Additivitätseigenschaft (B.2) ist offensichtlich und bedingt, daß  $T_f[a, b]$  für jeweils festes  $a \in [0, t']$  eine monoton wachsende Funktion von  $b \in [a, t']$  ist. Daher existiert ihr Grenzwert für  $b \rightarrow a$ ,  $b > a$ . Da aufgrund der Stetigkeit von  $f$  zu jedem  $b_\nu \in (a, t')$  ein  $b_{\nu+1} \in (a, b_\nu)$  existiert mit  $T_f[b_{\nu+1}, b_\nu] > \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} T_f[a, a + \epsilon]$ , muß wegen (B.2)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} T_f[a, a + \epsilon] = 0$$

gelten. Analog zeigt man

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} T_f[b - \epsilon, b] = 0$$

für  $b \in (0, t']$ . ■

**Satz B.2.3 (DIRICHLETSche Formel)** Zu gegebenen  $t', \omega > 0$  (entspr. phys. Dim.) existiert stets eine Nullfolge  $\{\epsilon_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \subset \mathbb{R}_+$ , mit folgender Eigenschaft:

Für jede komplexwertige, über  $[0, t']$  stückweise stetige Funktion  $f(t)$  endlicher Variation und für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  gilt:<sup>4</sup>

$$\left| \frac{1}{2} f(+0) - \omega \int_0^{t'} f(t) \frac{\sin(\lambda \omega t)}{\pi \omega t} dt \right| \leq T_f[0, \epsilon_\lambda t'] + (|f(+0)| + T_f[0, t']) \epsilon_\lambda.$$

**Beweis:** Wir bezeichnen mit  $U$  die Menge aller Unstetigkeitsstellen von  $f$  innerhalb  $(0, t')$  und mit  $n_\lambda$  die Anzahl der Elemente von

$$W_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} U \cup \left( [0, t'] \cap \left\{ \frac{\nu \pi}{\lambda |\omega|} : \nu \in \mathbb{Z}_+ \right\} \right).$$

Dann läßt sich  $W_\lambda$  in der Form

$$W_\lambda = \{t_{\lambda,1}, \dots, t_{\lambda,n_\lambda}\}, \quad t_{\lambda,1} < t_{\lambda,2} < \dots < t_{\lambda,n_\lambda},$$

<sup>3</sup>Beispiel einer stetigen Funktion unendlicher Variation:  $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t \sin \frac{1}{\omega t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$

<sup>4</sup>Wir benutzen die Schreibweise  $f(+0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ .



schreiben und es gilt

$$\int_0^{t'} f(t) \frac{\sin(\lambda\omega t)}{\pi\omega t} dt = \sum_{\nu=1}^{n_\lambda-1} \int_{t_{\lambda,\nu}}^{t_{\lambda,\nu+1}} f(t) \frac{\sin(\lambda\omega t)}{\pi\omega t} dt.$$

Weil  $f$  innerhalb  $(t_{\lambda,\nu}, t_{\lambda,\nu+1})$  jeweils stetig ist und  $\frac{\sin(\lambda\omega t)}{\pi\omega t}$  innerhalb  $(t_{\lambda,\nu}, t_{\lambda,\nu+1})$  jeweils das Vorzeichen nicht ändert, existieren also gemäß Mittelwertsatz der Integralrechnung Zeitpunkte

$$t'_{\lambda,\nu} \in (t_{\lambda,\nu}, t_{\lambda,\nu+1})$$

mit

$$\omega \int_0^{t'} f(t) \frac{\sin(\lambda\omega t)}{\pi\omega t} dt = \sum_{\nu=1}^{n_\lambda-1} f(t'_{\lambda,\nu}) a_\nu,$$

wobei

$$a_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \omega \int_{t_{\lambda,\nu}}^{t_{\lambda,\nu+1}} \frac{\sin(\lambda\omega t)}{\pi\omega t} dt = \int_{\lambda\omega t_{\lambda,\nu}}^{\lambda\omega t_{\lambda,\nu+1}} \frac{\sin(\tau)}{\pi\tau} d\tau \quad \text{für } \nu \in \mathbb{N}.$$

Somit genügt also der Nachweis einer von  $f$  unabhängigen Nullfolge  $\{\epsilon_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \subset \mathbb{R}_+$  mit

$$|D_\lambda| \leq T_f[0, \epsilon_\lambda t'] + \frac{1}{2} |f(+0)| \epsilon_\lambda \quad (\text{B.3})$$

für

$$D_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n_{\sqrt{\lambda}}} f(t'_{\lambda,\nu}) a_\nu - \frac{1}{2} f(+0)$$

und

$$|N_\lambda| \leq \frac{1}{2} (|f(+0)| + T_f[0, t']) \epsilon_\lambda \quad (\text{B.4})$$

für

$$N_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1+n_{\sqrt{\lambda}}}^{n_\lambda} f(t'_{\lambda,\nu}) a_\nu.$$

Dazu verwenden wir das Verfahren der **ABELSchen partiellen Summation**:<sup>5</sup>

$$D_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n_{\sqrt{\lambda}}} \left( (f(t'_{\lambda,\nu}) - f(t'_{\lambda,\nu+1})) \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu + f(t'_{\lambda,\nu+1}) \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu - f(t'_{\lambda,\nu}) \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_\mu \right) - \frac{1}{2} f(+0)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Siehe z.B. (Knopp, 1947). Wir benutzen die übliche Konvention

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} c_\nu \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{für } n_1 > n_2$$

und betrachten nur hinreichend große  $\lambda$ , für die  $n_{\sqrt{\lambda}} < n_\lambda$  gilt.

$$= \sum_{\nu=1}^{n_{\sqrt{\lambda}}} (f(t'_{\lambda,\nu}) - f(t'_{\lambda,\nu+1})) \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu} + \left( f(t'_{\lambda,1+n_{\sqrt{\lambda}}}) \sum_{\mu=1}^{n_{\sqrt{\lambda}}} a_{\mu} - \frac{1}{2} f(+0) \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} N_{\lambda} &= \sum_{\nu=1+n_{\sqrt{\lambda}}}^{n_{\lambda}} \left( (f(t'_{\lambda,\nu}) - f(t'_{\lambda,\nu-1})) \sum_{\mu=\nu}^{n_{\lambda}} a_{\mu} - f(t'_{\lambda,\nu}) \sum_{\mu=\nu+1}^{n_{\lambda}} a_{\mu} + f(t'_{\lambda,\nu-1}) \sum_{\mu=\nu}^{n_{\lambda}} a_{\mu} \right) \\ &= \sum_{\nu=1+n_{\sqrt{\lambda}}}^{n_{\lambda}} (f(t'_{\lambda,\nu}) - f(t'_{\lambda,\nu-1})) \sum_{\mu=\nu}^{n_{\lambda}} a_{\mu} + f(t'_{\lambda,n_{\sqrt{\lambda}}}) \sum_{\mu=1+n_{\sqrt{\lambda}}}^{n_{\lambda}} a_{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Da nach (B.1)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} = \frac{1}{2}$$

gilt und  $\sup_{0 < \nu \leq 1+n_{\sqrt{\lambda}}} t_{\lambda,\nu}$  eine Nullfolge ist, folgt für geeignete  $\epsilon_{\lambda}$  (B.3) aus (B.5) mit Lemma B.2.2 und (B.4) aus (B.6). ■

### B.3 Konvergenz der FOURIER-Reihen

**Lemma B.3.1** *Beschränkte monotone Funktionen über abgeschlossenen Intervallen sind von endlicher Variation.*<sup>6</sup>

**Beweis:** Offensichtlich. ■

**Lemma B.3.2** *Stetig differenzierbare Funktionen über abgeschlossenen Intervallen sind von endlicher Variation.*

**Beweis:** Sei  $f(t)$  eine über  $[a, b]$  stetig differenzierbare, komplexwertige Funktion. Gemäß Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann für beliebige  $t_{\nu}$  mit

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$$

stets

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n |f(t_{\nu}) - f(t_{\nu-1})| &= \sum_{\nu=1}^n \left| \dot{f}(t'_{\nu}) \right| |t_{\nu} - t_{\nu-1}| \\ &\leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \left| \dot{f}(t) \right| \end{aligned}$$

für geeignete  $t'_{\nu} \in [t_{\nu-1}, t_{\nu}]$  und somit die Behauptung. ■

**Lemma B.3.3** ——— Version vom 26. März 2009 ———

<sup>6</sup>Umgekehrt läßt sich zeigen, daß eine reellwertige Funktion endlicher Variation stets die Differenz zweier beschränkter monotoner Funktionen ist (Satz von CAMILLE JORDAN, siehe z.B. (Riesz und Sz.-Nagy, 1982, S. 21)).

*Produkte von Funktionen endlicher Variation sind ebenfalls von endlicher Variation.*

**Beweis:** Da Funktionen endlicher Variation beschränkt sein müssen, folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n |f(t_\nu)g(t_\nu) - f(t_{\nu-1})g(t_{\nu-1})| \\ & \leq \sum_{\nu=1}^n \left( |g(t_\nu)| |f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})| + |f(t_{\nu-1})| |g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})| \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beweisskizze zu Satz 6.2.5:** Aus

$$\sum_{n=-N}^{N-1} e^{-in\omega t} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{-in\omega t} + e^{+iN\omega t} - e^{-iN\omega t}$$

folgt

$$\sum_{n=-N}^{N-1} e^{-in\omega t} = \frac{2i \sin(N\omega t)}{1 - e^{-i\omega t}}$$

und somit:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) e^{-in\omega(t-t')} dt &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) \frac{i\omega(t-t')}{1 - e^{-i\omega(t-t')}} \frac{\sin(N\omega(t-t'))}{\pi\omega(t-t')} dt \\ &=_{\tau=t-t'} 2\pi \int_{-\frac{\pi}{|\omega|-t'}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}-t'} f(\tau+t') \frac{i\omega\tau}{1 - e^{-i\omega\tau}} \frac{\sin(N\omega\tau)}{\pi\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Nach Lemma B.3.1 hat  $f(t+t')$  für beliebiges  $t'$  als Funktion von  $t$  endliche Variation über  $[-\frac{\pi}{|\omega|}, +\frac{\pi}{|\omega|}]$  und nach Lemma B.3.2 auch  $\frac{i\omega t}{1 - e^{-i\omega t}}$ . Nach Lemma B.3.3 ist also auch  $f(t+t') \frac{i\omega t}{1 - e^{-i\omega t}}$  von endlicher Variation, so daß Satz B.2.3

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) e^{-in\omega(t-t')} dt = \frac{2\pi}{|\omega|} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{f(t'+\epsilon) + f(t'-\epsilon)}{2}$$

liefert. Gemäß (6.20) und wegen<sup>7</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_N(f) = 0, \tag{B.7}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>7</sup>Aus Satz B.2.3 folgt unmittelbar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) \sin(N\omega t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} (\pi\omega t f(t)) \frac{\sin(N\omega t)}{\pi\omega t} dt = 0.$$

ist das gleichbedeutend mit (6.21). Die gleichmäßige Konvergenz von (6.21) über jedem abgeschlossenen Intervall, über dem  $f$  stetig ist, folgt entsprechend durch gleichmäßige Abschätzung bzgl.  $t'$  der Variation von  $f(t+t') \frac{i\omega t}{1-e^{-i\omega t}}$ .

Damit ist auch klar, daß zu jeder über  $[-\frac{\pi}{|\omega|}, +\frac{\pi}{|\omega|}]$  stückweise stetigen Funktion  $f$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $N$  und komplexe Zahlen  $\gamma_\nu$  existieren mit

$$\begin{aligned} \epsilon &> \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} \left| \dot{f}(t) - \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} \gamma_\nu e^{i\omega t} \right|^2 dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} |\dot{f}(t)|^2 dt + \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} |\gamma_\nu|^2 - 2 \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} \Re(\gamma_\nu^* c_\nu(f)) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} |\dot{f}(t)|^2 dt - \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} |c_\nu(f)|^2 + \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} |\gamma_\nu - c_\nu(f)|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\epsilon > \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} \left| \dot{f}(t) - \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} c_\nu(f) e^{-i\omega t} \right|^2 dt,$$

d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} \left| \dot{f}(t) - \sum_{\nu=-N}^{\nu=+N} c_\nu(f) e^{-i\omega t} \right|^2 dt = 0.$$

Daraus folgt schließlich

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu(f)|^2 < \infty$$

und somit für stückweise stetig differenzierbares, stetiges  $f$  die absolute Konvergenz von (6.21) aufgrund der Beziehung (6.22), die dann durch partielle Integration folgt.

■

Version vom 26. März 2009

Daß auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) \cos(N\omega t) dt = 0$$

gilt, läßt sich leicht mit der Methode zeigen, die im Beweis von Satz B.2.3 benutzt wurde. Für stetig differenzierbares  $f(t)$  ergäbe sich (B.7) einfacher aus

$$\int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) e^{-iN\omega t} dt = \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} f(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{i}{N\omega} e^{-iN\omega t} \right) dt = -\frac{i}{N\omega} \int_{-\frac{\pi}{|\omega|}}^{+\frac{\pi}{|\omega|}} \dot{f}(t) e^{-iN\omega t} dt$$

durch einfache Betragsabschätzung.

## B.4 Zum FOURIER-Integral

Für beliebige Kreisfrequenzen  $\Omega$  gilt unter den Voraussetzungen von Satz 6.2.6

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\Omega}^{+\Omega} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{+i\omega t} d\omega \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \left( \int_{-T}^{+T} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{+i\omega t} d\omega \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} f(t') \underbrace{\int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{+i\omega(t-t')} d\omega}_{\frac{2}{t-t'} \sin(\Omega(t-t'))} dt' \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t') \frac{\sin(\Omega t')}{\pi t'} dt',
 \end{aligned}$$

d.h.:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t') \frac{\sin(\Omega t')}{\pi t'} dt'.$$

Da zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $T$  existiert mit

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t') \frac{\sin(\Omega t')}{\pi t'} dt' - \int_{-T}^{+T} f(t-t') \frac{\sin(\Omega t')}{\pi t'} dt' \right| < \epsilon,$$

folgt daraus mit Satz B.2.3 die Behauptung von Satz 6.2.6.



# Anhang C

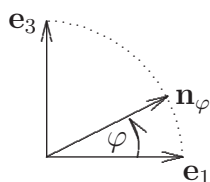
## Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 1** Für beliebig vorgegebene Winkel  $\alpha, \beta$  zeige man:<sup>1</sup>

a) Es gilt

$$\mathbf{n}_{\alpha+\beta} = \cos \beta \mathbf{n}_\alpha + \sin \beta \mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\alpha},$$

wobei:



$$\mathbf{n}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

b) Es gelten folgende Gleichungen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

**Übungsaufgabe 2** Man zeige:

$$\sin(\pi/6) = 1/2, \quad \cos(\pi/6) = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>In den Aufgaben 1-3 soll zunächst weitgehend anschaulich argumentiert werden. Das liefert die Motivation für die später in der Vorlesung eingeführte mathematisch exakte Definition der trigonometrischen Funktionen.

und

$$3 \cos^2(\pi/8) - \cos^2(3\pi/8) = 1 + \sqrt[4]{2} > 2.$$

### Übungsaufgabe 3

a) Mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS zeige man, daß

$$0 \leq 2(1 - \cos \Delta x) \leq (\Delta x)^2 \quad \forall \Delta x \in (0, \pi/2)$$

und somit

$$\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

gilt.

b) Mithilfe von a) und der anschaulich plausiblen Ungleichung

$$\Delta x \leq \frac{\sin \Delta x}{\cos \Delta x} \quad \forall \Delta x \in (0, \pi/2)$$

zeige man, daß

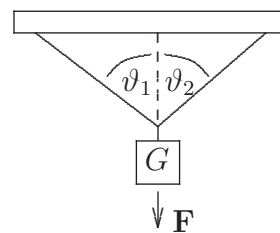
$$\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \sin \Delta x}{\Delta x} = 0.$$

c) Mithilfe der Ergebnisse von a) und b) zeige man für beliebiges Bogenmaß  $x$  :

$$\begin{aligned} \lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= +\cos x \\ \lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} &= -\sin x. \end{aligned}$$

### Übungsaufgabe 4

Ein Gewicht  $G$  hänge folgendermaßen an zwei Seilen ( $\vartheta_1 \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} \vartheta_2$ ):

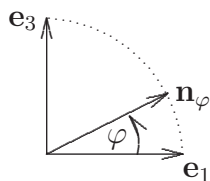


a) Man bestimme die Seilspannungen aus den Winkel  $\vartheta_1, \vartheta_2$  und der Stärke der auf  $G$  einwirkenden Schwerkraft  $\mathbf{F}$  mithilfe der Regel

$$F^1 \mathbf{e}_1 + F^3 \mathbf{e}_3 = -S_1 \mathbf{n}_\alpha - S_2 \mathbf{n}_\beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} S_1 = +\frac{F^1 \sin \beta - F^3 \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \\ S_2 = -\frac{F^1 \sin \alpha - F^3 \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}, \end{cases}$$



wobei wieder:



$$\mathbf{n}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

b) Man diskutiere folgende Grenzfälle (für  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, \pi/2)$ ):

1.  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ .
2.  $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$ .
3.  $\vartheta_1 \rightarrow 0 \neq \vartheta_2$  fest.
4.  $\vartheta_1 + \vartheta_2 \rightarrow \pi$ .

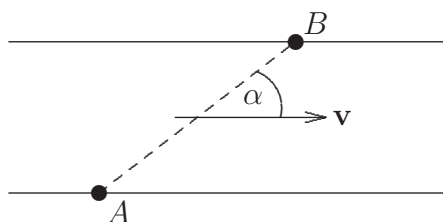
### Übungsaufgabe 5

Ein Jongleur balanciere einen Stab folgendermaßen auf seiner Fingerspitze:



Dabei bewege sich der Stab, ohne sich zu drehen, in Richtung von  $\mathbf{e}$ . Man bestimme die Kraft, die der Jongleur auf den Stab ausübt, aus den Winkeln  $\alpha, \beta$  und der auf den Stab einwirkenden Schwerkraft  $\mathbf{F}$ .

**Übungsaufgabe 6** Eine Fähre, die auf ruhendem Wasser eine maximale Geschwindigkeit vom Betrag  $\check{c}$  erreicht, soll möglichst schnell auf mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  strömendem Wasser geradlinig von  $A$  nach  $B$  gelangen:



a) Man bestimme die dafür mindestens benötigte Fahrzeit  $t$  als Funktion von  $v \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{v}|$ ,  $x \stackrel{\text{def}}{=} |\overrightarrow{AB}|$  und  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \angle(\mathbf{v}, \overrightarrow{AB}) \in (0, \pi)$  unter der Voraussetzung, daß  $v \neq \check{c}$  nicht zu groß ist.<sup>2</sup>

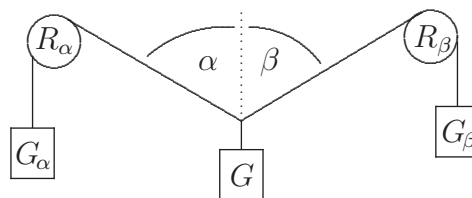
b) Man untersuche folgende Grenzfälle:

1.  $\mathbf{v} = 0$ .
2.  $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AB} = vx$ .
3.  $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ,  $v \rightarrow \check{c}$ .

c) Für welchen Wert von  $v$  ist die benötigte Fahrzeit minimal?

### Übungsaufgabe 7

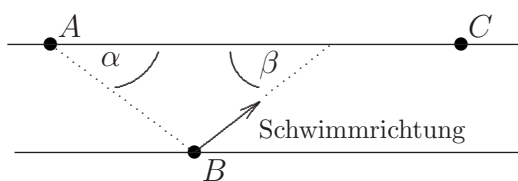
Drei Gewichte  $G_\alpha$ ,  $G$ ,  $G_\beta$  seien folgendermaßen an einem über zwei ideal gelagerte Rollen  $R_\alpha, R_\beta$  (vernachlässigbarer Ausdehnung) geführten Seil aufgehängt:<sup>3</sup>



a) Wie hängen die Winkel  $\alpha, \beta$  von den Gewichten ab?

b) In welchen Beziehungen müssen die Gewichte zueinander stehen, damit Gleichgewicht möglich ist?

**Übungsaufgabe 8** Ein Spaziergänger gehe unbeirrt ein gerades Flußufer entlang stromabwärts mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit vom Betrage 4 km/Std. Zum Zeitpunkt  $t_0$  befinde er sich am Punkt  $A$ . Zum gleichen Zeitpunkt springe am anderen Ufer bei  $B$  ein Schwimmer ins Wasser und schwimme mit gleichförmiger Geschwindigkeit so, daß er am Punkt  $C$  mit dem Fußgänger zusammentreffe:



Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>**Hinweis:** Man verwende die Regeln

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

und

$$\underbrace{a}_{\neq 0} t^2 + pt + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{a} \left( -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - aq} \right).$$

<sup>3</sup>Diese Anordnung erlaubt eine weitgehende experimentelle Überprüfung der Kräfteparallelogramms.

Der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit sei konstant 3 km/Std. Der Betrag der Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser sei 2 km/Std.

Man bestimme den Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ .

**Übungsaufgabe 9** Zwei Fahrzeuge  $B_1, B_2$  bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Zum Zeitpunkt  $t_0$  befinde sich  $B_1$  am Punkt  $P_1$ ,  $B_2$  am Punkt  $P_2$ . Ein drittes Fahrzeug  $C$  bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrage  $c$  von  $B_1$  nach  $B_2$  und ebenso wieder zurück von  $B_2$  nach  $B_1$ .

Man zeige, daß

$$\Delta t = 2 \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}{c} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} \sin(\angle \overrightarrow{P_1 P_2}, \mathbf{v})\right)^2}}{1 - \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c}\right)^2}$$

die Zeitdauer ist, die  $C$  benötigt, um von  $B_1$  zu  $B_2$  und wieder zurück zu  $B_1$  zu gelangen.

**Übungsaufgabe 10** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum und sei  $\mathcal{N}$  eine rückeindeutige Abbildung von  $V$  in sich mit

$$\mathcal{N}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{N}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Man zeige:

- a) Die Vektorregeln (V1)–(V7) gelten auch dann noch, wenn man die Operation  $+$  durch die gemäß<sup>4</sup>

$$\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}^{-1}(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)) \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$$

definierte Operation  $\hat{+}$  ersetzt.

- b) Die beiden Vektoradditionen  $+$  und  $\hat{+}$  stimmen genau dann überein, wenn  $\mathcal{N}$  additiv ist, d.h. wenn

$$\mathcal{N}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$$

gilt.

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Mit  $\mathcal{N}^{-1}$  bezeichnen wir, wie allgemein üblich, die Umkehrabbildung von  $\mathcal{N}$  :

$$\mathcal{N}^{-1}(\mathcal{N}(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

c) Die durch

$$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( 2 - \left| \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| \right) \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}, \quad \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

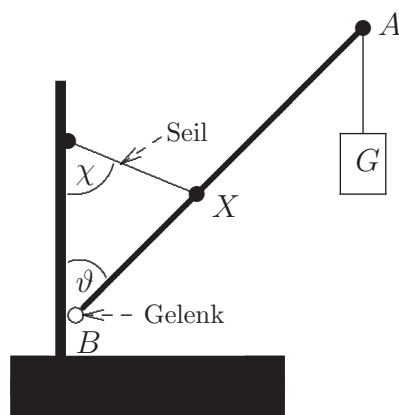
definierte Abbildung  $\mathcal{N}_{\mathbf{e}}$  ist für jedes innere Produkt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V$  und jeden (physikalisch) dimensionslosen Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  rückeindeutig und genügt der Bedingung

$$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R},$$

ist aber **nicht** additiv.

### Übungsaufgabe 11

Ein Gewicht  $G$  sei folgendermaßen an einem einfachen Kran aufgehängt:



Der Schwerpunkt des Hebearms sei  $X$ , die auf den Hebearm wirkende Schwerkraft sei  $\mathbf{F}_X$ , die auf  $G$  wirkende Schwerkraft sei  $\mathbf{F}_A$ .

Man bestimme die Spannung des bei  $X$  angreifenden Seils aus  $|\overrightarrow{BA}|$ ,  $|\overrightarrow{BX}|$ ,  $\vartheta$ ,  $\chi$ ,  $\mathbf{F}_X$  und  $\mathbf{F}_A$ .

**Übungsaufgabe 12** Ein (punktförmiges) Gewicht hänge an drei in die Richtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  gespannten Seilen. Bzgl. der (physikalisch dimensionslosen) Orthonormalbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  gelte

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} +\sin \vartheta_1 \cos \varphi \\ -\sin \vartheta_1 \sin \varphi \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} +\sin \vartheta_2 \cos \varphi \\ +\sin \vartheta_2 \sin \varphi \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_3 \\ 0 \\ +\cos \vartheta_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\vartheta_j \in (0, \pi/2) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}.$$

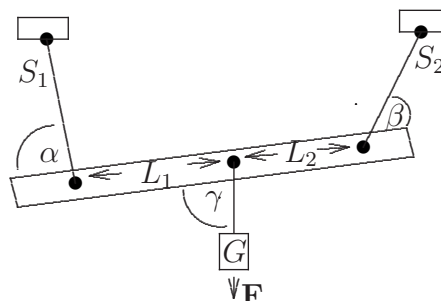
a) Man bestimme die Spannung des in Richtung  $\mathbf{n}_3$  gespannten Seils aus der Kraft  $\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_3$  und den Winkeln  $\varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ .

b) Man diskutiere folgende Grenzfälle:

1.  $\vartheta_3 \rightarrow 0$ .
2.  $\varphi = 0$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ .
3.  $\vartheta_1, \vartheta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  bei konstantem  $\cos \varphi \neq 0$  und  $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$ .

### Übungsaufgabe 13

An einer starren Stange vernachlässigbarer Masse sei ein Gewicht  $G$  angehängt. Die Stange selbst sei an zwei Seilen  $S_1, S_2$  aufgehängt:



Man bestimme den Winkel  $\beta$  aus den Winkeln  $\alpha, \gamma$  und den Längen  $L_1, L_2$ .

**Übungsaufgabe 14** Gegeben seien eine **beliebige** (physikalisch dimensionslose) Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ . Man bestimme die Basis, bzgl. der für die Vektoren

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 A^j \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^3 B^j \mathbf{b}_j,$$

die Beziehung

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} = \begin{pmatrix} A^2 B^3 - A^3 B^2 \\ A^3 B^1 - A^1 B^3 \\ A^1 B^2 - A^2 B^1 \end{pmatrix}$$

gilt.

**Übungsaufgabe 15** Ein Medium räumlich und zeitlich konstanter Dichte  $\rho$  fließe mit räumlich und zeitlich konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ .

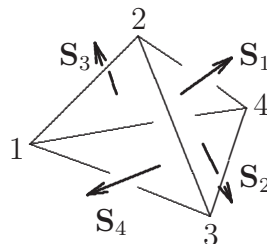
Man bestimme den Gesamtstrom<sup>5</sup> durch das feste Dreieck mit den Eckpunkten  $A, B, C$  aus der Stromdichte  $\mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \rho \mathbf{v}$  und dem Flächenvektor  $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>**Hinweis:** Man bestimme zunächst das Aufenthaltsgebiet zum Zeitpunkt  $t$  aller der Teile des Mediums, die zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \Delta t$  durch die Dreiecksfläche hindurchtreten.

### Übungsaufgabe 16

Gegeben sei ein Tetraeder mit den Eckpunkten  $P_1, \dots, P_4$ .  $\mathbf{S}_j$  bezeichne jeweils den Vektor, der senkrecht auf der  $P_j$  gegenüberliegenden Fläche steht, dessen Betrag mit dem Inhalt dieser Fläche übereinstimmt und der von  $P_j$  wegzeigt:



Man beweise die Gleichung  $\mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_4 = 0$  und veranschauliche das Ergebnis mithilfe konstanter Strömungen, die jeweils durch eine Dreiecksfläche ein- und durch die übrigen austreten.

**Übungsaufgabe 17** Für beliebig vorgegebene  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  zeige man:

$$\arg(z_1 + z_2) = \arg z_1 + \arctan \left( \frac{|z_2| \sin(\arg z_2 - \arg z_1)}{|z_1| + |z_2| \cos(\arg z_2 - \arg z_1)} \right) \bmod \pi,$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| \cos(\arg z_2 - \arg z_1)}.$$

**Übungsaufgabe 18** Man zeige, daß die Überlagerung  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}_1^+ + \mathbf{x}_2^+$  der gleich orientierten Kreisschwingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^+(t) &= \underbrace{A_j}_{>0} \left( \underbrace{\cos(\omega_0 t + \varphi_j)}_{>0} \mathbf{e}_1 + \sin(\omega_0 t + \varphi_j) \mathbf{e}_2 \right) \\ &\cong A_j e^{+i(\omega t + \varphi_j)} \end{aligned}$$

eine Kreisschwingung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t) &= A^+ \left( \cos(\omega_0 t + \varphi^+) \mathbf{e}_1 \pm \sin(\omega_0 t + \varphi^+) \mathbf{e}_2 \right) \\ &\cong A^+ e^{+i(\omega t + \varphi^+)} \end{aligned}$$

mit

$$A^+ = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

und

$$\varphi^+ = \varphi_1 + \arctan \left( \frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) \bmod \pi$$

ist.

**Übungsaufgabe 19** Für beliebig vorgegebene  $z^+, z^- \in \mathbb{C}$  und  $\omega, t \in \mathbb{R}$  zeige man, daß

$$z^+ e^{+i\omega t} + z^- e^{-i\omega t} = e^{i\delta} \left( (|z^+| + |z^-|) \cos(\omega t + \varphi_0) + (|z^+| - |z^-|) i \sin(\omega t + \varphi_0) \right)$$

mit

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\arg z^+ + \arg z^-}{2}, \quad \varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\arg z^+ - \arg z^-}{2}$$

gilt.

**Übungsaufgabe 20** Man zeige, daß die Überlagerung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{x}^-(t)$  der entgegengesetzt orientierten Kreisbewegungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\pm(t) &= \underbrace{A^\pm}_{>0} \left( \cos(\underbrace{\omega_0}_{>0} t \pm \varphi^\pm) \mathbf{e}_1 \pm \sin(\omega_0 t \pm \varphi^\pm) \mathbf{e}_2 \right) \\ &\cong A^\pm e^{\pm i(\omega_0 t \pm \varphi^\pm)} \end{aligned}$$

die zweidimensionale harmonische Schwingung

$$\mathbf{x}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{a} + \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|,$$

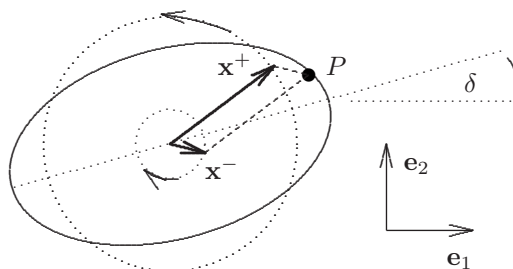
mit

$$\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}$$

ist, wobei die Hauptachsen der Bahnellipse durch

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\stackrel{\text{def}}{=} (A^+ + A^-)(\cos \delta \mathbf{e}_1 + \sin \delta \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{b} &\stackrel{\text{def}}{=} (A^+ - A^-)(-\sin \delta \mathbf{e}_1 + \cos \delta \mathbf{e}_2), \\ \delta &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}, \end{aligned}$$

gegeben sind:



**Übungsaufgabe 21** Man zeige, daß sich jede lineare harmonische Schwingung

$$\mathbf{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in L(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}), \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ Orthonormalbasis,}$$

als Überlagerung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{x}^-(t)$  gleichförmiger Kreisbewegungen  $\mathbf{x}^\pm(t)$  der in Aufgabe 20 angegebenen Form darstellen läßt.<sup>6</sup>

**Übungsaufgabe 22** Man zeige, daß die Überlagerung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  zweier linearer harmonischer Schwingungen

$$\mathbf{x}_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \mathbf{b}_2$$

gleicher Kreisfrequenz  $\omega_0$  stets eine harmonische Schwingung zu dieser Kreisfrequenz ist.<sup>7</sup> Speziell für  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1$  zeige man,<sup>8</sup> daß

$$\mathbf{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e}_1$$

gilt mit

$$A = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\right).$$

**Übungsaufgabe 23** Gegeben seien eine Kreisfrequenz  $\omega_0 > 0$ , ein Zeitpunkt  $t_0$  und Anfangswerte  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ . Man zeige, daß zu jeder Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$  von  $\mathcal{L}(\{\mathbf{x}_0, \frac{\mathbf{v}_0}{\omega_0}\})$  reelle Zahlen  $c, d, \chi_c, \chi_d$  existieren, für die die Ortsvektorfunktion

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\omega_0(t - t_0) + \chi_c) \mathbf{c} + \cos(\omega_0(t - t_0) + \chi_d) \mathbf{d}$$

mit

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} c \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{d} \stackrel{\text{def}}{=} d \mathbf{b}_2$$

die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0$$

erfüllt.

<sup>6</sup>Man betrachte zunächst den Spezialfall  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ .

<sup>7</sup>Man beachte die Ergebnisse der Aufgaben 18–21.

<sup>8</sup>Man betrachte die linearen Schwingungen als Orthogonalprojektionen entsprechender gleichförmiger Kreisbewegungen auf eine Gerade parallel  $\mathbf{e}_1$ .



**Übungsaufgabe 24** Seien  $m$  eine Masse,  $B > 0$  eine konstante Kraftflußdichte,  $q$  eine Ladung und  $\mathbf{x}(t)$  die Ortsvektorfunktion einer Bewegung in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene, die der Bedingung

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = q \dot{\mathbf{x}}(t) \times (B \mathbf{e}_3)$$

genüge.

a) Man zeige, daß für

$$\begin{aligned} z(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}(t) + i \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(t) \\ &\hat{=} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\ddot{z}(t) = -i \frac{qB}{m} \dot{z}(t)$$

gilt.

b) Man bestimme  $z(t)$  aus  $z(0)$  und  $\dot{z}(0)$ .

c) Man bestimme  $\mathbf{x}(t)$  aus  $\mathbf{x}(0)$  und  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  und interpretiere das Ergebnis.

**Übungsaufgabe 25** Man zeige, daß die Kraft

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

die ein konstantes elektromagnetisches Feld  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \neq 0$  auf eine Ladung  $q$  ausübt, genau dann Null ist, wenn die Bedingungen

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{v} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \propto \mathbf{B}$$

erfüllt sind.

**Übungsaufgabe 26** Sei  $\mathbf{x}(t)$  die Ortsvektorfunktion einer **ebenen** Bewegung, die den Bedingungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t), \quad \frac{d}{dt} |\ddot{\mathbf{x}}(t)| = 0$$

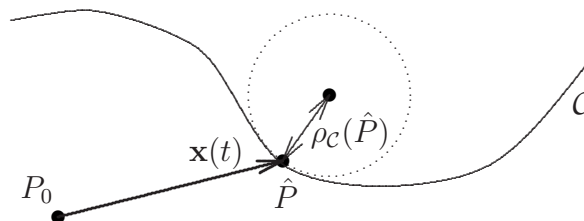
genügt.

Man zeige, daß ein konstanter Vektor  $\mathbf{C}$  existiert mit

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}.$$

### Übungsaufgabe 27

Gegeben sei eine Bahnkurve  $\mathcal{C}$  :



Man zeige, daß die Definition

$$\frac{1}{\rho_{\mathcal{C}}(\hat{P})} \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \right|_{t=\hat{t}}, \quad \overrightarrow{P_0\hat{P}} = \mathbf{x}(\hat{t}),$$

der Krümmung nur vom Bahnpunkt  $\hat{P}$  und der Gestalt von  $\mathcal{C}$ , nicht jedoch von der Wahl der Parametrisierung

$$\mathcal{C} = \left\{ P : \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{x}(t) \text{ für geeignetes } t \right\}$$

( $\mathbf{x}(t)$  hinreichend gutartig) abhängt.<sup>9</sup>

**Übungsaufgabe 28** Man zeige, daß eine ebene Bahnkurve  $\mathcal{C}$  genau dann kreisförmig ist, wenn ihre Krümmung konstant ist.<sup>10</sup>

**Übungsaufgabe 29** Sei  $\mathbf{x}(t)$  eine hinreichend gutartige Ortsvektorfunktion, die der Gleichung  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}$  genüge (z.B. für ein nichtrelativistisches Elektron im

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Man führe den Ausdruck für  $1/\rho_{\mathcal{C}}(\hat{P})$ , der sich bezüglich einer anderen Parametrisierung  $\mathcal{C} = \{P' : \overrightarrow{P_0P'} = \mathbf{x}'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(f(t)) \text{ für geeignetes } t\}$  ergibt, mithilfe der Kettenregel auf denjenigen bezüglich  $\mathbf{x}(t)$  zurück.

<sup>10</sup>Man wähle eine Parametrisierung, für die  $|\dot{\mathbf{x}}(t)|$  konstant ist. Dann zeige man, daß diese Parametrisierung im Falle konstanter Krümmung der Gleichung

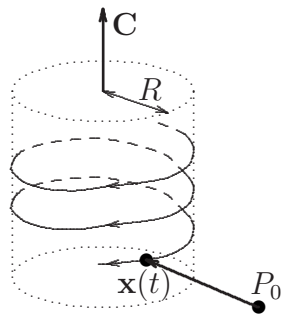
$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C} \quad \text{für alle } t$$

genügt, wobei  $\mathbf{C}$  ein zur Bahnebene senkrechter Vektor ist. Daraus leite man

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{x}(t) + \rho_{\mathcal{C}}(P(t)) \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t)}{|\ddot{\mathbf{x}}(t)|} \right) = 0$$

ab.

homogenen Magnetfeld):



$$R = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left| \dot{\mathbf{x}}(t) - \left( \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} \right) \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} \right|$$

Man bestimme  $\mathbf{x}(t)$  aus den Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ .<sup>11</sup>

**Übungsaufgabe 30** Ein PKW-Fahrer fährt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit. Zum Zeitpunkt  $T_0$  sieht er, daß ihm ein LKW die Vorfahrt nimmt. Bis zum Zeitpunkt  $T = T_0 + s$  reagiert er nicht (‘Schrecksekunde’!), danach bremst er sein Fahrzeug endlich mit der konstanten (maximalen) Verzögerung  $b$  ab ( $0 > -b =$  ‘Beschleunigung’). Nach einer Bremsstrecke der Länge  $L$  (Bremsspur!) prallt sein Fahrzeug mit der Geschwindigkeit  $v_c$  (Unfallschaden!) auf den bereits zum Stehen gekommenen LKW auf.

Bis zu welcher Anfangsgeschwindigkeit<sup>12</sup> seines Fahrzeugs hätte der PKW-Fahrer den Unfall (bei gleicher Reaktionszeit, gleicher Brems-Verzögerung und Gefahrerkennung am gleichen Ort) noch verhindern können und welche Anfangsgeschwindigkeit hatte der PKW tatsächlich?

**Übungsaufgabe 31** Ein Massenpunkt  $m$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$ , der sich unter dem Einfluß einer idealen Federkraft  $-\kappa \mathbf{x}(t)$  und einer zusätzlichen speziellen Reibungskraft  $-\rho \dot{\mathbf{x}}(t)$  bewegt, genügt der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) + \rho \dot{\mathbf{x}}(t) + \kappa \mathbf{x}(t) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Man zeige, daß die entsprechende Gesamtenergie

$$E(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}(t)|^2$$

(für  $\rho \neq 0$ ) zwar nicht erhalten ist, aber der Gleichung

$$E(t_2) - E(t_1) = -\rho \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 dt \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Man löse zunächst den Spezialfall  $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{C} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{C} = 0$ . Der allgemeine Fall läßt sich auf diesen Spezialfall zurückführen, indem man anstelle von  $\mathbf{x}(t)$  die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}_{\text{spez}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e} + t \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}/|\mathbf{C}|$  betrachtet.

<sup>12</sup>Man beachte, daß bei niedrigerer Anfangsgeschwindigkeit der Bremsvorgang (nach Ablauf der ‘Schrecksekunde’) in einem größeren Abstand vom Unfallpartner eingeleitet worden wäre!

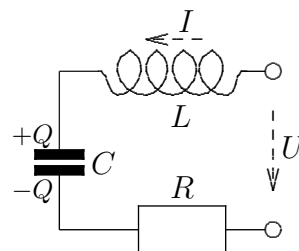
genügt. Damit beweise man (analog zu Abschnitt 3.5.1 der Vorlesung), daß  $\mathbf{x}(t)$  wegen  $m, \rho, \kappa \geq 0$  für  $t > 0$  durch (C.1) und die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$$

eindeutig bestimmt ist.

### Übungsaufgabe 32

Ein Kondensator  $C$ , ein Ohmscher Widerstand  $R$  und eine Induktivität  $L$  seien in Reihe an eine äußere Spannungsquelle  $U(t)$  angeschlossen:



Man zeige, daß die zeitabhängige Ladung  $Q(t)$  des Kondensators der Gleichung

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U(t) \quad (\text{C.2})$$

genügt und somit für  $t > 0$  durch die Anfangsbedingungen

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0 \quad (\text{C.3})$$

eindeutig bestimmt ist.<sup>13</sup>

### Übungsaufgabe 33 Sei

$$Q(t) = z_+ e^{i\lambda_+ t} + z_- e^{i\lambda_- t}, \quad z_{\pm}, \lambda_{\pm} \in \mathbb{C},$$

und  $Q(t') \neq 0$  für mindestens ein  $t' \in \mathbb{R}$ . Man zeige:

a)  $Q(t)$  ist im Falle  $z_+ \neq 0 \neq z_-$  genau dann eine (i.a. komplexwertige) Lösung von

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0 \quad (\text{C.4})$$

(d.h. von (C.2) zu  $U = 0$ ), wenn

$$\lambda_{\pm} \in \left\{ i \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, i \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \right\}.$$

b) Wenn  $Q(t)$  eine Lösung von (C.4), dann auch

$$Q(t) = \Re(Q(t)).$$

<sup>13</sup>Man untersuche die Differenz zweier Lösungen wie in Aufgabe 31.

c) Jede Anfangsbedingung

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0$$

läßt sich durch geeigneter Wahl der  $z_{\pm}$  erfüllen, wenn  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ .

**Übungsaufgabe 34**  $Q(t)$  sei eine Lösung von (C.4). Man zeige:

(i) Im Falle  $\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0$  ist  $Q(t)$  von der Form

$$Q(t) = Q_{\varphi} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

(ii) Im Falle  $\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < 0$  ist  $Q(t)$  von der Form

$$Q(t) = Q_+ e^{-\rho_+ t} + Q_- e^{-\rho_- t}, \quad \rho_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

(iii) Im Falle  $\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = 0$  ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left( Q_0 + t \left( I_0 + \frac{R}{2L} Q_0 \right) \right).$$

Man diskutiere das Ergebnis ausführlich.

**Übungsaufgabe 35** Man löse das Anfangswertproblem

$$L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0,$$

für zeitlich konstante äußere Spannung  $U(t) = U_0$ .

**Übungsaufgabe 36** Man zeige, daß die Gleichung

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

für  $R > 0$  eine Lösung der Form

$$Q(t) = Q_{\text{part}}(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

besitzt, und bestimme die Konstanten  $A, \varphi$ .

Man zeige außerdem, daß im Falle  $\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2 > 0$  die Amplitude  $A$  von  $Q_{\text{part}}(t)$  für die **Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega = \omega_r^Q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2},$$

die Amplitude von  $I_{\text{part}}(t) = \dot{Q}_{\text{part}}$  dagegen für

$$\omega = \omega_r^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

maximal wird.

**Übungsaufgabe 37** Seien  $m$  eine Masse,  $\kappa$  eine Federkonstante,  $\rho$  eine Dämpfungskonstante mit

$$\rho < \sqrt[3]{m\kappa}$$

und  $F(t)$  eine stetige von  $t$  abhängige Kraft mit

$$F(t) = 0 \quad \forall t \leq 0.$$

a) Man zeige, daß

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t) e^{-\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) + c_2(t) e^{-\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) F(t') dt', \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{\frac{\kappa}{m} - \left(\frac{\rho}{m}\right)^2}, \\ c_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} +\frac{1}{m\omega_0} \int_0^t e^{+\frac{\rho}{m}t'} \cos(\omega_0 t') F(t') dt', \\ c_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m\omega_0} \int_0^t e^{+\frac{\rho}{m}t'} \sin(\omega_0 t') F(t') dt', \end{aligned}$$

eine Lösung der Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \kappa x(t) = F(t)$$

des getriebenen, gedämpften, harmonischen Oszillators ist, für die

$$x(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

gilt.

b) Man bestimme  $x(t)$  für den Grenzfall

$$0 \leq F(t) \rightarrow f_0 \delta(t).$$

**Übungsaufgabe 38** Seien  $m, \rho, \kappa$  und  $\omega_0$  wie in Aufgabe 37 vorgegeben und sei  $\theta_\epsilon(t)$  eine hinreichend gutartige *Einschaltfunktion*:

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 1 & \text{für } t \geq T. \end{cases}$$

a) Man zeige, daß für

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

eine Amplitude  $A > 0$  und eine Phase  $\varphi \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\begin{aligned} x_\infty(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{m \omega_0} \int_{-\tau}^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) \theta_\epsilon(t'+\tau) F(t') dt' \\ &= A \cos(\omega t - \varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$m \ddot{x}_\infty(t) + 2\rho \dot{x}_\infty(t) + \kappa x_\infty(t) = F(t).$$

b) Mithilfe der Schwingungsgleichung zeige man, daß

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(2\rho\omega)^2 + (\kappa - m\omega^2)^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\rho\omega}{\kappa - m\omega^2} \bmod 2\pi.$$

gilt und man  $\varphi \in (0, \pi)$  wählen kann.

c) Man zeige daß  $A$  für die **Resonanzfrequenz**

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - 2\left(\frac{\rho}{m}\right)^2} < \omega_0$$

maximal ist und dieser Maximalwert für  $\rho \rightarrow 0$  divergiert.

**Übungsaufgabe 39** Man zeige durch Anwendung des Flächensatzes auf eine entsprechende harmonische Schwingung, daß der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen-Längen  $a$  und  $b$  durch  $\pi ab$  gegeben ist.

**Übungsaufgabe 40** Gegeben seien ein offenes Zeitintervall  $J$  mit  $0 \in J$  und eine stetig differenzierbare Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$ , die den Bedingungen

$$\mathbf{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$$

und

$$\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

genüge. Man zeige:

$$\mathbf{x}(t) = |\mathbf{x}(t)| \frac{\mathbf{x}(0)}{|\mathbf{x}(0)|} \quad \forall t \in J.$$

**Übungsaufgabe 41** Die Bewegungsgleichungen zweier Massenpunkte  $m_1, m_2$  mit den Ortsvektorfunktionen  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  seien:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) &= F\left(|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|\right) \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) &= F\left(|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)|\right) \frac{\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)}{|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)|}. \end{aligned}$$

Man zeige, daß die Ortsvektorfunktionen

$$\mathbf{x}_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 \mathbf{x}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x}_r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$$

für Schwerpunkts- und Relativbewegung den Gleichungen

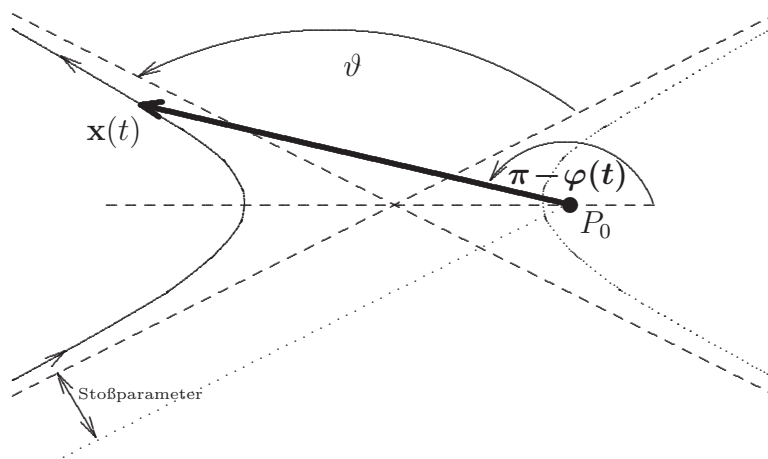
$$\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = 0, \quad \mu \ddot{\mathbf{x}}_r(t) = F\left(|\mathbf{x}_r(t)|\right) \frac{\mathbf{x}_r(t)}{|\mathbf{x}_r(t)|}$$

genügen, wobei  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  die sogenannte **reduzierte Masse** bezeichnet.

**Übungsaufgabe 42** Sei  $\mathbf{x}(t)$  eine (2-mal stetig differenzierbare) Lösung der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = -m\lambda_- \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}, \quad \lambda_- < 0, \quad (\text{C.5})$$

für die sog. RUTHERFORD-Streuung.



Man zeige:

a) Der RUNGE-LENZ-Vektor

$$\mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{L}}{m\lambda_-} - \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \quad (\text{C.6})$$



ist **zeitlich konstant**.

b) Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \angle(-\mathbf{\Lambda}, \mathbf{x}(t)), \quad \dot{\varphi}(t) \geq 0, \\ \epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{\Lambda}|, \\ p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{L}|^2}{m^2 |\lambda_-|}\end{aligned}\tag{C.7}$$

gilt

$$\epsilon \cos \varphi(t) > 1\tag{C.8}$$

und

$$\mathbf{x}(t) = \frac{-p}{1 - \epsilon \cos \varphi(t)} \left( \cos \varphi(t) \frac{\mathbf{\Lambda}}{|\mathbf{\Lambda}|} + \sin \varphi(t) \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{\Lambda}}{|\mathbf{L} \times \mathbf{\Lambda}|} \right), \quad \text{falls } \mathbf{L} \neq 0 \neq \mathbf{\Lambda}.\tag{C.9}$$

c) Für den Streuwinkel  $\vartheta$  gilt

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\epsilon}.$$

**Übungsaufgabe 43** Ein Massenpunkt  $m$  mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  bzgl.  $P_0$  bewege sich unter dem Einfluß der Schwerkraft, die ein in  $P_0$  ruhender Massenpunkt  $M$  auf  $m$  ausübt:

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = -G m M \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}.$$

a) Man zeige, daß sich  $m$  genau dann auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  bewegt, wenn  $\dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$  und

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = v_{\text{kosm}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1. \text{ kosmische Geschwindigkeit})$$

für mindestens einen Zeitpunkt (und damit für alle Zeitpunkte) gilt.<sup>14</sup>

b) Man zeige, daß sich  $m$  genau dann von  $M$  unendlich weit entfernt, wenn

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| \geq \sqrt{2} v_{\text{kosm}}(|\mathbf{x}(t)|) \quad (2. \text{ kosmische Geschwindigkeit})$$

für mindestens einen Zeitpunkt gilt (und damit für alle Zeitpunkte).

<sup>14</sup>**Hinweis:** In der Vorlesung wurde gezeigt, daß genau dann eine Kreisbahn vorliegt, wenn der RUNGE-LENZ-Vektor Null ist.

**Übungsaufgabe 44** Man kann zeigen (siehe Abschnitt 4.4.2 der Vorlesung), daß der Eigendrehimpuls einer Kugel der Masse  $m$  mit dem Radius  $r$ , die sich um eine Achse in Richtung  $\mathbf{e}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t)$  dreht, durch

$$\mathbf{L}_{\text{eigen}}(t) = \frac{2}{5} m r^2 \boldsymbol{\omega}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}$$

gegeben ist. Man bestimme daraus die Bewegungsgleichung eines ebenen Schwerependels im homogenen Schwerfeld, das aus einer masselosen starren Stange besteht, an deren Pendelende eine Kugel der Masse  $m$  mit dem Radius  $r$  befestigt ist.<sup>15</sup> Der Abstand des Kugelmittelpunktes zur Pendelaufhängung sei (konstant)  $l$ , die Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$ .

**Übungsaufgabe 45** Gegeben seien ein stetig differenzierbares Skalarfeld  $g(\mathbf{x})$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $F$  über dem Wertebereich von  $g$ .

Man zeige:

$$\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} F(g(\mathbf{x})) \implies \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = \left( \frac{d}{d\xi} F(\xi) \right)_{|\xi=g(\mathbf{x})} \text{grad } g(\mathbf{x}).$$

**Übungsaufgabe 46** Man zeige, daß jedes Vektorfeld der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$$

mit stetigem  $f(\xi)$  konservativ ist und gebe ein Potential an.<sup>16</sup>

**Übungsaufgabe 47** Man zeige, daß jedes Vektorfeld der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

mit stetigem  $f(\xi)$  und  $f(0) = 0$  konservativ ist und gebe ein Potential an.<sup>17</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>15</sup>**Hinweis:** Man beachte Abschnitt 3.4.2 der Vorlesung.

<sup>16</sup>**Hinweis:** Man beachte, daß jede stetige Funktion über  $\mathbb{R}^1$  eine Stammfunktion besitzt.

<sup>17</sup>**Hinweis:** Man zeige zunächst

$$\text{grad } |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

**Übungsaufgabe 48** Sei  $\omega$  eine Kreisfrequenz.

Man zeige mithilfe der TAYLOR-Entwicklung, daß

$$F(t) = -i \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (i \omega t)^\nu$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{F}(t) + \omega^2 F(t) &= 0, \\ F(0) &= 0, \quad \dot{F}(0) = \omega \end{aligned}$$

ist.

**Übungsaufgabe 49** Sei

$$F(\lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(\lambda)^2}} & \text{für } \lambda \in (-1, +1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Man zeige induktiv, daß

$$F^{(\nu)}(\lambda) = \frac{P_\nu(\lambda)}{Q_\nu(1 - (\lambda)^2)} F(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  mit geeigneten Polynomen  $P_\nu$  und  $Q_\nu$  gilt.

b) Man zeige, daß  $F(\lambda)$  auch an den Stellen  $\lambda = \pm 1$  beliebig oft differenzierbar ist.

c) Man zeige, daß  $F(\lambda)$  an der Stelle  $\lambda = 1$  **nicht** TAYLOR-entwickelbar ist.

**Übungsaufgabe 50** Man zeige, daß die Funktion  $f(\lambda) = \lambda^2 \sin(\lambda^{-2})$  zwar (überall) differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

**Übungsaufgabe 51** Ein Massenpunkt  $m$  bewege sich unter dem Einfluß einer idealen Federkraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = -\kappa \mathbf{x}(t)$  und einer zusätzlichen äußeren Kraft. Die resultierende Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  sei bekannt und erfülle die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ . Man bestimme die Arbeit, die

- a) die Federkraft,
- b) die äußere Kraft

am Massenpunkt während des Zeitintervalls  $[0, t']$  verrichtet, als Funktion von  $\mathbf{x}(t')$  und  $\dot{\mathbf{x}}(t')$ .

**Übungsaufgabe 52** Ein Experimentator bewege einen Massenpunkt  $m$  im Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 - \kappa \mathbf{x}$  so, daß sich für  $m$  die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{b} t^2$  ergibt.

Man bestimme die Arbeit, die der Experimentator am Massenpunkt während des Zeitintervalls  $[0, t']$  verrichtet, als Funktion von  $\mathbf{F}_0$ ,  $\kappa$  und  $\mathbf{b}$ .

**Übungsaufgabe 53** Man zeige, daß ein stetiges Zentralfeld der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

genau dann konservativ ist, wenn<sup>18</sup> eine Funktion  $f$  existiert mit

$$\Psi(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|).$$

**Übungsaufgabe 54**

a) Man bestimme das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , das einer **Rotation** mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega_0 > 0$  um die  $x^3$ -Achse — bzgl. einer rechtshändigen Orthonormalbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  — entspricht.

b) Man zeige, daß für dieses Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 2\omega_0$$

gilt, wenn  $\mathcal{C}$  der geschlossene Weg entsprechender Orientierung im Abstand  $R$  um den Koordinaten-Ursprung in der  $x^1, x^2$ -Ebene ist.

c) Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar?

**Übungsaufgabe 55** In der Ebene mit den orthogonalen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  seien folgende Wege betrachtet:

- (i) der Weg  $\mathcal{C}_1$ , der auf dem Kreis vom Radius  $R$  um  $P_0$  von  $R\mathbf{e}_1$  nach  $R\mathbf{e}_2$  führt,<sup>19</sup>
- (ii) der Weg  $\mathcal{C}_2$  der zunächst von  $R\mathbf{e}_1$  geradlinig zu  $P_0$  und von dort aus geradlinig zu  $R\mathbf{e}_2$  führt.

Man bestimme die Wegintegrale des Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 - \kappa_1 \mathbf{x} + \kappa_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{x}$$

über die Wege  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  und diskutiere das Ergebnis.

Version vom 26. März 2009

<sup>18</sup>Man beachte Aufgabe 47. Zum Beweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung untersuche man das Wegintegral von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  über geschlossene Wege, die sich jeweils aus zwei Wegen in radialer Richtung und zwei Wegen konstanten Abstandes zum Bezugspunkt  $P_0$  zusammensetzen. Dabei beachte man Lemma 4.2.5, Folgerung 4.2.8 und Gleichung (4.22) der Vorlesung.

<sup>19</sup>Wie üblich seien die Orte mit ihren Ortsvektoren bzgl.  $P_0$  identifiziert.

**Übungsaufgabe 56** Man berechne das Oberflächenintegral des Gravitationsfeldes

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G M \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

eines Massenpunktes  $M$  über den Rand einer Kugel mit dem Radius  $R$ , in deren Mittelpunkt sich  $M$  befindet.

**Übungsaufgabe 57** Man berechne das Volumenintegral, das den Rauminhalt einer Kugel vom Radius  $R$  darstellt.

**Übungsaufgabe 58** Man bestimme den Schwerpunkt<sup>20</sup>

$$\frac{1}{\text{Gesamtmasse}} \int_{\text{Halbkugel}} \mu \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}}$$

einer homogenen Halbkugel mit dem Radius  $R$  und der Massendichte  $\mu$ .

**Übungsaufgabe 59** Man bestimme den Trägheitstensor (bzgl. des Schwerpunkts) eines homogenen Zylinders mit Gesamtmasse  $M$ , Radius  $R$  und Länge  $L$ .

**Übungsaufgabe 60** Sei  $\theta_t$  resp.  $\mathbf{L}(t)$  der Trägheitstensor resp. Gesamtdrehimpuls eines starren Körpers  $\mathcal{K}$  zur Zeit  $t$  (bzgl.  $P_0$ ), der zu diesem Zeitpunkt im Rechtsschraubensinn um eine in Richtung  $\mathbf{e}(t)$  orientierte Achse durch  $P_0$  rotiere. Man zeige:

$$\mathbf{L}(t) = |\mathbf{L}(t)| \mathbf{e}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_t(\mathbf{e}', \mathbf{e}(t)) = 0 \quad \forall \mathbf{e}' \perp \mathbf{e}(t).$$

**Übungsaufgabe 61** Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  das (zu  $\mathbf{e}$  parallele) Geschwindigkeitsfeld eines in  $P_0$  fixierten Mediums, das sich in  $\mathbf{e}$ -Richtung gleichförmig ausdehne (rotations- und scherungsfrei). Die relative Längenänderung (für  $\mathbf{e}$ -parallele Strecken) pro Zeit sei  $d$ .

a) Man bestimme  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  und zeige ohne Verwendung des Satzes von GAUSS, daß

$$\frac{1}{\text{Kugelvolumen}} \int_{\text{Kugeloberfl.}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = d$$

für jede Kugel mit Mittelpunkt  $P_0$  gilt, deren Oberfläche nach außen orientiert ist.

b) Man verallgemeinere das Ergebnis für den Fall gleichmäßiger Ausdehnung (mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten) in drei orthogonale Richtungen.

**Übungsaufgabe 62** Man berechne und diskutiere das Gravitationspotential einer homogenen Massenkugel mit dem Radius  $R$  und der Gesamtmasse  $M$  mithilfe des GAUSSschen Gesetzes.

**Übungsaufgabe 63** Ein Körper  $\mathcal{K}$  ruhe, an einem dünnen Seil hängend, ganz innerhalb einer Flüssigkeit konstanter Dichte  $\mu$  und fülle dabei das einfache Raumgebiet  $\mathcal{G}$  aus.

Man beweise das sog. *Archimedische Prinzip*: Die Summe aller Oberflächenkräfte, die die Flüssigkeit auf  $\mathcal{K}$  ausübt, stimmt mit dem negativen Gewicht der von  $\mathcal{K}$  verdrängten Flüssigkeitsmenge überein, wenn man das Schwerfeld  $\mathbf{g}$  (näherungsweise) als konstant betrachtet.<sup>21</sup>

**Übungsaufgabe 64** Man bestimme das Magnetfeld  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ , das von der stationären Stromdichte eines unendlich langen zylindrischen Stromfadens erzeugt wird, aus den MAXWELLSchen Gleichungen

$$\operatorname{div} \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{=\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x})} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{x}) \quad (\text{im S.I.})$$

und den offensichtlichen physikalischen Nebenbedingungen.

**Übungsaufgabe 65** Man zeige, daß aus der POINCARÉ-*Konstruktion*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{x} \times \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda$$

die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \int_0^1 \lambda^2 (\operatorname{div} \mathbf{F})(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda$$

folgt, wenn das Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar ist.

**Übungsaufgabe 66** Sei  $\Phi(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld.

Man zeige, daß in Kugelkoordinaten entspr. der Bezeichnungsweise von Abschnitt 4.3.2 der Vorlesung

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} \Phi)^r &= \frac{\partial}{\partial r} \Phi, \\ (\operatorname{grad} \Phi)^\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi, \\ (\operatorname{grad} \Phi)^\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Man schreibe die senkrechte Komponente der Summe aller Oberflächenkräfte als Oberflächenintegral und wende darauf den Satz von GAUSS an.

gilt.

**Übungsaufgabe 67** Sei  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Man zeige, daß in Kugelkoordinaten entsprechend der Bezeichnungsweise von Abschnitt 4.3.2 der Vorlesung

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{j})^r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\varphi) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\vartheta, \\(\operatorname{rot} \mathbf{j})^\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\varphi), \\(\operatorname{rot} \mathbf{j})^\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^r\end{aligned}$$

gilt<sup>22</sup> und diskutiere dieses Ergebnis speziell für Radialfelder im Zusammenhang mit Aufgabe 53.

**Übungsaufgabe 68** Sei  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Man zeige, daß in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi$$

gilt<sup>23</sup> und bestimme daraus das allgemeinste Zentralfeld, das im Gebiet  $\mathbf{x} \neq 0$  stetig differenzierbar und quellfrei ist.

**Übungsaufgabe 69** Sei  $\Phi(\mathbf{x})$  ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld.

Man zeige, daß in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 (r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi$$

gilt, wobei  $\Phi = \Phi(\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi))$  natürlich als Funktion von  $r, \vartheta, \varphi$  aufzufassen ist.<sup>24</sup>

**Übungsaufgabe 70**

Version vom 26. März 2009

<sup>22</sup>Man verwende Folgerung 4.3.9 der Vorlesung und die Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung.

<sup>23</sup>Man verwende Folgerung 4.4.10 der Vorlesung und die entsprechenden Mittelwertsätze der Integralrechnung.

<sup>24</sup>Man beachte die Ergebnisse der Aufgaben 66 und 68.

a) Man zeige, daß zu jedem (hinz. gutart.) Vektorfeld  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  genau ein **lineares** Vektorfeld der Form

$$\mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} j_1^1 & j_1^2 & j_1^3 \\ j_2^1 & j_2^2 & j_2^3 \\ j_3^1 & j_3^2 & j_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

existiert, das  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  für kleine  $\mathbf{x}$  im Sinne von

$$\sup_{0 < \|\mathbf{x}\| < 1} \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{x}) - (\mathbf{j}(0) + \mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}))|}{|\mathbf{x}|^2} < \infty$$

approximiert.<sup>25</sup>

b) Man zeige, daß die Rotation von  $\mathbf{j}_{\text{lin}}$  genau dann verschwindet, wenn

$$j^k_l = j^l_k \quad \forall l, k \in \{1, 2, 3\}.$$

c) Man zeige:<sup>26</sup>

$$j^k_l = -j^l_k \quad \forall l, k \in \{1, 2, 3\} \quad \iff \quad \mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{j})(0) \times \mathbf{x}.$$

**Übungsaufgabe 71** Man zeige die Gültigkeit der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen in ganz  $\mathbb{C}$  für  $f(z) = z$  und  $f(z) = e^z$  und bestimme die komplexen Ableitungen.

**Übungsaufgabe 72** Für beliebiges ganzzahliges  $n$  bestimme man — unter Voraussetzung der elementaren komplexen Differentiationsregeln — das Holomorphiegebiet und die komplexe Ableitung von

1.  $f(z) = z^n$ ,
2.  $f(z) = \exp(z^n)$ .

**Übungsaufgabe 73** Für beliebig vorgegebene  $\mathcal{R}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  zeige man:

a) Im Falle  $\Re(\mathcal{R}^2) > 0$  gilt

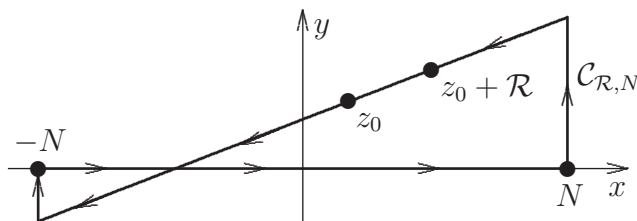
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{R}, N}} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx \quad (\text{C.10})$$

<sup>25</sup>Man wende die TAYLOR-Entwicklung auf  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  bei  $\mathbf{x} = 0$  an.

<sup>26</sup>Vgl. Gl. (4.33) der Vorlesung.



für die geschlossenen Wege  $\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}$  gemäß folgender Skizze:



b) Daraus folgt mit dem CAUCHYSchen Integralsatz:<sup>27</sup>

$$\Re(\mathcal{R}^2) > 0 < \Re(\mathcal{R}) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{R}}.$$

**Übungsaufgabe 74** Man zeige, daß zu jedem  $\psi \in \mathbb{R}$  eine in  $\mathbb{Z} \setminus S_\psi$  holomorphe Funktion  $\text{sqrt}_\psi(z)$  existiert, für die

$$(\text{sqrt}_\psi(z))^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S_\psi$$

gilt, wobei  $S_\psi$  den *Schnitt*

$$S_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \psi \bmod 2\pi\}$$

bezeichnet.

**Übungsaufgabe 75** Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(z_0) \notin \{+1, -1\}$  bestimme man mithilfe des Residuensatzes das (*uneigentliche*) Integral<sup>28</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{e^{+i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{e^{+i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} dx.$$

**Übungsaufgabe 76** Man diskutiere für reelles  $\psi$  jeweils die Umkehrfunktion  $\ln_\psi(z)$  der auf

$$\mathcal{O}_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (\psi - 2\pi, \psi)\}$$

eingeschränkten Exponentialfunktion und die entsprechende Verallgemeinerung der üblichen Definition

$$a^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln(a)} \quad \forall b \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>27</sup>**Hinweis:** Zunächst bestimme man das Integral für den Spezialfall  $\mathcal{R} = 1, z_0 = 0$  durch Umformung in die Quadratwurzel eines Flächenintegrals.

<sup>28</sup>**Hinweis:** Man beachte:

$$\frac{1}{(x+z_0)^2+1} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x+z_0-i} - \frac{1}{x+z_0+i} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Übungsaufgabe 77** Gegeben sei ein Polynom  $Q(z)$   $n$ -ten Grades mit den paarweise verschiedenen (also **einfachen**) Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  und ein Polynom  $P(z)$  kleineren Grades.

a) Man zeige mithilfe des Fundamentalsatzes der Algebra, daß die durch

$$Q_\nu(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q(z)}{z - z_\nu} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \nu \in \{1, \dots, n\}$$

definierten Funktionen  $Q_1, \dots, Q_n$  linear unabhängige Polynome  $(n - 1)$ -ten Grades sind.<sup>29</sup>

b) Man zeige damit die Gültigkeit der **Partialbruchzerlegung**

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{P(z_\nu)}{Q'(z_\nu)} \frac{1}{z - z_\nu} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

c) Man bestimme explizit die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{z^2 + z_4}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}.$$

**Übungsaufgabe 78** Sei  $t_0 > 0$ . Man zeige, daß die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{|x(t)|^2}{t_0 x_0}$$

zur Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 > 0$$

eindeutig ist und sich **nicht** über das Zeitintervall  $-\infty < t < t_0$  hinaus stetig differenzierbar fortsetzen läßt.<sup>30</sup>

Man gebe dafür eine ‘physikalische’ Erklärung.

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>**Linear unabhängig** meint, daß

$$\left( \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu Q_\nu(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \right) \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  gilt.

<sup>30</sup>**Hinweis:**  $\dot{x} x^{-2}$  läßt sich leicht integrieren.

**Übungsaufgabe 79** Seien  $t_e > 0$  eine vorgegebene Zeiteinheit,  $\omega > 0$  eine Kreisfrequenz und

$$\hat{M} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1/t_e \\ -\omega^2 t_e & 0 \end{pmatrix}.$$

Man zeige:

- a) Für jede Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (\text{C.11})$$

(des 1-dimensionalen, freien, ungedämpften, harmonischen Oszillators) ist

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t_e \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der vektoriellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ t_e \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} x(t) \\ t_e \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

- b) Für jede Lösung  $\mathbf{X}(t)$  von (C.12) ist  $x(t) = X^1(t)$  eine Lösung von (C.11).

- c) Mit

$$e^{\hat{M}t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \hat{M}^{\nu} t^{\nu} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=}} e^{\hat{M}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} } e^{\hat{M}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega t_e \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}_2(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t_e} \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- d)  $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t)\}$  ist ein fundamentales Lösungssystem von (C.12).

- e) Für jede 2-mal stetig differenzierbare Lösungen  $x(t)$  von (C.11) gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ t_e \dot{x}(t) \end{pmatrix} &= e^{\hat{M}t} \begin{pmatrix} x(0) \\ t_e \dot{x}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega t_e} \\ -\omega t_e \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ t_e \dot{x}(0) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 80** Man bestimme die potentielle Energie einer idealen Feder als Funktion der Federkonstanten und der Stärke der angreifenden Kraft. Man diskutiere den Grenzfall  $\kappa \rightarrow \infty$  im Hinblick auf den Energiesatz für (nahezu) starre Körper.

**Übungsaufgabe 81** Gegeben sei ein elastischer Draht der Länge  $L_0$  im entspannten Zustand. Mit dem (konstanten) **Elastizitätsmodul**  $E_0$  gelte das **HOOKEsche Gesetz**:

$$F_1 = E_0 \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

für die Kraft  $F_1$ , die jeweils nötig ist, um den Draht auf die Länge  $L_1$  zu dehnen. Man zeige, daß für die Kraft  $\Delta F$ , die zusätzlich aufzuwenden ist, um den Draht auf die Gesamtlänge  $L_1 + \Delta L$  zu dehnen, das HOOKEsche Gesetz

$$\Delta F = E_1 \frac{\Delta L}{L_1}$$

mit dem geänderten Elastizitätsmodul

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} E_0 \frac{L_1}{L_0} = F_1 + E_0$$

gilt.

**Übungsaufgabe 82** An einer homogenen Feder der Masse  $m$ , der Länge  $L_0$  (im entspannten Zustand) und dem Elastizitätsmodul  $E_0$  (**HOOKEsches Gesetz**:  $\Delta F = E_0 \frac{\Delta L}{L_0}$ ) hänge eine Masse  $M$ . Die Auslenkung desjenigen Federpunktes, der im entspannten Zustand den Abstand  $l$  von der Aufhängung hat, sei  $\xi(l, t)$  (Abstand zur Zeit  $t$  also  $l + \xi(l, t)$ ).

a) Man zeige, daß  $\xi(l, t)$  der inhomogenen Wellengleichung

$$\ddot{\xi}(l, t) - \frac{E_0 L_0}{m} \xi''(l, t) = g$$

mit den Randbedingungen

$$\xi(0, t) = 0, \quad \left( M \ddot{\xi}(l, t) + E_0 \xi'(l, t) \right) \Big|_{l=L_0} = Mg$$

genügt.

b) Man zeige, daß

$$\xi_{\text{part}}(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{mg}{2E_0 L_0} l^2 + \frac{m+M}{E_0} g l$$

eine (partikuläre) Lösung dieses Randwertproblems ist.

c) Man zeige daß

$$\xi(l, t) = f(l) h(t) + \xi_{\text{part}}(l, t).$$

genau dann eine zeitlich periodische Lösung des Randwertproblems von a) ist, wenn  $f(0) = 0$  ist und eine Kreisfrequenz  $\omega$  existiert mit

$$\ddot{h}(t) = -\omega^2 h(t), \quad f''(l) = -\frac{m}{E_0 L_0} \omega^2 f(l)$$

und

$$-M \omega^2 f(L_0) + E_0 f'(L_0) = 0.$$

d) Man zeige, daß im Falle  $m \ll M$  solche Lösungen tatsächlich existieren, wenn die entsprechende Kreisfrequenz  $\omega$  der Bedingung

$$\omega \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \tan\left(\omega \sqrt{\frac{m}{\kappa}}\right) = \frac{m}{M}$$

genügt, wobei

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} E_0/L_0$$

die **Federkonstante** bezeichnet.

e) Man zeige, daß

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M + m_{\text{eff}}}}, \quad 0 < m_{\text{eff}} \ll M,$$

diese Bedingung erfüllt, wenn die **effektive Federmasse**  $m_{\text{eff}}$  einen ganz bestimmten Wert annimmt, der etwa<sup>31</sup>  $m/3$  beträgt.

<sup>31</sup>Man verwende die Näherung  $\tan \epsilon \approx \epsilon + \epsilon^3/3$  für  $|\epsilon| \ll 1$ .



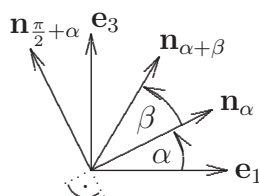
# Anhang D

## Lösungsvorschläge

Zu Aufgabe 1a): Die Gültigkeit von

$$\mathbf{n}_{\alpha+\beta} = \cos \beta \mathbf{n}_{\alpha} + \sin \beta \mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$$

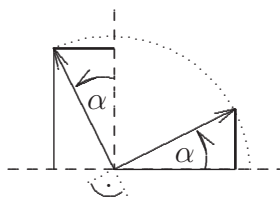
erkennt man aus folgender Skizze:



Zu Aufgabe 1b): Die Gültigkeit von

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

erkennt man aus folgender Skizze:



Aus

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha + \beta) \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{n}_{\alpha+\beta} \\ &= \cos \beta \underbrace{(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{n}_{\alpha}} + \sin \beta \underbrace{(-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\alpha}} \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \mathbf{e}_1 + (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Für  $\alpha = \beta$  liefert die vorletzte Gleichung

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \underbrace{\sin^2 \alpha}_{\substack{= \\ \text{PYTHAGORAS}} 1 - \cos^2 \alpha}$$

und somit

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

bzw.

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}.$$

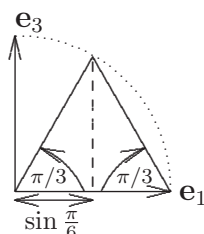
Ersetzt man in der letzten Gleichung  $\alpha$  durch  $\alpha/2$ , so ergibt sich schließlich

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

**Zu Aufgabe 2:** Die Gleichung

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

erkennt man unmittelbar aus folgender Skizze:



Mit

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}}$$

folgt daraus

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Daß aus dem Satz von PYTHAGORAS

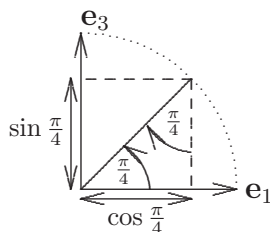
$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$$



und somit

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}}$$

folgt erkennt man leicht aus folgender Skizze:



Gemäß Aufgabe 1b) folgt daraus

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{2}}{2}}. \quad (\text{D.1})$$

Aus

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{3\pi}{8} &= \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

folgt außerdem

$$3 \cos^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{3\pi}{8} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$$

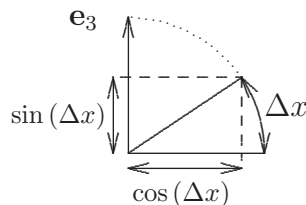
und daraus mit (D.1) schließlich:

$$\boxed{3 \cos^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}.}$$

**Zu Aufgabe 3a):** Die Gültigkeit der Ungleichung

$$(\Delta x)^2 \geq \sin^2(\Delta x) + (1 - \cos(\Delta x))^2$$

erkennt man aufgrund des Satzes von PYTHAGORAS leicht aus folgender Skizze:



Mit

$$\sin^2(\Delta x) + (1 - \cos(\Delta x))^2 = \underbrace{\sin^2(\Delta x) + \cos^2(\Delta x)}_{=1} - 2 \cos(\Delta x) + 1$$

folgt daraus

$$(\Delta x)^2 \geq 2 \left( 1 - \underbrace{\cos(\Delta x)}_{\leq 1} \right) \geq 0,$$

also

$$\frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{\Delta x}{2} \quad \forall \Delta x \neq 0$$

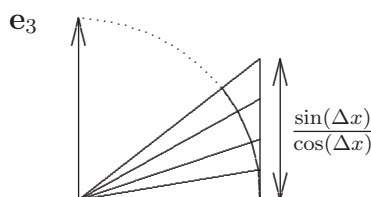
und somit

$$\boxed{\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0.}$$

**Zu Aufgabe 3b):** Die Ungleichung

$$\Delta x \leq \frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)}$$

wird durch polynomiale Approximation des Kreisbogens verständlich:



Daraus folgt

$$\frac{\Delta x - \sin(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}$$

und somit gemäß a)

$$\boxed{\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \sin(\Delta x)}{\Delta x} = 0}$$

bzw.

$$\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

**Zu Aufgabe 3c):** Die Aussage

$$\boxed{\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

folgt gemäß

$$\begin{aligned} \lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos x - \sin x}{\Delta x} \\ &\stackrel{1b)}{=} \underbrace{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\xrightarrow{b)} 1} \cos x + \sin x \underbrace{\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{\xrightarrow{a)} 0} \end{aligned}$$

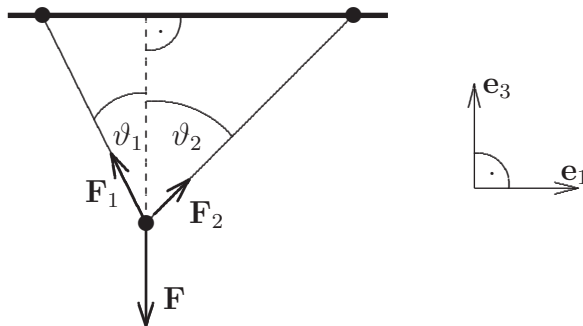
und die Aussage

$$\boxed{\lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

folgt gemäß

$$\begin{aligned} \lim_{0 \neq \Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} &= \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &\stackrel{1b)}{=} \cos x \underbrace{\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{\xrightarrow{a)} 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\xrightarrow{b)} 1}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 4a):** Das physikalische Problem läßt sich wie folgt skizzieren:



Dabei sind die *Seilspannungen*

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{F}_1|, \quad S_2 \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{F}_2|$$

aus der **Gleichgewichtsbedingung**

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

zu bestimmen.

Offensichtlich gilt

$$\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{F}_1 = S_1 \mathbf{n}_\alpha, \quad \mathbf{F}_2 = S_2 \mathbf{n}_\beta$$

mit

$$F \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{F}|, \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} + \vartheta_1, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} - \vartheta_2.$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung folgt daraus

$$F^1 \mathbf{e}_1 + F^3 \mathbf{e}_3 = -S_1 \mathbf{n}_\alpha - S_2 \mathbf{n}_\beta$$

für

$$F^1 = 0 \quad F^3 = -F, \quad \alpha - \beta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

und somit gemäß der angegebenen Regel schließlich:<sup>1</sup>

$$\boxed{S_1 = \frac{\sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} F, \quad S_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} F.} \quad (\text{D.2})$$

**Zu Aufgabe 4b):** Man sieht leicht:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = \vartheta_2 &\implies S_1 = S_2, \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ fest} &\implies S_1 = F \cos \vartheta_1, \quad S_2 = F \cos \vartheta_2, \\ \vartheta_1 \rightarrow 0 \neq \vartheta_2 &\implies S_1 \rightarrow F, \quad S_2 \rightarrow 0, \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 \rightarrow \pi &\implies S_1, S_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 5:** Wenn wir mit  $\mathbf{e}_Z$  den dimensionslosen Einheitsvektor bezeichnen, der längs der Stabachse vom Finger des Jongleurs weg ‘zeigt’, dann gilt gemäß Definition der Addition von Kräften

$$\lambda \mathbf{e} = \mathbf{F} + F_Z \mathbf{e}_Z, \quad (\text{D.3})$$

wobei:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{e} &= \mathbf{F}_{\text{ges}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe aller (äußeren) Kräfte,} \\ \text{die auf den Stab wirken,} \end{array} \right. \\ F_Z \mathbf{e}_Z &= \mathbf{F}_Z = \left\{ \begin{array}{l} \text{Kraft, die der Jongleur} \\ \text{auf den Stab ausübt,} \end{array} \right. \end{aligned}$$

für geeignete Kraftstärken  $\lambda, F_Z$ . Das entsprechende mathematische Problem ist hier also folgendes:

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Denn:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) \stackrel{\text{1b)}}{=} \mp \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup>Eine Bewegung längs  $\mathbf{e}$  ist nur für  $\mathbf{F} \propto \mathbf{e}$  möglich. Damit sich der Stab nicht dreht, muß außerdem  $\mathbf{F}_Z \propto \mathbf{e}_Z$  gelten.

Bestimme die Kraftstärke  $F_Z$  zu gegebenen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\mathbf{F}$  aus (D.3).

Das vorliegende mathematische Problem ergibt sich also — bis auf elementare vektorielle Umformung — aus demjenigen von Aufgabe 4a) durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} S_1 &\mapsto F_Z, \\ S_2 &\mapsto \lambda, \\ \vartheta_1 &\mapsto \alpha, \\ \vartheta_2 &\mapsto \beta. \end{aligned}$$

Dementsprechend ergibt sich aus (D.2) die Lösung

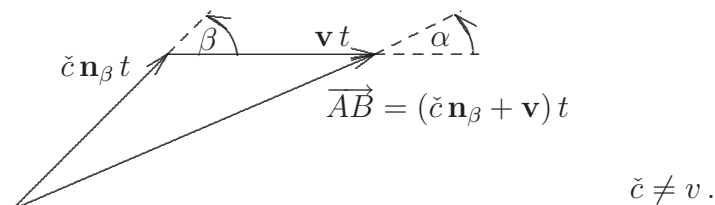
$$\underline{\underline{F_Z = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} F}}, \quad \lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} F.$$

**Anmerkung:** Der Fall  $F_Z < 0$  ist natürlich nur dann physikalisch realisierbar, wenn der Finger des Jongleurs am Stab 'klebt'.

**Zu Aufgabe 6a):**<sup>3</sup> Um möglichst schnell von  $A$  nach  $B$  zu gelangen, muß die Fähre natürlich geradlinig mit maximalem Geschwindigkeitsbetrag fahren. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{=|\overline{AB}|} \sin \alpha &= t \check{c} \sin \beta, \\ x \cos \alpha &= t \check{c} \cos \beta + vt \end{aligned} \tag{D.4}$$

gemäß folgender Skizze:



Es gilt also

$$\begin{aligned} t^2 \check{c}^2 &= (t \check{c} \sin \beta)^2 + (t \check{c} \cos \beta)^2 \\ &= x^2 \sin^2 \alpha + (x \cos \alpha - vt)^2 \end{aligned} \tag{D.4}$$

und somit

$$t^2 \underbrace{(\check{c}^2 - v^2)}_{\hat{=}a} + t \underbrace{2cv \cos \alpha}_{\hat{=}p} \underbrace{-x^2}_{\hat{=}q} = 0.$$

Gemäß Lösungshinweis folgt daraus

$$t = \frac{1}{\check{c}^2 - v^2} \left( -xv \cos \alpha \pm \sqrt{(xv \cos \alpha)^2 + x^2 (\check{c}^2 - v^2)} \right)$$

und somit schließlich

$$t = \begin{cases} -\frac{xv \cos \alpha}{\check{c}^2 - v^2} + \sqrt{\frac{x^2}{\check{c}^2 - v^2} + \left(\frac{xv \cos \alpha}{\check{c}^2 - v^2}\right)^2} & \text{für } c > v, \\ -\frac{xv \cos \alpha}{\check{c}^2 - v^2} - \sqrt{\frac{x^2}{\check{c}^2 - v^2} + \left(\frac{xv \cos \alpha}{\check{c}^2 - v^2}\right)^2} & \text{für } c < v. \end{cases}$$

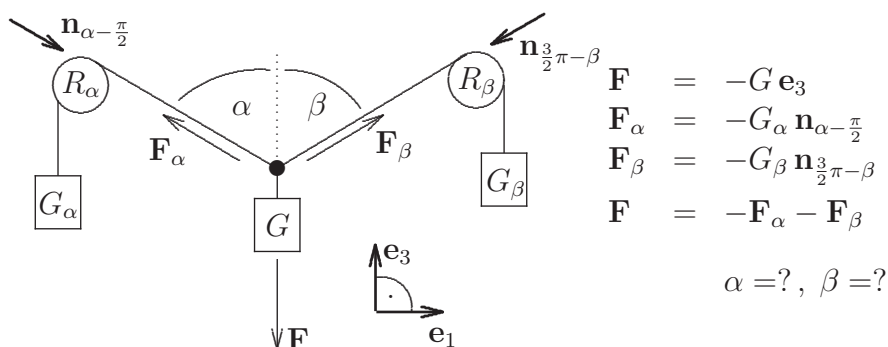
**Zu Aufgabe 6b):** Die Fahrzeit ist natürlich für  $\beta = \pi/2$  minimal, d.h. nach (D.4) für

$$\begin{aligned} x \sin \alpha &= t \check{c}, \\ x \cos \alpha &= t v \end{aligned}$$

bzw.

$$v = c \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Zu Aufgabe 7a):** Das physikalische Problem läßt sich wie folgt skizzieren:



Das entsprechende mathematische Problem ist:

Bestimme die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  aus der Gleichung

$$-G \mathbf{e}_3 = G_\alpha \mathbf{n}_{\alpha - \frac{\pi}{2}} + G_\beta \mathbf{n}_{\frac{3}{2}\pi - \beta} \quad (\text{D.5})$$

zu gegebenen  $G, G_\alpha, G_\beta$ .

Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\alpha - \frac{\pi}{2}} &= \sin \alpha \mathbf{e}_1 - \cos \alpha \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{n}_{\frac{3}{2}\pi - \beta} &= -\sin \beta \mathbf{e}_1 - \cos \beta \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

folgt aus (D.5):

$$G_\alpha \sin \alpha = G_\beta \sin \beta, \quad (\text{D.6})$$

$$G = G_\alpha \cos \alpha + G_\beta \cos \beta. \quad (\text{D.7})$$

Mit

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha, \quad y \stackrel{\text{def}}{=} \cos \beta$$

und

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (\text{D.8})$$

geht das Gleichungssystem (D.6),(D.7) in

$$\begin{aligned} G_\alpha^2 (1 - x^2) &= G_\beta^2 (1 - y^2), \\ G &= G_\alpha x + G_\beta y \end{aligned}$$

über. Daraus folgen z.B. die Gleichung

$$\begin{aligned} G_\beta^2 y^2 &= (G_\beta^2 - G_\alpha^2) + G_\alpha^2 x^2, \\ G_\beta^2 y^2 &= (G - G_\alpha x)^2, \end{aligned}$$

die — voneinander subtrahiert —

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{G^2 - (G_\beta^2 - G_\alpha^2)}{2 G G_\alpha}} \quad (\text{D.9})$$

ergeben. Aus Symmetriegründen muß entsprechend

$$\boxed{\cos \beta = \frac{G^2 - (G_\alpha^2 - G_\beta^2)}{2 G G_\beta}} \quad (\text{D.10})$$

gelten.

**Zu Aufgabe 7b):** Wegen

$$\cos \alpha, \cos \beta \in [0, 1)$$

folgt aus (D.7) unmittelbar

$$\boxed{G < G_\alpha + G_\beta}. \quad (\text{D.11})$$

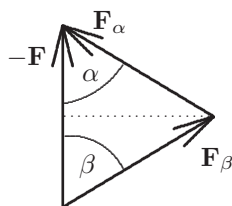
Da  $x$  und  $y$  nicht negativ sind, folgt aus (D.9) und (D.10) andererseits

$$\boxed{G^2 > |G_\alpha^2 - G_\beta^2|}. \quad (\text{D.12})$$

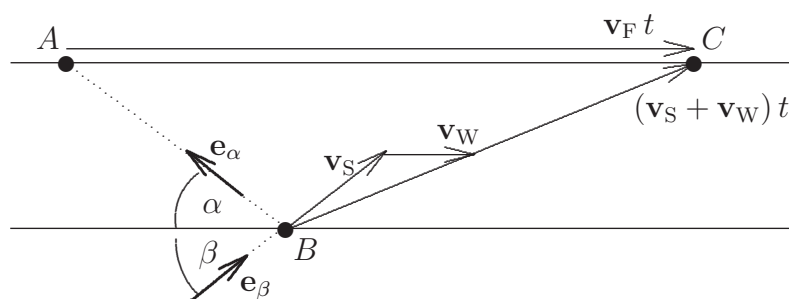
Umgekehrt sieht man leicht, daß im Falle der Gültigkeit von (D.11) und (D.12) die Gleichungen (D.9) und (D.10) mit Winkeln  $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$  erfüllt sind, für die (D.5) gilt. Das gewünschte Gleichgewicht<sup>4</sup> ist also genau dann möglich wenn die Gewichte die Ungleichungen (D.11) und (D.12) und erfüllen.

<sup>4</sup>Mit etwas mehr Aufwand ließe sich zeigen, daß das Gleichgewicht stabil ist.

**Anmerkung:** Mit geübtem Blick lassen sich die Ergebnisse zu Aufgabe 7b) auch direkt der folgenden Schnell-Lösungsskizze entnehmen:



**Zu Aufgabe 8:** Wenn wir mit  $\mathbf{v}_S$  die Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser und mit  $\mathbf{v}_W$  resp.  $\mathbf{v}_F$  die Geschwindigkeit des Wassers resp. des Fußgängers relativ zum Ufer bezeichnen, dann läßt sich die gewünschte physikalische Situation wie folgt skizzieren:



Dabei gilt also

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

mit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} &= l \mathbf{e}_\alpha, \\ \overrightarrow{AC} &= v_F t \mathbf{e}_1, \\ \overrightarrow{BC} &= (v_S \mathbf{e}_\beta + v_W \mathbf{e}_\alpha) t\end{aligned}$$

für geeignete  $t, l$ . Das mathematische Problem lautet also:

Bestimme den Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  aus der Gleichung

$$l \underbrace{(-\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{e}_\alpha} + v_F t \mathbf{e}_1 = \left( v_S \underbrace{(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{e}_\beta} + v_W \mathbf{e}_1 \right) t. \quad (\text{D.13})$$

zu den vorgegeben  $v_F, v_W, v_S$ .

Aus (D.13) folgt mit den üblichen Umformungen

$$(-l \cos \alpha + v_F t - v_S \cos \beta t - v_W t) \mathbf{e}_1 + (l \sin \alpha - v_S t \sin \beta) \mathbf{e}_3 = 0$$



und somit

$$\begin{aligned} \frac{l}{t} \cos \alpha &= v_S \cos \beta + (v_W - v_F), \\ \frac{l}{t} &= v_S \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

also

$$\cot \alpha = \cot \beta + \frac{v_W - v_F}{v_S \sin \beta}. \quad (\text{D.14})$$

Mit

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \sin \beta$$

folgt aus (D.14) für die vorgegebenen Werte

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{2x}$$

und somit

$$1 + 2x \cot \alpha = 2\sqrt{1-x^2}.$$

Durch Quadrieren beider Seiten und elementare Umformung ergibt sich weiter

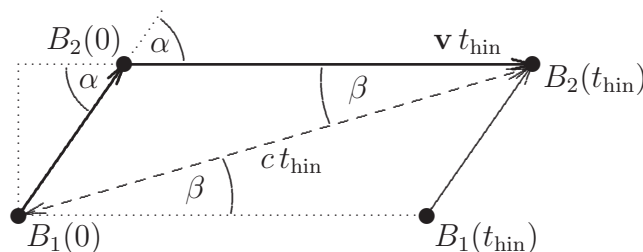
$$x^2 + \frac{\cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} x - \frac{3}{4(1 + \cot^2 \alpha)} = 0$$

und somit schließlich

$$\boxed{\sin \beta = -\frac{1}{2} \frac{\cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \sqrt{\frac{3}{4(1 + \cot^2 \alpha)} - \frac{1}{4} \left( \frac{\cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \right)^2}}. \quad (\text{D.15})$$

**Probe:** Im Falle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sollte  $\cos \beta = \frac{v_F - v_W}{v_S} = \frac{1}{2}$  gelten. Im Einklang damit liefert (D.15) in diesem Falle  $\sin \beta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ .

**Zu Aufgabe 9:** Zunächst wollen wir die Zeit  $t_{\text{hin}}$  bestimmen, die  $C$  benötigt, um  $B_2$  von  $B_1$  aus zu erreichen:



Mit  $B_j(t)$  sei jeweils der Ort bezeichnet, an dem sich  $B_j$  zur Zeit  $t$  befindet. Für

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{B_1(0)B_2(0)}$$

gilt dann

$$t_{\text{hin}} c \sin \beta = |\mathbf{x}| \sin \alpha, \quad (\text{D.16})$$

$$t_{\text{hin}} c \cos \beta = |\mathbf{x}| \cos \alpha + |\mathbf{v}| t_{\text{hin}} \quad (\text{D.17})$$

und somit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2 \cos^2 \alpha + 2 |\mathbf{x}| t_{\text{hin}} |\mathbf{v}| \cos \alpha + t_{\text{hin}}^2 |\mathbf{v}|^2 & \stackrel{(\text{D.17})}{=} t_{\text{hin}}^2 c^2 \cos^2 \beta \\ & = t_{\text{hin}}^2 c^2 (1 - \sin^2 \beta) \\ & \stackrel{(\text{D.16})}{=} t_{\text{hin}}^2 c^2 - |\mathbf{x}|^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Mit  $|\mathbf{x}| |\mathbf{v}| \cos \alpha = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$  und (D.8) folgt daraus

$$\left( t_{\text{hin}} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} \right)^2 = \frac{|\mathbf{x}|^2}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} + \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} \right)^2. \quad (\text{D.18})$$

$C$  kann seine Aufgabe natürlich nur dann erfüllen, wenn

$$\boxed{c > |\mathbf{v}|}$$

gilt und dann folgt aus (D.18)

$$t_{\text{hin}} = \underbrace{\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} + \sqrt{\frac{|\mathbf{x}|^2}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} + \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} \right)^2}}_{>0}.$$

Man sieht leicht, daß die Zeit  $t_{\text{rück}}$ , die  $C$  benötigt, um  $B_1$  aus wieder zu  $B_2$  zurückzukommen, dadurch ergibt, daß man  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$  durch  $-\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$  ersetzt. Für

$$t_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} t_{\text{hin}} + t_{\text{rück}}$$

ergibt sich damit

$$t_{\text{ges}} = 2 \sqrt{\frac{|\mathbf{x}|^2}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} + \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2 - |\mathbf{v}|^2} \right)^2},$$

also

$$\boxed{t_{\text{ges}} = 2 \frac{|\mathbf{x}|}{c} \frac{\sqrt{1 - \left( \frac{|\mathbf{v}|}{c} \sin \alpha \right)^2}}{1 - \left( \frac{|\mathbf{v}|}{c} \right)^2}}.$$

**Anmerkung:** Man beachte die Analogie zum MICHELSON-MORLEY-Experiment:

- $B_1 \hat{=}$  Lichtquelle im Labor.
- $B_2 \hat{=}$  Spiegel im Labor.
- $C \hat{=}$  Lichtwellenzug.
- $\mathbf{v} \hat{=}$  Geschwindigkeit des Labors relativ zum *Äther*

(siehe z.B. Abschnitt 1.1.2 von (Lücke, rel)).

**Zu Aufgabe 10a):** (V1) folgt gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2 &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_2) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_1)\right) \\ &= \mathbf{v}_2 \hat{+} \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

(V2) folgt gemäß

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2) \hat{+} \mathbf{v}_3 &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_3)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)\right) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_3)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_2) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_3)\right)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2 \hat{+} \mathbf{v}_3)\right) \\ &= \mathbf{v}_1 \hat{+} (\mathbf{v}_2 \hat{+} \mathbf{v}_3). \end{aligned}$$

(V3)–(V5) gelten unverändert. (V6) folgt gemäß

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mathbf{v}) \hat{+} (\lambda_2 \mathbf{v}) &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\lambda_1 \mathbf{v}) + \mathcal{N}(\lambda_2 \mathbf{v})\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\left(\lambda_1 \mathcal{N}(\mathbf{v})\right) + \left(\lambda_2 \mathcal{N}(\mathbf{v})\right)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \mathcal{N}(\mathbf{v})\right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v})\right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

(V7) folgt gemäß

$$\begin{aligned} \lambda (\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2) &= \lambda \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\lambda \left(\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)\right)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\lambda \mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \lambda \mathcal{N}(\mathbf{v}_2)\right) \\ &= \mathcal{N}^{-1}\left(\mathcal{N}(\lambda \mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\lambda \mathbf{v}_2)\right) \\ &= \lambda \mathbf{v}_1 \hat{+} \lambda \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 10b):** Die Behauptung folgt Dank der Rückeindeutigkeit von  $\mathcal{N}$  gemäß

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2 \iff \mathcal{N}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2)$$

mit

$$\mathcal{N}(\mathbf{v}_1 \hat{+} \mathbf{v}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{v}_2) .$$

**Zu Aufgabe 10c):** Wegen

$$\mathbf{v} \neq 0 \implies \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \leq \underbrace{|\mathbf{e}|}_{=1} \left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right|$$

gilt

$$\mathbf{v} \neq 0 \implies \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \neq 0 ,$$

also

$$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = 0 \implies \mathbf{v} = 0 .$$

Für  $\mathbf{v}_1 \neq 0 \neq \mathbf{v}_2$  gilt andererseits

$$0 \neq \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_j) \propto \mathbf{v}_j \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

und somit

$$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_1) = \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_2) \implies \mathbf{v}_1 \propto \mathbf{v}_2 \implies \left| \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right| = \underbrace{\left| \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \right|}_{\leq 1} .$$

Daraus folgt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_1) = \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_2) \implies \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 .$$

$\mathcal{N}_{\mathbf{e}}$  ist also rückeindeutig. Die Gleichung

$$\underline{\mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})}$$

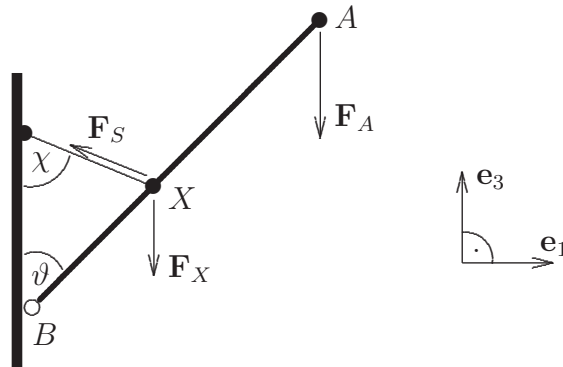
folgt direkt aus der Definition von  $\mathcal{N}_{\mathbf{e}}$  mit

$$\mathbf{v} \neq 0 \implies \left| \mathbf{e} \cdot \frac{\lambda \mathbf{v}}{|\lambda \mathbf{v}|} \right| = \left| \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| .$$

Daß  $\mathcal{N}_{\mathbf{e}}$  nicht additiv ist, erkennt man z.B. aus

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathbf{v}_1 \propto \mathbf{e} , \quad 0 \neq \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{e} \\ \implies \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \left( 2 - \left| \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|} \right| \right) (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_2) + \underbrace{\mathbf{v}_1 - \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}_{\neq 0} . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 11: Das physikalische Problem läßt sich wie folgt skizzieren:



Dabei läßt sich die Seilspannung  $S = |\mathbf{F}_S|$  aus der **Drehmomentbilanz**

$$\overrightarrow{BX} \times (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_X) + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}_A = 0 \quad (\text{D.19})$$

bzgl. des Drehpunktes  $B$  bestimmen:

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= -F_A \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{F}_X &= -F_X \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{F}_S &= S \mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\chi} = S (-\sin \chi \mathbf{e}_1 + \cos \chi \mathbf{e}_3), \\ \overrightarrow{BX} &= \underbrace{L_1}_{\stackrel{\text{def}}{=}|\overrightarrow{BX}|} \mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}-\vartheta} = L_1 (\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3), \\ \overrightarrow{BA} &= \underbrace{L_2}_{\stackrel{\text{def}}{=}|\overrightarrow{BA}|} \mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}-\vartheta} = L_2 (\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

ist nämlich (D.19) äquivalent zu

$$\left. \begin{aligned} L_1 (\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3) \times \left( -S \sin \chi \mathbf{e}_1 + (S \cos \chi - F_X) \mathbf{e}_3 \right) \\ + L_2 (\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3) \times (-F_A \mathbf{e}_3) \end{aligned} \right\} = 0,$$

was wegen

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0$$

wiederum äquivalent ist zu

$$-L_1 \sin \vartheta (S \cos \chi - F_X) - L_1 \cos \vartheta S \sin \chi + L_2 F_A \sin \vartheta = 0.$$

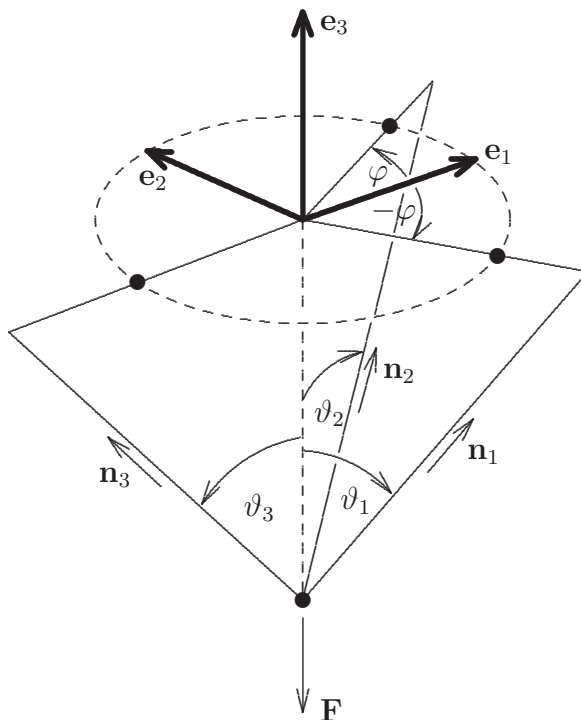
Daraus folgt

$$-L_1 S \sin (\vartheta + \chi) + L_1 F_X \sin \vartheta + L_2 F_A \sin \vartheta = 0$$

(Hebelgesetz) und somit schließlich

$$S = \frac{\sin \vartheta}{\sin(\vartheta + \chi)} \frac{|\overline{BX}| |\mathbf{F}_X| + |\overline{BA}| |\mathbf{F}_A|}{|\overline{BX}|}.$$

**Zu Aufgabe 12a):** Die physikalische Situation läßt sich wie folgt skizzieren:



Die Spannung  $S_3$  des in Richtung  $\mathbf{n}_3$  gespannten Seils ergibt sich aus der **Gleichgewichtsbedingung**

$$S_1 \mathbf{n}_1 + S_2 \mathbf{n}_2 + S_3 \mathbf{n}_3 + \mathbf{F} = 0$$

durch Bildung des inneren Produkts mit  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ :

$$S_3 (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = -(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{D.20})$$

Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \sin \varphi \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_2 \sin \varphi \cos \vartheta_1 \\ \dots \\ \sin \vartheta_1 \cos \varphi \sin \vartheta_2 \sin \varphi + \sin \vartheta_2 \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \dots \\ 2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi \end{pmatrix} \sin \varphi \end{aligned}$$

folgt

$$(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \sin \vartheta_3 \sin \varphi + 2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi \cos \vartheta_3 \sin \varphi$$

sowie

$$(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{F} = -2 |\mathbf{F}| \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi \sin \varphi$$

und somit aus (D.20)

$$S_3 = \frac{|\mathbf{F}| \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \sin \vartheta_3}$$

(im Einklang mit dem Resultat von Abschnitt 1.3.3 der Vorlesung).

**Zu Aufgabe 12b):**

1. Im Grenzfall  $\vartheta_3 \rightarrow 0$  ergibt sich  $S_3 = |F|$ , d.h. Seil 3 trägt die gesamte Last — wie zu erwarten.
2. Für  $\varphi = 0$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{|\mathbf{F}| \sin^2 \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_1 \cos \vartheta_3 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3} \\ &= \frac{|\mathbf{F}| \sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_3)}. \end{aligned}$$

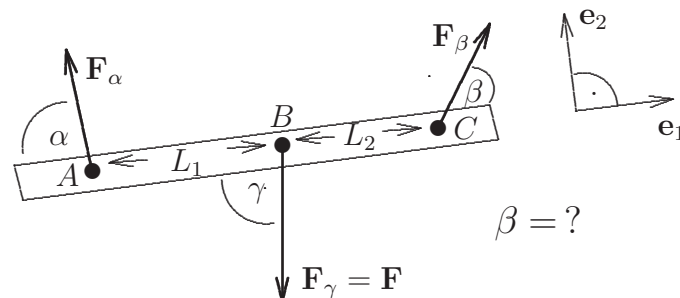
Das entspricht dem Ergebnis von Aufgabe 4a) (mit  $\vartheta_3$  statt  $\vartheta_2$ ), weil jetzt die Seile 1 und 2 wie ein einziges Seil wirken.

3. Im Falle  $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich

$$S_3 = \frac{2 |\mathbf{F}| \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Bei konstantem  $\cos \varphi \neq 0$  konvergiert das — wie zu erwarten — für  $\vartheta_1, \vartheta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  gegen Unendlich.

**Zu Aufgabe 13:** Hier seien die Richtungsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  gemäß folgender Skizze gewählt:



Die Gleichgewichtsbedingungen lauten gemäß 2.2.3:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\beta + \mathbf{F}_\gamma &= 0, \\ \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}_\alpha + \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F}_\beta &= 0 \quad (\text{„Hebelgesetz“ bzgl. } B). \end{aligned}$$

Mit

$$F_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{F}_\alpha|, \quad \mathbf{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{F}_\alpha}{F_\alpha}$$

und entsprechenden Definitionen für  $\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma$  lautet das mathematische Problem hier also:

Bestimme  $\beta$  zu vorgegebenen  $\alpha, \gamma, L_1, L_2, F_\gamma$  aus den Gleichungen

$$F_\alpha \mathbf{e}_\alpha + F_\beta \mathbf{e}_\beta + F_\gamma \mathbf{e}_\gamma = 0, \quad (\text{D.21})$$

$$(-L_1 \mathbf{e}_1) \times (F_\alpha \mathbf{e}_\alpha) + (L_2 \mathbf{e}_1) \times (F_\beta \mathbf{e}_\beta) \quad (\text{D.22})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha &= -\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\beta &= +\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\gamma &= -\cos \gamma \mathbf{e}_1 - \sin \gamma \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Zunächst folgt aus (D.21) und (D.23)

$$(F_\beta \cos \beta - F_\alpha \cos \alpha - F_\gamma \cos \gamma) \mathbf{e}_1 + (F_\alpha \sin \alpha + F_\beta \sin \beta - F_\gamma \sin \gamma) \mathbf{e}_2 = 0$$

und somit

$$F_\beta \cos \beta = F_\alpha \cos \alpha + F_\gamma \cos \gamma, \quad (\text{D.24})$$

$$F_\gamma \sin \gamma = F_\alpha \sin \alpha + F_\beta \sin \beta. \quad (\text{D.25})$$

Aus (D.22) und (D.23) folgt andererseits

$$(-L_1 \mathbf{e}_1) \times (F_\alpha \sin \alpha \mathbf{e}_2) + (L_2 \mathbf{e}_1) \times (F_\beta \sin \beta \mathbf{e}_2) = 0$$

und somit

$$L_1 \sin \alpha F_\alpha = L_2 \sin \beta F_\beta. \quad (\text{D.26})$$

Aus (D.25) und (D.26) folgt daraus

$$F_\gamma \sin \gamma = F_\alpha \sin \alpha + \frac{L_1}{L_2} F_\alpha \sin \alpha,$$

also

$$F_\alpha = \frac{F_\gamma \sin \gamma}{\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) \sin \alpha}, \quad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$



Daraus folgt mit (D.26) resp. (D.24)

$$F_\beta \sin \beta = \frac{L_1}{L_2} \frac{F_\gamma \sin \gamma}{1 + \frac{L_1}{L_2}}$$

resp.

$$F_\beta \cos \beta = F_\gamma \left( \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{1 + \frac{L_1}{L_2}} \cot \alpha \right).$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt schließlich

$$\tan \beta = \frac{L_1}{L_2} \frac{1}{\cot \alpha + \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) \cot \gamma}.$$

**Anmerkungen:**

1. Die Unabhängigkeit des Winkels  $\beta$  von  $F_\gamma$  ist auch direkt aus (D.21),(D.22) ablesbar.
2. Für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $L_1 = L_2$  ergibt sich erwartungsgemäß  $\beta = \alpha$ .

**Zu Aufgabe 14:** Dank der Eigenschaften des Vektorprodukts gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \sum_{j,k=1}^3 A^j B^k \mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_k \\ &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 A^j B^k \mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_k \\ &= (A^1 B^2 - A^2 B^1) \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 + (A^1 B^3 - A^3 B^1) \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_3 \\ &\quad + (A^2 B^3 - A^3 B^2) \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 + \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} = \begin{pmatrix} A^2 B^3 - A^3 B^2 \\ A^3 B^1 - A^1 B^3 \\ A^1 B^2 - A^2 B^1 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3)$$

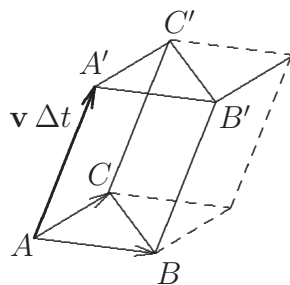
für die Vektoren

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}, \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}, \quad \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}$$

der in (2.29) definierten **reziproken** Basis.

**Zu Aufgabe 15:** Die Teile des Mediums, die zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \Delta t > t$  durch das Dreieck mit den Eckpunkten  $A, B, C$  hindurchtreten, nehmen zur

Zeit  $t + \Delta t$  den halben Spat mit den Eckpunkten  $A, B, C, A', B', C'$  gemäß folgender Skizze ein:



Dieses Gebiet hat das Volumen

$$\left| (\mathbf{v} \Delta t) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \Delta t| .$$

Der gesuchte Strom ist somit

$$J = \frac{\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \Delta t)}{\Delta t} ,$$

also

$$\boxed{J = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}}$$

— bei entsprechender Vorzeichenkonvention.

**Zu Aufgabe 16:** Die Behauptung

$$\mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_4 = 0 \tag{D.27}$$

folgt z.B. aus

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{S}_1 &= \overrightarrow{P_2 P_3} \times \overrightarrow{P_2 P_4} \\ &= (\overrightarrow{P_1 P_3} - \overrightarrow{P_1 P_2}) \times (\overrightarrow{P_1 P_4} - \overrightarrow{P_1 P_2}) \\ &= \underbrace{\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_4}}_{=-2 \mathbf{S}_2} - \underbrace{\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_4}}_{=2 \mathbf{S}_3} - \underbrace{\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_2}}_{=2 \mathbf{S}_4} + \underbrace{\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_2}}_{=0} . \end{aligned}$$

Physikalisch läßt sich das folgendermaßen interpretieren:

Bei einer konstanten, homogenen Strömung mit der Stromdichte  $\mathbf{j}$  muß alle Substanz, die durch eine Dreiecksfläche — etwa die durch  $P_1, P_2, P_3$  gegebene — eintritt, durch die anderen Dreiecksflächen wieder austreten. Dementsprechend muß

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{S}_4 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}_3 \quad \forall \mathbf{j} ,$$

also

$$\mathbf{j} \cdot (\mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_4) = 0 \quad \forall \mathbf{j}$$

gelten, woraus (D.27) folgt.

Zu Aufgabe 17: Für

$$z_j = \underbrace{A_j}_{>0} e^{i\varphi_j}, \quad \varphi_j \in \mathbb{R},$$

gilt

$$z_1 + z_2 = e^{i\varphi_1} (A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)})$$

und somit

$$\begin{aligned} \arg(z_1 + z_2) &= \varphi_1 + \arg(A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}) \bmod{2\pi} \\ &= \varphi_1 + \arctan\left(\frac{\Im(A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)})}{\Re(A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)})}\right) \bmod{\pi} \\ &= \varphi_1 + \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) \bmod{\pi} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}|^2 \\ &= (A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))^2 + (A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1))^2 \\ &= A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2. \end{aligned}$$

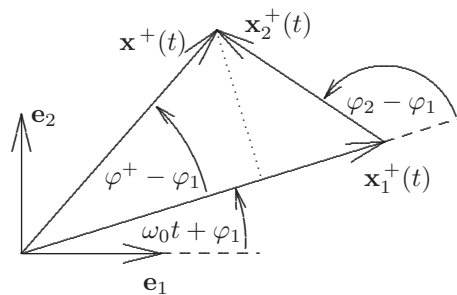
Mit

$$|z_j| = A_j, \quad \arg(z_j) = \varphi_j \bmod{2\pi}$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 18:** Die Behauptung folgt mit den entsprechenden Identifizierungen aus Aufgabe 17.

**Anmerkung:** Die Behauptung ist aber auch anschaulich leicht zu verstehen:



$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^+|^2 &= \left( \underbrace{A_2}_{=|\mathbf{x}_2^+|} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right)^2 + \left( \underbrace{A_1}_{=|\mathbf{x}_1^+|} + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right)^2 \\ &= A_2^2 (1 - \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)) + A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \tan(\varphi^+ - \varphi_1) &= \frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 19:** Für  $z^\pm = |z^\pm| e^{i\varphi^\pm}$  gilt

$$\begin{aligned} & z^+ e^{+i\omega t} + z^- e^{-i\omega t} \\ &= |z^+| e^{+i(\omega t + \varphi^+)} + |z^-| e^{-i(\omega t - \varphi^-)} \\ &= e^{i\delta} (|z^+| e^{+i(\omega t + \varphi_0)} + |z^-| e^{-i(\omega t + \varphi_0)}) \\ &= e^{i\delta} \left( (|z^+| + |z^-|) \cos(\omega t + \varphi_0) + (|z^+| - |z^-|) \sin(\omega t + \varphi_0) \right) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

**Zu Aufgabe 20:** Aus

$$\mathbf{x}^\pm(t) = A^\pm e^{\pm i(\omega_0 t + \varphi^\pm)}$$

und

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}, \quad \varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}$$

folgt gemäß Aufgabe 19

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{x}^-(t) &= (A^+ e^{+i(\omega_0 t + \varphi_0)} + A^- e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}) e^{i\delta} \\ &= (A^+ + A^-) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{i\delta} + (A^+ - A^-) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) i e^{i\delta}. \end{aligned}$$

Mit

$$e^{i\delta} = \cos \delta \mathbf{e}_1 + \sin \delta \mathbf{e}_2, \quad i e^{i\delta} = -\sin \delta \mathbf{e}_1 + \cos \delta \mathbf{e}_2$$

ergeben sich daraus die Behauptungen.

**Anmerkungen:**

1. Natürlich läßt sich die Aufgabe — etwas komplizierter — auch ohne Verwendung der komplexen Zahlen lösen:

Aufgrund der Additionstheoreme (2.38) und (2.39) ergibt sich mit

$$\overbrace{\omega_0 t + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}}^{\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=}} \pm \overbrace{\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}}^{\delta \stackrel{\text{def}}{=}} = \omega_0 t + \varphi^\pm$$

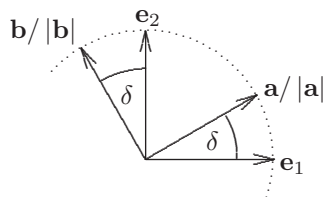
für die Kreisbewegungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\pm &= A^\pm \left( \left( \cos \psi(t) \cos(\pm\delta) - \sin \psi(t) \sin(\pm\delta) \right) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. \pm \left( \sin \psi(t) \cos(\pm\delta) + \cos \psi(t) \sin(\pm\delta) \right) \mathbf{e}_2 \right). \end{aligned}$$

Daraus folgen die Behauptungen gemäß

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{x}^-(t) \\ &= \cos \psi(t) \left( A^+ (\cos \delta \mathbf{e}_1 + \sin \delta \mathbf{e}_2) + A^- (\cos(-\delta) \mathbf{e}_1 - \sin(-\delta) \mathbf{e}_2) \right) \\ &= \cos \psi(t) (A^+ + A^-) \underbrace{(\cos \delta \mathbf{e}_1 + \sin \delta \mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|} \\ &\quad + \sin \psi(t) (A^+ - A^-) \underbrace{(-\sin \delta \mathbf{e}_1 + \cos \delta \mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{b}/|\mathbf{b}|}. \end{aligned}$$

2. Die Lage der Hauptachsen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  der Bahnellipse entspricht folgender Skizze für  $\delta > 0$ :



**Zu Aufgabe 21:** Für

$$\mathbf{x}^{\pm}(t) = \frac{A}{2} \left( \cos(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e} \pm \sin(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e}_{\perp} \right)$$

folgt offensichtlich

$$\mathbf{x}^{+}(t) + \mathbf{x}^{-}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e}. \quad (\text{D.28})$$

Im Falle  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$  ist damit die Behauptung bereits bewiesen. Im allgemeinen Falle existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}$  mit

$$\mathbf{e} = \cos \delta \mathbf{e}_1 + \sin \delta \mathbf{e}_2.$$

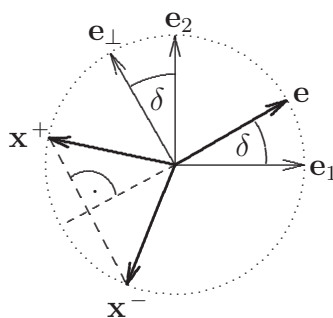
Dann folgt (D.28) entsprechend Aufgabe für 20

$$\mathbf{x}^{\pm} = A^{\pm} \left( \cos(\omega_0 t + \varphi^{\pm}) \mathbf{e}_1 \pm \sin(\omega_0 t + \varphi^{\pm}) \mathbf{e}_2 \right)$$

mit

$$A^{+} = A^{-} = \frac{A}{2}, \quad \varphi^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \pm \delta.$$

Das entspricht folgender Skizze:



**Zu Aufgabe 22:** Nach Aufgabe 21 existieren Kreisschwingungen

$$\mathbf{x}_j^{\pm}(t) \stackrel{\text{def}}{=} A_j^{\pm} \left( \cos(\omega_0 t + \varphi_j^{\pm}) \mathbf{e}_1 \pm \sin(\omega_0 t + \varphi_j^{\pm}) \mathbf{e}_2 \right)$$

mit

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_j^{+}(t) + \mathbf{x}_j^{-}(t) \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Nach Aufgabe 18 ist  $\mathbf{x}(t)$  somit eine Überlagerung der in Aufgabe 20 angegebenen Form, also eine zweidimensionale harmonische Schwingung.

Im Falle  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1$  gilt

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathbf{e}_1 \cdot \left( \mathbf{x}_1^+(t) + \mathbf{x}_2^+(t) \right) \right) \mathbf{e}_1$$

mit

$$A_j^+ = A_j, \quad \varphi_j^+ = \varphi_j.$$

Gemäß Aufgabe 18 folgt daraus dann

$$\mathbf{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \mathbf{e}_1$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \varphi &= \varphi_1 + \arctan \left( \frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \right). \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 23:** Die geforderten Anfangsbedingungen für

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\omega_0(t - t_0) + \chi_c) \mathbf{c} + \cos(\omega_0(t - t_0) + \chi_d) \mathbf{d}$$

sind

$$\begin{pmatrix} c \cos \chi_c \\ d \cos \chi_d \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}(t_0)} = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$$

und

$$\begin{pmatrix} c \omega_0 \sin \chi_c \\ d \omega_0 \sin \chi_d \end{pmatrix} = \underline{\dot{\mathbf{x}}(t_0)} = \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Zu vorgegebenen  $x_0^j, v_0^j$  sind also  $c, d, \chi_c, \chi_d$  so zu wählen, daß die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} c \cos \chi_c \\ d \cos \chi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \omega_0 \sin \chi_c \\ d \omega_0 \sin \chi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix}$$

gelten. Letztere sind aber äquivalent zu den Gleichungen

$$c \begin{pmatrix} \cos \chi_c \\ \sin \chi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ v_0^1/\omega_0 \end{pmatrix}, \quad d \begin{pmatrix} \cos \chi_d \\ \sin \chi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 \\ v_0^2/\omega_0 \end{pmatrix},$$

die sich offensichtlich erfüllen lassen.

**Zu Aufgabe 24a):** Die Abbildung

$$\mathbf{x}(t) \longmapsto \mathbf{x}(t) \times \mathbf{e}_3$$

ist eine Drehung um den Winkel  $\pi/2$  im Linksschraubensinn relativ zu der längs  $\mathbf{e}_3$  gerichteten Drehachse. Das entspricht einer Drehung in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene im Uhrzeigersinn um den Winkel  $\pi/2$ . Die komplexe Schreibweise für diese Abbildung ist deshalb

$$z(t) \mapsto -i z(t)$$

und dementsprechend gilt

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} \dot{\mathbf{x}}(t) \times (B \mathbf{e}_3) &= \frac{qB}{m} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \times \mathbf{e}_3 \\ &\hat{=} \frac{qB}{m} \frac{d}{dt} ((-i z(t))) \\ &= -i \frac{qB}{m} \dot{z}(t). \end{aligned}$$

Mit  $\ddot{\mathbf{x}}(t) \hat{=} \ddot{z}(t)$  folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 24b):** Mit

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{qB}{m}$$

folgt aus der komplex geschriebenen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{+iCt} \dot{z}(t)) &= \underbrace{iC e^{+iCt}}_{=(\frac{d}{dt} e^{+iCt})} \dot{z}(t) + e^{+iCt} \underbrace{\frac{d}{dt} \dot{z}(t)}_{=-iC \dot{z}(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also muß  $e^{+iCt} \dot{z}(t)$  gemäß Lemma 3.3.1 zeitlich konstant sein und deshalb

$$\dot{z}(t) = e^{-iCt} \dot{z}(0)$$

gelten. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left( z(t) - \frac{i}{C} e^{-iCt} \dot{z}(0) \right) = 0$$

und dementsprechend die zeitliche Konstanz von

$$z(t) - \frac{i}{C} e^{-iCt} \dot{z}(0),$$

also

$$z(t) - \frac{i}{C} e^{-iCt} \dot{z}(0) = z(0) - \frac{i}{C} \dot{z}(0)$$

und somit

$$z(t) = \frac{i}{C} (e^{-iCt} \dot{z}(0) - \dot{z}(0)) + z(0) \quad (\text{D.29})$$

$$= z(0) - \frac{i}{C} \dot{z}(0) + \frac{1}{C} (i \cos(Ct) + \sin(Ct)) \dot{z}(0). \quad (\text{D.30})$$

**Zu Aufgabe E24c):** Da die Multiplikation mit  $i$  einer Drehung im entgegengesetzten Uhrzeigersinn um  $\pi/2$ , also für Linearkombinationen  $\mathbf{a}$  von  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  der Transformation

$$\mathbf{a} \longmapsto \mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}$$

entspricht,<sup>5</sup> bedeutet (D.30) in reller Schreibweise:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) - \frac{1}{C} \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{x}}(0) + \frac{|\dot{\mathbf{x}}(0)|}{C} \left( \cos(Ct) \mathbf{e}_3 \times \frac{\dot{\mathbf{x}}(0)}{|\dot{\mathbf{x}}(0)|} + \sin(Ct) \frac{\dot{\mathbf{x}}(0)}{|\dot{\mathbf{x}}(0)|} \right).$$

$\mathbf{x}(t)$  ist also die Ortsvektorfunktion einer gleichförmigen Kreisbewegung mit der Kreisfrequenz  $|C| = \frac{|q|B}{m}$ , auf einem Kreis mit dem Radius  $\frac{|m\dot{\mathbf{x}}(0)|}{|q|B}$  in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene, dessen Mittelpunkt den Ortsvektor  $\mathbf{x}(0) - \frac{1}{C} \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{x}}(0)$  hat. Die Drehung erfolgt im Links- resp. Rechtsschraubensinne relativ zu  $\mathbf{e}_3$  (ist also vom Typ  $\mathbf{x}^+$  resp.  $\mathbf{x}^-$  im Sinne von Aufgabe 20) wenn  $q > 0$  resp.  $q < 0$  ist.

**Zu Aufgabe 25:** Sei  $\mathbf{F} = 0$ , also

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{D.31})$$

Dann folgt daraus

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{D.32})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= |\mathbf{B}|^2 \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B}, \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \propto \mathbf{B}. \quad (\text{D.33})$$

Umgekehrt folgt aus (D.33) und (D.32)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{B} \times \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \right) \\ &= \mathbf{B} \times \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2} \\ &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \end{aligned}$$

und somit (D.31), d.h.  $\mathbf{F} = 0$ .

**Zu Aufgabe 26:** Sei  $\mathbf{e}_3$  senkrecht zur Bahnebene. Wegen  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$  folgt damit aus

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) \perp \mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{x}}(t)$$

<sup>5</sup>Vgl. Lösung zu Aufgabe 24a).



die Existenz einer Funktion  $C(t)$  mit

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \left( C(t) \mathbf{e}_3 \right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{x}}(t)}} & \stackrel{\text{Voraus.}}{=} \ddot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) \\ & = \underline{\underline{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}(t)}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{\text{Voraus.}}{=} \frac{d}{dt} |\ddot{\mathbf{x}}(t)| \\ & = \frac{d}{dt} (|\dot{\mathbf{x}}(t)| |\mathbf{C}(t)|) \\ & = \left( \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \right) |\mathbf{C}(t)| + |\dot{\mathbf{x}}(t)| \frac{d}{dt} |\mathbf{C}(t)| \end{aligned}$$

für

$$\mathbf{C}(t) \stackrel{\text{def}}{=} C(t) \mathbf{e}_3.$$

Mit

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t) = 0 \implies \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}(t)| = 0$$

und  $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \neq 0$  folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 27:** Jede andere Parametrisierung der vorgegebenen Bahnkurve entspricht gemäß Folgerung 4.2.3 einer Ortsvektorfunktion der Form

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(f(t)).$$

Die Kettenregel liefert dafür

$$\dot{\mathbf{x}}'(t) = \dot{f}(t) \underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t')}_{=\dot{\mathbf{x}}(f(t))} \Big|_{t'=f(t)}$$

sowie

$$\frac{d}{dt} \frac{|\dot{\mathbf{x}}(f(t))|}{|\dot{\mathbf{x}}'(t)|} = \dot{f}(t) \left( \frac{d}{dt'} \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t')|}{|\dot{\mathbf{x}}'(t')|} \right) \Big|_{t'=f(t)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}'(t)|} \frac{d}{dt} \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}'(t)|} \right| & = \left| \frac{1}{|\dot{f}(t)\dot{\mathbf{x}}(t')|} \dot{f}(t) \frac{d}{dt'} \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t')|}{|\dot{\mathbf{x}}'(t')|} \right| \Big|_{t'=f(t)} \\ & = \underbrace{\left| \frac{\dot{f}(t)}{|\dot{f}(t)|} \right|}_{=1} \left| \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t')|} \frac{d}{dt'} \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t')|}{|\dot{\mathbf{x}}'(t')|} \right| \Big|_{t'=f(t)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Zu Aufgabe 28:** Daß eine Kreisbahn konstante Krümmung hat, wurde in der Vorlesung gezeigt.<sup>6</sup> Es ist also nur noch zu zeigen, daß aus der Konstanz der Krümmung die Kreisförmigkeit der Bahn folgt:

Parametrisiert man  $\mathcal{C}$  so, daß

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \text{konstant}, \quad (\text{D.34})$$

dann ist die Konstanz der Krümmung äquivalent zu

$$|\ddot{\mathbf{x}}(t)| = \text{konstant} \quad (\text{D.35})$$

und außerdem gilt

$$0 = \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 \stackrel{\text{Produktregel}}{=} 2 \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Aus letzterem folgt

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}(t)$$

mit geeignetem, zur Bahn senkrechtem  $\mathbf{C}(t)$ . Mit (D.34), (D.35) und

$$|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}(t)| \stackrel{\dot{\mathbf{x}} \perp \mathbf{C}}{=} |\dot{\mathbf{x}}(t)| |\mathbf{C}(t)|$$

folgt daraus

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \text{ senkrecht zur Bahn.} \quad (\text{D.36})$$

Die Bahn  $\mathcal{C}$  ist im Falle (D.34) genau dann kreisförmig, wenn

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y} - \rho_{\mathcal{C}} \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t)}{|\ddot{\mathbf{x}}(t)|}$$

gilt, d.h. wenn der Bahnpunkt stets den konstanten Abstand  $\rho_{\mathcal{C}}$  vom Kreismittelpunkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{y}$  hat. Für die Kreisförmigkeit ist also nur noch

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{x}(t) + \rho_{\mathcal{C}} \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t)}{|\ddot{\mathbf{x}}(t)|} \right) = 0$$

zu zeigen. Das folgt aber aus

$$\frac{d}{dt} \ddot{\mathbf{x}}(t) \stackrel{(\text{D.36})}{=} \ddot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C} \quad (\text{D.37})$$

$$\stackrel{(\text{D.36})}{=} \left( \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C} \right) \times \mathbf{C} \quad (\text{D.38})$$

$$\stackrel{(\text{D.36})}{=} -|\mathbf{C}|^2 \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{D.39})$$

<sup>6</sup>Siehe Beispiel (i) in 3.3.1.

und

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{|\ddot{\mathbf{x}}|} &\stackrel{\text{Def. } \rho, \text{(D.34)}}{=} \left( \frac{|\dot{\mathbf{x}}|}{|\ddot{\mathbf{x}}|} \right)^2 \\ &\stackrel{\text{(D.36)}}{=} |\mathbf{C}|^{-2}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 29:** Mit  $\mathbf{x}(t)$  ist offensichtlich auch

$$\mathbf{x}_{\perp}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - t(\mathbf{e}_3 \cdot \dot{\mathbf{x}}(0)) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|}, \quad (\text{D.40})$$

Lösung von

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{C}, \quad (\text{D.41})$$

wobei nun aber

$$\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt, da  $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$  nach (D.41) zeitlich konstant ist. Gemäß Aufgabe 28 beschreibt  $\mathbf{x}_{\perp}(t)$  also eine gleichförmige Kreisbewegung in einer zu  $\mathbf{C}$  senkrechten Ebene, die im **Linksschraubensinne** relativ zu  $\mathbf{C}$  abläuft. Wir interessieren uns nur für den nicht trivialen Fall

$$\mathbf{v}_{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{x}}_{\perp}(0) \neq 0.$$

Dann ist  $\mathbf{x}_{\perp}(t)$  also von der Form

$$\mathbf{x}_{\perp}(t) = \mathbf{y} - \rho \left( \underbrace{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}_{>0} \mathbf{e}_1 - \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \mathbf{e}_2 \right),$$

wobei

$$\mathbf{e}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{|\mathbf{v}_{\perp}|}, \quad \mathbf{e}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3.$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{|\ddot{\mathbf{x}}_{\perp}|}{|\dot{\mathbf{x}}_{\perp}|^2} \\ &\stackrel{\text{(D.41)}}{=} \frac{|\mathbf{C}|}{|\dot{\mathbf{x}}_{\perp}|} \\ &= \frac{|\mathbf{C}|}{|\mathbf{v}_{\perp}|} \end{aligned}$$

und

$$\omega_0 = \frac{|\mathbf{v}_{\perp}|}{\rho} = |\mathbf{C}|$$

folgt dann, im Einklang mit dem Ergebnis von Aufgabe E24c),

$$\mathbf{x}_{\perp}(t) = \mathbf{y} - \frac{|\mathbf{v}_{\perp}|}{|\mathbf{C}|} \left( \cos(|\mathbf{C}|t + \varphi_0) \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{C}|} - \sin(|\mathbf{C}|t + \varphi_0) \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{|\mathbf{v}_{\perp}|} \right).$$

Die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{v}_\perp \\ &= |\mathbf{v}_\perp| \sin \varphi_0 \frac{\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{C}}{|\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{C}|} + \cos \varphi_0 \mathbf{v}_\perp\end{aligned}$$

ist offensichtlich nur für

$$\sin \varphi_0 = 0, \quad \cos \varphi_0 = 1$$

erfüllt. Mit (D.40) ergibt sich somit:

$$\mathbf{x}(t) = t \left( \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) \right) \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} + \mathbf{y} - \frac{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|}{|\mathbf{C}|} \left( \cos(|\mathbf{C}|t) \frac{\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}}{|\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}|} - \sin(|\mathbf{C}|t) \frac{\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)}{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|} \right).$$

$\mathbf{y}$  ist dabei eindeutig durch die Anfangsbedingung festgelegt zu

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(0) + \frac{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|}{|\mathbf{C}|} \frac{\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}}{|\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}|}.$$

**Anmerkung:** In der komplexen Schreibweise läßt sich  $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_\perp(t)$  leicht folgendermaßen bestimmen:

Die Bewegungsgleichung für  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\perp(t)$  ist äquivalent zu

$$\ddot{z}(t) = -i|\mathbf{C}|\dot{z}(t).$$

Daraus folgt<sup>7</sup>

$$\dot{z}(t) = e^{-i|\mathbf{C}|t} \dot{z}(0)$$

und somit

$$\begin{aligned}z(t) &= \frac{i}{|\mathbf{C}|} \left( e^{-i|\mathbf{C}|t} \dot{z}(0) - \dot{z}(0) \right) + z(0) \\ &= z(0) - \frac{i}{|\mathbf{C}|} \dot{z}(0) + \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left( i \cos(|\mathbf{C}|t) + \sin(|\mathbf{C}|t) \right) \dot{z}(0).\end{aligned}$$

In reeller Schreibweise bedeutet letzteres

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\perp(t) &= \mathbf{x}_\perp(0) + \frac{\dot{\mathbf{x}}_\perp(0) \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{C}|} - \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left( \cos(|\mathbf{C}|t) \dot{\mathbf{x}}_\perp(0) \times \mathbf{e}_3 - \sin(|\mathbf{C}|t) \dot{\mathbf{x}}_\perp(0) \right) \\ &= \mathbf{x}_\perp(0) + \frac{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|}{|\mathbf{C}|} \frac{\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}}{|\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}|} \\ &\quad - \frac{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|}{|\mathbf{C}|} \left( \cos(|\mathbf{C}|t) \frac{\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}}{|\dot{\mathbf{x}}(0) \times \mathbf{C}|} - \sin(|\mathbf{C}|t) \frac{\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)}{|\dot{\mathbf{x}}_\perp(0)|} \right).\end{aligned}$$

<sup>7</sup>Denn mit der Produktregel ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left( e^{+i|\mathbf{C}|t} \dot{z}(t) \right) = 0.$$

**Zu Aufgabe 30:** Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

- $T_0$  : Zeitpunkt, zu dem Gefahr erkannt ,
- $T$  : Beginn Bremsvorgangs ,
- $T_c$  : Zeitpunkt des Aufpralls ,
- $v$  : tatsächliche Geschwindigkeit zur Zeit  $T_0$  ,
- $v_c$  : Aufprallgeschwindigkeit ,
- $L$  : Entfernung vom Unfallort zur Zeit  $T$  ,
- $L_0$  : Entfernung vom Unfallort zur Zeit  $T_0$  ,
- $v_0$  : maximale Geschwindigkeit, die ausgebrems werden könnte ,
- $b$  : Bremsverzögerung .

Aus

$$L = \int_T^{T_c} (v - b(t - T)) dt = v \Delta t - \frac{b}{2} (\Delta t)^2$$

und

$$v - v_c = b \Delta t, \quad \Delta t \stackrel{\text{def}}{=} T_c - T \quad (\text{D.42})$$

folgt zunächst

$$L = \frac{b}{2} (\Delta t)^2 + v_c \Delta t$$

und somit

$$\Delta t = \sqrt{\left(\frac{v_c}{b}\right)^2 + \frac{2L}{b}} - \frac{v_c}{b}.$$

Mit (D.42) ergibt sich somit

$$\boxed{v = \sqrt{v_c^2 + 2bL}} \quad (\text{D.43})$$

und daraus

$$L_0 = L + s \sqrt{v_c^2 + 2bL}, \quad s \stackrel{\text{def}}{=} T - T_0. \quad (\text{D.44})$$

Bei einer Geschwindigkeit  $v_0$  zur Zeit  $T_0$  würde der Bremsvorgang also, bei gleicher Reaktionszeit  $s$ , in einem Abstand

$$L' = L_0 - s v_0 = L - s \left( v_0 - \sqrt{v_c^2 + 2bL} \right)$$

eingeleitet. Bis zum Stillstand vergeht dann die Zeit  $\Delta t' = v_0/b$ , während der die Strecke

$$L'' = \frac{b}{2} (\Delta t')^2 = \frac{v_0^2}{2b}$$

zurückgelegt wird. Der Unfall wäre also nur im Falle  $L'' < L'$ , also für

$$\boxed{v_0 < \sqrt{(bs)^2 + 2b \left( L + s \sqrt{v_c^2 + 2bL} \right)} - bs} \quad (\text{D.45})$$

vermeidbar gewesen.

**Zu Aufgabe 31:** Multiplikation von (C.1) mit  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  liefert

$$\begin{aligned} -\rho |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 &= m \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) + \kappa \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{d}{dt} E(t) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} -\rho \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}(t) dt \\ &= E(t_2) - E(t_1). \end{aligned}$$

Im Falle  $E(0) = 0$  folgt dann für  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t \geq 0$  wegen  $\rho \geq 0$

$$E(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

und somit, da die Konstanten  $m, \kappa$  positiv sind,

$$\mathbf{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Wenn aber  $\mathbf{x}_1(t)$  und  $\mathbf{x}_2(t)$  zwei (stetige) Lösungen von (C.1) zu gleichen Anfangsbedingungen zur Zeit 0 sind, dann ist

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$$

eine Lösung von (C.1) mit  $E(0) = 0$ , also

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \forall t \geq 0.$$

**Zu Aufgabe 32:** Definitionsgemäß gelten die Gleichungen

$$I(t) = \dot{Q}(t) \tag{D.46}$$

und

$$RI(t) = U_R(t), \quad CU_C(t) = Q(t), \quad L\dot{I}(t) = U_L(t).$$

Das sich die Spannungen bei Serienschaltung addieren, gilt also

$$\begin{aligned} U(t) &= U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) \\ &= RI(t) + Q(t)/C + L\dot{I}(t), \end{aligned}$$

woraus durch Einsetzen von (D.46) die Gleichung (C.2) folgt.

Die eindeutige Bestimmtheit der Lösung durch die Anfangsbedingungen folgt wie in Aufgabe 31, da die Differenz zweier Lösungen von (C.2) zu gleichem  $U(t)$  eine Lösung von (C.2) zu  $U = 0$  ist. (C.2) zu  $U = 0$  ist aber vom gleichen Typ wie (C.1).

**Zu Aufgabe 33a):** Einsetzen von

$$Q(t) = z_+ e^{i\lambda_+ t} + z_- e^{i\lambda_- t} \quad (\text{D.47})$$

in (C.4) liefert

$$\left(-\lambda_+^2 L + i\lambda_+ R + \frac{1}{C}\right) z_+ e^{i\lambda_+ t} + \left(-\lambda_-^2 L + i\lambda_- R + \frac{1}{C}\right) z_- e^{i\lambda_- t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

was im Falle  $z_+ \neq 0 \neq z_-$  äquivalent ist zu

$$-\lambda_{\pm}^2 L + i\lambda_{\pm} R + \frac{1}{C} = 0,$$

also zu

$$\left(\lambda_{\pm} - i\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2.$$

**Zu Aufgabe 33b):** Aus (C.4) folgt auch

$$L\left(\ddot{Q}(t)\right)^* + R\left(\dot{Q}(t)\right)^* + \frac{1}{C}\left(Q(t)\right)^* = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) &= L\frac{\ddot{Q}(t) + \ddot{Q}(t)^*}{2} + R\frac{\dot{Q}(t) + \dot{Q}(t)^*}{2} + \frac{1}{C}\frac{Q(t) + Q(t)^*}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für

$$Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Re(Q(t)).$$

**Zu Aufgabe 33c):** Für (D.47) sind die Anfangsbedingungen

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0$$

äquivalent zu

$$z_+ + z_- = Q_0, \quad i\lambda_+ z_+ + i\lambda_- z_- = I_0,$$

im Falle  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  also zu

$$z_{\pm} = \frac{\lambda_{\mp} Q_0 + i I_0}{\lambda_{\mp} - \lambda_{\pm}}.$$

**Zu Aufgabe 34:** Im Falle

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0$$

ist gemäß Aufgabe E33a)

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_\varphi \frac{1}{2} (e^{i\varphi} e^{+i\lambda t} + e^{-i\varphi} e^{i\lambda - t}) \\ &= Q_\varphi \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{R}{2L} t + i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-\frac{R}{2L} t - i(\omega_0 t + \varphi)} \right) \\ &= Q_\varphi e^{-\frac{R}{2L} t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

eine Lösung von (C.4). Diese Lösung beschreibt eine durch den Faktor  $e^{-\frac{R}{2L} t}$  **gedämpfte** harmonische Schwingung. Sie erfüllt die Anfangsbedingungen (C.3) genau dann, wenn die Gleichungen

$$Q_\varphi \cos \varphi = Q_0, \quad -\frac{R}{2L} Q_\varphi \cos \varphi - \omega_0 Q_\varphi \sin \varphi = I_0$$

gelten, die äquivalent zu der Vektorgleichung

$$Q_\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ -\frac{I_0 + \frac{R}{2L} Q_0}{\omega_0} \end{pmatrix}$$

und sich somit durch geeignete Wahl von  $\varphi$ ,  $Q_\varphi$  erfüllen lassen.

Im Falle

$$\frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 < 0$$

gilt  $\lambda_\pm = i\rho_\pm$  mit reellen  $\rho_\pm$ , und deshalb ist

$$Q(t) = Q_+ e^{-\rho_+ t} + Q_- e^{-\rho_- t}$$

eine Lösung von (C.4). Im vorliegenden sog. **Kriechfall** beschreibt die Lösung keine Schwingung mehr, sondern fällt für große Zeiten wie  $e^{-\rho_+ t}$  ab. Die Anfangsbedingungen (C.3) sind genau dann erfüllt, wenn die Gleichungen

$$Q_+ + Q_- = Q_0, \quad -\rho_+ Q_+ - \rho_- Q_- = I_0$$

gelten. Dank  $\rho_+ \neq \rho_-$  ist dieses Gleichungssystem für die  $Q_\pm$  lösbar.

Im Falle

$$\frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 = 0$$

gilt  $\lambda_- = \lambda_+ = i\frac{R}{2L}$ . Deshalb müssen wir eine weitere Lösung finden, um alle Anfangsbedingungen erfüllen zu können. Man sieht leicht, daß in diesem Falle auch  $t e^{-\frac{R}{2L} t}$  eine Lösung von (C.4) ist. Dementsprechend ist hier

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} \left( Q_0 + t \left( I_0 + \frac{R}{2L} Q_0 \right) \right).$$



Lösung des Anfangswertproblems. Diese Situation, die genau zwischen Schwing- und Kriechfall liegt, bezeichnet man als **asymptotischen Grenzfall**.

Gemäß Aufgabe (32) ist die Lösung von (C.3),(C.4) für alle drei Fälle bestimmt. Man sieht nun leicht, daß zu einem beliebigen anderen Anfangszeitpunkt  $t_0$  vorgegebene Anfangsbedingungen für  $t > t_0$  stets auf eindeutige Lösungen der gleichen Klasse führen. Deshalb sind die angegebenen Lösungen auch für  $t < 0$  gültig.

**Zu Aufgabe 35:** Sei  $Q(t)$  die Lösung von

$$L \ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U_0 \quad (\text{D.48})$$

zu den Anfangsbedingungen

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0. \quad (\text{D.49})$$

Da

$$Q_{\text{part}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} C U_0$$

eine spezielle (zeitlich konstante) Lösung von (D.48) ist, ist dann

$$Q_{\text{hom}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q(t) - Q_{\text{part}}(t) \quad (\text{D.50})$$

eine Lösung von (D.48) zu  $U_0 = 0$ , gemäß Aufgabe 34 also von der Form

$$Q_{\text{hom}}(t) = \hat{Q}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

was sich auch in der Form

$$Q_{\text{hom}}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

schreiben läßt. Die (D.49) entsprechende Anfangsbedingung

$$Q_{\text{hom}}(0) = Q_0 - C U_0, \quad \dot{Q}_{\text{hom}}(0) = I_0$$

ist für

$$c_1 = Q_0 - C U_0, \quad c_2 = I_0/\omega_0$$

erfüllt. Mit (D.50) folgt somit gemäß Aufgabe 32:

$$Q(t) = C U_0 + (Q_0 - C U_0) \cos(\omega_0 t) + \frac{I_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

**Zu Aufgabe 36:** Einsetzen von

$$Q_{\text{part}}(t) = A \underbrace{\frac{e^{i(\omega t - \varphi)} + e^{-i(\omega t - \varphi)}}{2}}_{\stackrel{\text{(2.44)}}{=} \cos(\omega t - \varphi)},$$

in

$$L \ddot{Q}_{\text{part}}(t) + R \dot{Q}_{\text{part}}(t) + \frac{1}{C} Q_{\text{part}}(t) = U_0 \frac{e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

liefert

$$\begin{aligned} & \left( -\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{+i\omega t} + \left( -\omega^2 L - i\omega R + \frac{1}{C} \right) \frac{A}{2} e^{+i\varphi} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{U_0}{2} e^{+i\omega t} + \frac{U_0}{2} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

und somit:

$$\left( -\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) \frac{A}{2} e^{-i\varphi} = \frac{U_0}{2}, \quad (\text{D.51})$$

$$\left( -\omega^2 L - i\omega R + \frac{1}{C} \right) \frac{A}{2} e^{+i\varphi} = \frac{U_0}{2}. \quad (\text{D.52})$$

Wir betrachten nur den nichttrivialen Fall  $U_0 \neq 0$ . Aus (D.51) folgt dann

$$e^{i\varphi} = \frac{A}{U_0} \left( -\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) \quad (\text{D.53})$$

und daraus mit (D.52)

$$A = \frac{C U_0}{\sqrt{(\omega R C)^2 + (1 - \omega^2 L C)^2}}. \quad (\text{D.54})$$

Andererseits folgt aus (D.53) mit der EULERSchen Formel (2.43)

$$\tan \varphi = \frac{\omega R C}{1 - \omega^2 L C}.$$

Die Amplitude

$$A_I \stackrel{\text{def}}{=} \omega A \stackrel{(\text{D.54})}{=} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

von  $\dot{Q}_{\text{part}}(t)$  ist offensichtlich für

$$\omega = \omega_r^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

maximal. (D.54) ist dagegen maximal, wenn  $(\omega R C)^2 + (1 - \omega^2 L C)^2$  minimal, also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\omega} (\omega R C)^2 + (1 - \omega^2 L C)^2 \\ &= 2\omega (R C)^2 - 4\omega L C (1 - \omega^2 L C) \end{aligned}$$

und somit

$$\omega = \omega_r^Q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

ist.

**Zu Aufgabe 37a):** Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t), \\ x_2(t) &= e^{-\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{j=1}^2 2 \left( \dot{c}_j(t) x_j(t) + c_j(t) \dot{x}_j(t) \right), \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{j=1}^2 2 \left( \ddot{c}_j(t) x_j(t) + 2 \dot{c}_j(t) \dot{x}_j(t) + c_j(t) \ddot{x}_j(t) \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$m \ddot{x}_j(t) + 2 \rho \dot{x}_j(t) + \kappa x_j(t) \underset{\text{Aufg. 34a)}}{=} 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

ist also nur

$$m \sum_{j=1}^2 \left( \ddot{c}_j(t) x_j(t) + 2 \dot{c}_j(t) \dot{x}_j(t) \right) + 2 \rho \sum_{j=1}^2 2 \dot{c}_j(t) x_j(t) = -F(t) \quad (\text{D.55})$$

zu zeigen:

Mit

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= +\frac{1}{m \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) F(t), \\ \dot{c}_2(t) &= -\frac{1}{m \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) F(t), \\ \ddot{c}_1(t) &= +\frac{\rho}{m^2 \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) F(t) - \frac{1}{m} e^{\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) F(t) \\ &\quad + \frac{1}{m \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) \dot{F}(t), \\ \ddot{c}_2(t) &= -\frac{\rho}{m^2 \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) F(t) - \frac{1}{m} e^{\frac{\rho}{m}t} \cos(\omega_0 t) F(t) \\ &\quad - \frac{1}{m \omega_0} e^{\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) \dot{F}(t) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \dot{c}_j(t) x_j(t) &= 0, \\ m \sum_{j=1}^2 \ddot{c}_j(t) x_j(t) &= -F(t), \\ m \sum_{j=1}^2 \dot{c}_j(t) \dot{x}_j(t) &= +F(t) \end{aligned}$$

und somit (D.55).

**Zu Aufgabe 37b):** Im Grenzfall

$$0 \leq F(t) \longrightarrow \underbrace{f_0}_{\text{Kraftstoß}} \delta(t)$$

ergibt sich für

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_0} \int_0^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) F(t') dt'$$

offensichtlich

$$x(t) \longrightarrow \frac{f_0}{m \omega_0} e^{-\frac{\rho}{m}t} \sin(\omega_0 t) \quad \forall t \geq 0$$

(Impulsantwort).

**Zu Aufgabe 38a):** Aus

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-T}^{T-\tau} e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) \theta_\epsilon(t'+\tau) F(t') dt' \right| \\ & \leq e^{-\frac{\rho}{m}t} e^{+\frac{\rho}{m}(T-\tau)} |F_0| \max_{t' \in \mathbb{R}} |\theta_\epsilon(t')| \\ & \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{T-\tau}^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) \theta_\epsilon(t'+\tau) F(t') dt \\ & = \int_{T-\tau}^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \sin(\omega_0(t-t')) F_0 \cos(\omega t') dt \\ & = \frac{F_0}{4i} \int_{T-\tau}^t e^{-\frac{\rho}{m}(t-t')} \left( e^{+i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')} \right) \left( e^{+i\omega t'} + e^{+i\omega t'} \right) dt' \\ & \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \Re(z e^{i\omega t}) \text{ für geeignetes } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

folgt die Behauptung mit

$$A = \frac{|z|}{m\omega_0}, \quad \varphi = -\arg(z) \bmod 2\pi.$$

**Zu Aufgabe 38b):** Einsetzen von

$$x_\infty(t) = \frac{A}{2} (e^{+i(\omega t - \varphi)} + e^{-i(\omega t - \varphi)})$$

und

$$F(t) = \frac{F_0}{2} (e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

ergibt

$$\begin{aligned} &+ \left( \frac{A}{2} (-m\omega^2 + 2\rho i\omega + \kappa) e^{-i\varphi} - \frac{F_0}{2} \right) e^{+i\omega t} \\ &- \left( \frac{A}{2} (-m\omega^2 - 2\rho i\omega + \kappa) e^{-i\varphi} - \frac{F_0}{2} \right) e^{-i\omega t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit

$$A (-m\omega^2 + 2\rho i\omega + \kappa) e^{-i\varphi} = F_0 \quad (\text{D.56})$$

sowie die dazu komplex konjugierte Gleichung

$$A (-m\omega^2 - 2\rho i\omega + \kappa) e^{-i\varphi} = F_0. \quad (\text{D.57})$$

Aus (D.56) folgt

$$e^{+i\varphi} = \frac{A}{F_0} (-m\omega^2 + 2\rho i\omega + \kappa) \quad (\text{D.58})$$

und daraus mit (D.57)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \frac{F_0}{|-m\omega^2 + 2\rho i\omega + \kappa|} \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (2\rho\omega)^2}}. \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus (D.58)

$$\varphi = \arctan \frac{2\rho\omega}{\kappa - m\omega^2} \bmod \pi,$$

wobei  $\varphi$  wegen  $\Im(e^{+i\varphi}) > 0$  aus  $(0, \pi)$  gewählt werden kann.

Zu Aufgabe 38c):

$$A = \frac{F_0}{\sqrt[+]{(2\rho\omega)^2 + (\kappa - m\omega^2)^2}}$$

als Funktion von  $\omega$  ist genau dort maximal, wo

$$(2\rho\omega)^2 + (\kappa - m\omega^2)^2 \quad \text{minimal}$$

ist. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} (4\rho^2 x + (\kappa - mx)^2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\kappa}{m} - \frac{2\rho^2}{m^2} \end{aligned}$$

ist  $A$  also an der Stelle

$$\omega = \sqrt[+]{\frac{\kappa}{m} - \frac{2\rho^2}{m^2}}$$

maximal. Dieser Maximalwert ist

$$A_{\max} = \frac{F_0}{\sqrt[+]{4\rho^2 \left( \frac{\kappa}{m} - \frac{2\rho^2}{m^2} \right) + \frac{4\rho^4}{m^2}}}$$

und divergiert offensichtlich für  $\rho \rightarrow 0$ .

**Zu Aufgabe 39:** Sei  $\omega > 0$  irgendeine Kreisfrequenz. Dann überstreicht der Ortsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \cos(\omega t) a \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) b \mathbf{e}_2$$

während des Zeitintervalls  $[0, 2\pi/\omega]$  einmal die zu untersuchende Ellipsenfläche. Gemäß Flächensatz ist der Flächeninhalt deshalb

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \left| \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \mathbf{x}(0) \times \dot{\mathbf{x}}(0) \int_0^{2\pi/\omega} dt \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{\omega} \mathbf{x}(0) \times \dot{\mathbf{x}}(0) \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{\omega} (a \mathbf{e}_1) \times (\omega b \mathbf{e}_2) \right| \\ &= \underline{\underline{\pi a b}}. \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Das Ergebnis entspricht natürlich der Vorstellung der Ellipse als gestauchtem Kreis:

$$F = \underbrace{\frac{b}{a}}_{\text{Stauchung}} \underbrace{\pi a^2}_{\text{Kreisflächeninhalt}}$$

(vgl. Fußnote 36 von Kapitel 3).

**Zu Aufgabe 40:** Aus der Voraussetzung

$$\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

folgt die Existenz einer Funktion  $g(t)$  mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = g(t) \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in J \tag{D.59}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)} \\ &= \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)}} \\ &\stackrel{\text{(D.59)}}{=} g(t) |\mathbf{x}(t)|. \end{aligned} \tag{D.60}$$

Daraus folgt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} &= \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) |\mathbf{x}(t)| - \mathbf{x}(t) \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|^2} \\ &\stackrel{\text{(D.59), (D.60)}}{=} 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= |\mathbf{x}(t)| \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \\ &= |\mathbf{x}(t)| \frac{\mathbf{x}(0)}{|\mathbf{x}(0)|}, \end{aligned}$$

wie behauptet.

**Zu Aufgabe 41:** Zunächst sieht man leicht, daß

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{x}}_s(t) &= m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) + \underbrace{m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t)}_{=-m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{\underline{\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = 0}}$$

gilt.<sup>8</sup> Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\mathbf{x}}_1(t) &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t)}_{=\mathbf{F}(|\mathbf{x}_r(t)|) \frac{\mathbf{x}_r(t)}{|\mathbf{x}_r(t)|}}, \\ \mu \ddot{\mathbf{x}}_2(t) &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underbrace{m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t)}_{=-\mathbf{F}(|\mathbf{x}_r(t)|) \frac{\mathbf{x}_r(t)}{|\mathbf{x}_r(t)|}} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mu \ddot{\mathbf{x}}_r(t)}} &= \mu \ddot{\mathbf{x}}_1(t) - \mu \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \\ &= \underbrace{\left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)}_{=1} \underline{\underline{\mathbf{F}(|\mathbf{x}_r(t)|) \frac{\mathbf{x}_r(t)}{|\mathbf{x}_r(t)|}}}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 42a):** Die zeitliche Konstanz des RUNGE-LENZ Vektors folgt wie in Abschnitt 3.5.3 für das KEPLER-Problem gezeigt:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{\underline{\Lambda}} &\stackrel{(C.6)}{=} \underbrace{\frac{\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{m\lambda_-}}_{\stackrel{(C.6)}{=} -\frac{\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x}|^3}} - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}}_{\stackrel{(2.23)}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}} \\ &\stackrel{(2.23)}{=} -\frac{(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 42b):** Weil wir nun  $\lambda_- < 0$  statt  $\lambda > 0$  haben, gilt jetzt

$$|\mathbf{x}| \stackrel{(C.6)}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{m\lambda_-} \cdot \mathbf{x} - \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \mathbf{x} \stackrel{(C.7)}{=} -p + \epsilon |\mathbf{x}| \cos \varphi,$$

d.h.

$$|\mathbf{x}| (1 - \epsilon \cos \varphi) = -p \stackrel{(C.7)}{<} 0,$$

und damit (C.8)/(C.9). Bzgl. der Interpretation dieses Ergebnisses siehe Fußnote 11 von Kapitel 3.

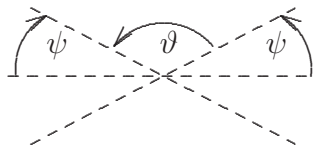
<sup>8</sup>Es wirken nur *innere Kräfte*; siehe Abschnitt 3.4.3 der Vorlesung.

<sup>9</sup>Das Vorzeichen von  $\lambda_-$  spielt dabei ja keine Rolle.



Zu Aufgabe 42c): Mit

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{1}{\epsilon}$$



folgt die Behauptung gemäß

$$\begin{aligned} \sin \frac{\vartheta}{2} &= \sin \frac{\pi - 2\psi}{2} \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \\ &= \cos \psi \\ &= \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 43a): Gemäß der ersten abschließenden Bemerkungen zu Abschnitt 3.5.3 der Vorlesung liegt **genau** dann eine Kreisbahn vor, wenn

$$0 = \mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{G m M} - \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

zu irgendeinem (und damit zu jedem) Zeitpunkt gilt, d.h. wenn

$$\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} \propto \mathbf{x} \tag{D.61}$$

und

$$|\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}| = G m M. \tag{D.62}$$

Wegen

$$(D.61) \iff \mathbf{x} \perp \dot{\mathbf{x}}$$

folgt aus (D.61)

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}| &= |\mathbf{x} \times m \dot{\mathbf{x}}| \\ &= m \underbrace{|\mathbf{x}|}_{=r} |\dot{\mathbf{x}}|, \end{aligned} \tag{D.63}$$

wegen  $\dot{\mathbf{x}} \perp \mathbf{L}$  also

$$|\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}| = m r |\dot{\mathbf{x}}|^2.$$

Unter Voraussetzung von (D.61) gilt deshalb

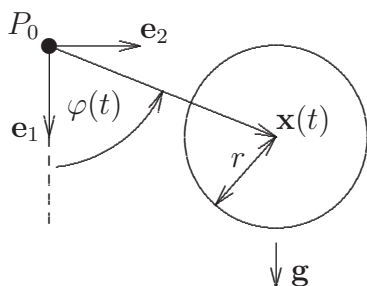
$$(D.62) \iff |\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{\frac{G M}{r}}.$$

**Zu Aufgabe 43b):** Gemäß Abschnitt 3.5.3 der Vorlesung entfernt sich  $m$  genau dann unendlich weit von  $M$ , falls

$$0 > E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{G m M}{|\mathbf{x}|}$$

gilt.<sup>10</sup> Daraus folgt die Behauptung.

**Zu Aufgabe 44:** Sei  $\mathbf{x}(t)$  der Ortsvektor des Systemschwerpunkts, also des Kugelmittelpunkts bzgl. der Aufhängung:



$$|\mathbf{x}(t)| = l,$$

$$\mathbf{x}(t) = l \left( \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \right).$$

Gemäß Abschnitt 3.4.2 (und Abschnitt 3.4.3) der Vorlesung gilt dann bzgl.  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_{\text{ges.}}(t) &= \mathbf{M}_{\text{ges.}}^{\text{äuß.}}(t) \\ &= \mathbf{x}(t) \times m \mathbf{g} + \underbrace{\mathbf{x}_{\text{Aufh.}} \times \mathbf{F}_{\text{Aufh.}}(t)}_{=0}, \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

$$\mathbf{L}_{\text{ges.}}(t) = \underbrace{\mathbf{L}_{\text{Bahn}}(t)}_{=\mathbf{x}(t) \times m \dot{\mathbf{x}}(t)} + \mathbf{L}_{\text{eigen}}. \quad (\text{D.65})$$

Geäß (3.76) gilt außerdem

$$\mathbf{L}_{\text{Bahn}}(t) = m l^2 \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3. \quad (\text{D.66})$$

Mit

$$\mathbf{L}_{\text{eigen}}(t) = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3$$

und

$$\mathbf{x}(t) \times m \mathbf{g} = -l \sin \varphi(t) m |\mathbf{g}| \mathbf{e}_3$$

folgt aus (D.64)–(D.66)

$$\frac{d}{dt} \left( m l^2 \dot{\varphi}(t) + \frac{2}{5} m r^2 \dot{\varphi}(t) \right) \mathbf{e}_3 = -l \sin \varphi(t) m |\mathbf{g}| \mathbf{e}_3$$

und somit die Bewegungsgleichung

$$\boxed{m \left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) \ddot{\varphi}(t) + m |\mathbf{g}| l \sin \varphi(t) = 0.}$$

<sup>10</sup>Aufgrund der Energieerhaltung ist der betrachtete Zeitpunkt irrelevant.

**Anmerkung:** Üblicherweise benutzt man die Näherung  $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$  für kleine Auslenkungen.

**Zu Aufgabe 45:** Bzgl. der (geordneten) ONB  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j} F(g(\mathbf{x})) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} g(\mathbf{x}) \right) \underbrace{F'(g(\mathbf{x}))}_{= \left( \frac{d}{d\xi} F(\xi) \right)_{\xi=g(\mathbf{x})}} \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} F(g(\mathbf{x})) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} F(g(\mathbf{x})) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} F(g(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} g(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} g(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} F'(g(\mathbf{x})) \\ &= F'(g(\mathbf{x})) \text{grad } g(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 46:** Für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  gilt mit

$$V(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -F(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

gemäß Aufgabe 45

$$\begin{aligned} -\text{grad } V(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \text{grad } (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \\ &= f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \\ \frac{\partial}{\partial x^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \end{pmatrix} \\ &= f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 47:** Für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  gilt mit

$$V(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -F(|\mathbf{x}|) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

gemäß Aufgabe 45

$$-\text{grad } V(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) \text{grad } |\mathbf{x}|.$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} |\mathbf{x}| &= \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}{x^j} \\ &\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \frac{\frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}{x^j} \\ &= \frac{x^j}{|\mathbf{x}|} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

also

$$\text{grad } |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 48:** Aus

$$\ddot{F}(t) + \omega^2 F(t) = 0$$

folgt

$$F^{(2\nu)}(t) = (-\omega^2)^\nu F(t) \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad (\text{D.67})$$

und

$$F^{(2\nu+1)}(t) = (-\omega^2)^\nu \dot{F}(t) \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

aufgrund der Anfangsbedingungen also

$$\begin{aligned} F^{(2\nu)}(0) &= 0 & \forall \nu \in \mathbb{Z}_+ \\ F^{(2\nu+1)}(0) &= \omega (-\omega^2)^\nu \\ &= -i (i\omega)^{2\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$F(t)$  ist also beliebig oft ableitbar und die TAYLOR-Entwicklung beliebiger Ordnung  $2n + 1$  ergibt sich zu

$$F(t) = -i \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{2n+1} \frac{1}{\nu!} (i\omega t)^\nu + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^t (t-t')^{2n+1} F^{(2n+2)}(t') dt'.$$

Es ist also nur noch zu zeigen, daß das Restglied

$$\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^t (t-t')^{2n+1} F^{(2n+2)}(t') dt' \stackrel{(\text{D.67})}{=} \frac{(-\omega^2)^{\nu+1}}{(2n+1)!} \int_0^t (t-t')^{2n+1} F(t') dt'$$

für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Das folgt aber aus

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (t-t')^{2n+1} F(t') dt' \right| &\leq \max_{t' \in [0,t]} |F(t')| \underbrace{\int_0^t (t-t')^{2n+1} dt'} \\ &= \left. -\frac{(t-t')^{2n+2}}{2n+2} \right|_{t'=0}^{t'=t} \\ &= \frac{t^{2n+2}}{2n+2} \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Zu Aufgabe 49a):** Für  $\nu = 1$  gilt

$$F^{(\nu)}(\lambda) = \frac{P_\nu(\lambda)}{Q_\nu(1 - (\lambda)^2)} F(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

offensichtlich mit

$$P_1(\lambda) = -2\lambda, \quad Q_1(\lambda) = (1 - \lambda^2)^2.$$

Angenommen, dies sei für  $\nu \leq n$  bereits bewiesen, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(1 - \lambda^2)} F(\lambda) \right) \\ &= \frac{P_n^{(1)}(\lambda) Q_n(1 - \lambda^2) + P_n(\lambda) Q_n^{(1)}(1 - \lambda^2)}{(Q_n(1 - \lambda^2))^2} F(\lambda) \\ &\quad + \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(1 - \lambda^2)} \frac{P_1(\lambda)}{Q_1(1 - \lambda^2)} F(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}, \end{aligned}$$

also die Behauptung für  $\nu = n + 1$  mit

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\lambda) &= Q_1(1 - \lambda^2) \left( P_n^{(1)}(\lambda) Q_n(1 - \lambda^2) + P_n(\lambda) Q_n^{(1)}(1 - \lambda^2) \right) \\ &\quad + Q_n(1 - \lambda^2) P_n(\lambda) P_1(\lambda) \end{aligned}$$

und

$$Q_{n+1}(1 - \lambda^2) = (Q_n(1 - \lambda^2))^2 Q_1(1 - \lambda^2).$$

**Zu Aufgabe 49b):** Offensichtlich gilt für beliebiges  $\mu \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x^{\mu+1}} &> \frac{\sum_{\nu=1}^{\mu+2} \frac{1}{\nu!} x^\nu}{x^{\mu+1}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty. \end{aligned}$$

Für  $x = \frac{1}{1-\lambda^2}$  ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} |\pm 1 - \lambda| (1 - \lambda^2)^\mu e^{+\frac{1}{1-\lambda^2}} &\leq \frac{(1 - \lambda^2)^{\mu+1}}{|\mp 1 - \lambda|} e^{+\frac{1}{1-\lambda^2}} \\ &\rightarrow \infty \quad \text{für } \underbrace{\lambda}_{\in (-1, +1)} \rightarrow \pm 1. \end{aligned}$$

und gemäß a) damit induktiv, daß alle Ableitungen von  $F(\lambda)$  sowohl bei  $\lambda = +1$  als auch bei  $\lambda = -1$  existieren und Null sind.

**Zu Aufgabe 49c):** TAYLOR-Entwickelbarkeit von  $F(\lambda)$  an der Stelle  $\lambda = \pm 1$  würde

$$\begin{aligned} F(\pm 1 + \Delta\lambda) &= \left( e^{\Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}} F(\lambda) \right)_{|\lambda=\pm 1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (\Delta\lambda)^{\nu} F^{(\nu)}(\pm 1) \end{aligned}$$

für  $\Delta\lambda$  hinreichend nahe bei Null bedeuten. Da gemäß b)

$$F^{(\nu)}(\pm 1) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}_+$$

gilt, konvergiert zwar die rechte Seite, liefert aber Null. Die linke Seite ist dagegen für  $\mp\Delta\lambda \in (0, 2)$  positiv.

**Zu Aufgabe 50:** Man sieht leicht, daß die Ableitung von  $f(\lambda)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  existiert:

$$f'(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda = 0, \\ 2\left(\lambda \sin(\lambda^{-2}) - \lambda^{-1} \cos(\lambda^{-2})\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daß dieses  $f'(\lambda)$  an der Stelle  $\lambda = 0$  **nicht** stetig ist, ist offensichtlich.

**Zu Aufgabe 51:** Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} A_{\text{Feder}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Arbeit der Feder während } [0, t'], \\ A_{\text{gesamt}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Arbeit der Gesamtkraft während } [0, t'], \\ A_{\text{äuß}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Arbeit der zusätzlichen Kraft während } [0, t'] \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A_{\text{Feder}}}} &= \int_0^{t'} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_{\text{Feder}}(\mathbf{x}(t))}_{=-\kappa \mathbf{x}(t)} dt \\ &\stackrel{\text{Anfangsbed.}}{=} \underline{\underline{-\frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}(t')|^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{gesamt}} &= \int_0^{t'} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_{\text{gesamt}}(\mathbf{x}(t))}_{=m \ddot{\mathbf{x}}(t)} dt \\ &\stackrel{\text{Anfangsbed.}}{=} \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t')|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \underline{A_{\text{äu\ss}}} &= A_{\text{gesamt}} - A_{\text{Feder}} \\
 &= \underline{\underline{\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t')|^2 + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}(t')|^2}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Gesamtenergie des Systems} \\ \text{Massenpunkt + masselose Feder} \\ \text{zum Zeitpunkt } t'. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 52:** Für die Kraft  $\mathbf{F}_{\text{Exp}}(t)$ , die der Experimentator zur Zeit  $t$  auf  $m$  ausübt, gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_0 - \kappa \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{\text{Exp}}(t) &\stackrel{\text{Newton}}{=} m \ddot{\mathbf{x}}(t) \\
 &\stackrel{\text{Vorgabe}}{=} m \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

Für die Arbeit  $A$ , die der Experimentator während des Zeitintervalls  $[0, t']$  an  $m$  verrichtet ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &= \int_0^{t'} \underbrace{\mathbf{F}_{\text{Exp}}(t)}_{=m\mathbf{b} - \mathbf{F}_0 + \kappa \mathbf{x}(t)} \cdot \underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t)}_{=\mathbf{b}t} dt \\
 &= \mathbf{b} \cdot (m\mathbf{b} - \mathbf{F}_0) \int_0^{t'} t dt + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{b}|^2 \int_0^{t'} t^3 dt \\
 &= \frac{m}{2} |\mathbf{b}t'|^2 - \mathbf{F}_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{b}t'^2 \right) + \frac{\kappa}{2} \left| \frac{1}{2} \mathbf{b}t'^2 \right|^2 \\
 &= \underline{\underline{\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t')|^2 - \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{x}(t') + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}(t')|^2}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Gesamtenergie des Systems} \\ \text{Massenpunkt + Kraftfeld} \\ \text{zum Zeitpunkt } t'. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 53:** Nach Aufgabe 47 ist nur noch zu zeigen, daß

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \implies \Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{y})$$

gilt, falls

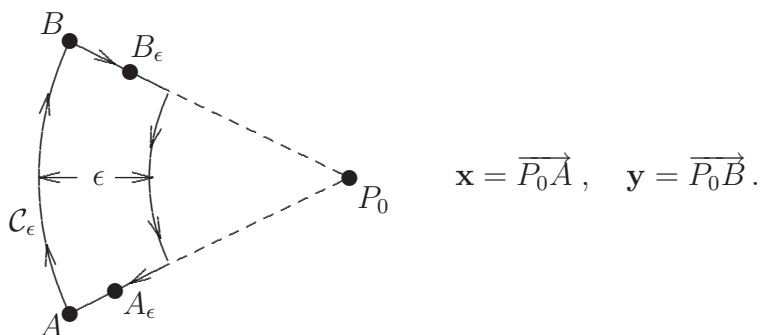
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{D.68}$$

konservativ ( $\Psi$  also auch stetig) ist.

Seien also  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  mit  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ , aber  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  gegeben und sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  konservativ. Nach Folgerung 4.2.8 muß dann

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

für jeden der **geschlossenen** Wege  $C_\epsilon$  gemäß folgender Skizze gelten:



Wegen (D.68) verschwindet das Wegintegral längs der Kreissegmente. Die Anteile längs der Radialteile müssen sich also zu Null aufaddieren. Deshalb muß nach Lemma 4.2.5 (Mittelwertsatz für Wegintegrale) und (D.68)

$$\epsilon \Psi \left( \overrightarrow{P_0 A_\epsilon} \right) - \epsilon \Psi \left( \overrightarrow{P_0 B_\epsilon} \right) = 0 \quad \text{für geeignete } A_\epsilon, B_\epsilon$$

gelten, woraus für  $\epsilon \rightarrow 0$  schließlich  $\Psi \left( \overrightarrow{P_0 A} \right) = \Psi \left( \overrightarrow{P_0 B} \right)$  folgt.

**Zu Aufgabe 54a):** Das Geschwindigkeitsfeld ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \mathbf{e}_3, \quad (\text{D.69})$$

weil das die richtige Richtung und den richtigen Betrag

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x})| = \omega_0 \cdot \text{Abstand von der Drehachse}$$

hat.

**Zu Aufgabe 54b):** Bei Orientierung im Rechtsschraubensinne bzgl.  $\mathbf{e}_3$  gilt

$$C = \left\{ \mathbf{x}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} R (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) : \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \quad (\text{D.70})$$

und damit gemäß Definition des Wegintegrals:

$$\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\varphi)) \cdot \left( \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right) d\varphi.$$

Da  $\left( \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{x}(\varphi), \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right)$  für jedes  $\varphi$  ein rechtshändiges Orthogonalsystem ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\varphi)) \cdot \left( \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right) & \stackrel{(\text{D.69})}{=} \omega_0 |\mathbf{x}(\varphi)| \left| \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right| \\ & \stackrel{(\text{D.70})}{=} \omega_0 R^2 \end{aligned}$$



und somit, auch direkt der Anschauung entsprechend:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\omega_0 R}_{=|\mathbf{v}|} \underbrace{R d\varphi}_{=ds} \\ &= \omega_0 R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \omega_0 R^2 2\pi.\end{aligned}$$

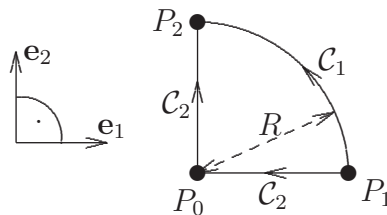
Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

**Zu Aufgabe 54c):** Aus (D.69) folgt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega_0 \begin{pmatrix} -x^2 \\ +x^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

und daraus offensichtlich die stetige Differenzierbarkeit des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

**Zu Aufgabe 55:** Die Wege  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  lassen sich wie folgt skizzieren:



Eine geeignete einfache Parametrisierung von  $\mathcal{C}_1$  ist dementsprechend

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \mathbf{x}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} R(\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) : \varphi \in [0, \pi/2] \right\}.$$

Damit ergibt sich<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\varphi)) \cdot \left( \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\mathbf{F}_0 \cdot \left( \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right)}_{=R(-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2)} d\varphi + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\kappa_2 |\mathbf{x}(\varphi)| \left| \frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) \right|}_{=R^2} d\varphi \\ &= \underbrace{-R F_0^1 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi + R F_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}_{= -R F_0^1 + R F_0^2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} R^2 d\varphi}_{= \frac{\pi}{2} R^2 \kappa_2}\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = R(F_0^2 - F_0^1) + \kappa_2 \frac{\pi}{2} R^2.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Der Kraftanteil  $-\kappa_1 \mathbf{x}$  trägt längs  $\mathcal{C}_1$  nicht bei, da die Wegtangente längs  $\mathcal{C}_1$  stets senkrecht zu  $\mathbf{x}$  ist.

Da  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{x}$  längs  $\mathcal{C}_2$  stets senkrecht zur Wegtangente steht, gilt

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_2} (\mathbf{F}_0 - \kappa_1 \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

und somit, da  $\mathbf{F}_0 - \kappa_1 \mathbf{x}$  konservativ ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{C}_1} (\mathbf{F}_0 - \kappa_1 \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} R(F_0^2 - F_0^1). \end{aligned}$$

Es gilt also insbesondere

$$\kappa_2 \neq 0 \implies \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \neq \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

weil  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{x}$  **nicht**<sup>12</sup> konservativ ist

**Zu Aufgabe 56:** In Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} g^r(r, \vartheta, \varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi)) \cdot \mathbf{e}_r(r, \vartheta, \varphi) \\ &= -\frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_{\partial U_R(0)} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_\mathbf{x}}} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{-GM}{R^2} \underbrace{R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{=|d\mathbf{S}_\mathbf{x}|} \\ &= -GM \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{=4\pi} \\ &= \underline{\underline{-4\pi GM}} \end{aligned}$$

— im Einklang mit dem GAUSSschen Gesetz (4.49).

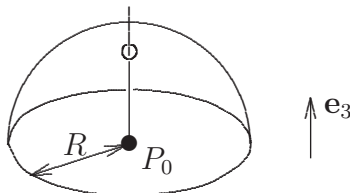
**Zu Aufgabe 57:** Gemäß Abschnitt 4.4.2 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} \int_{U_R(0)} dV_\mathbf{x} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R Rr^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \underbrace{\int_0^R r^2 \, dr}_{=\frac{1}{3}r^3|_0^R} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{\stackrel{\text{4.3.2}}{=} 4\pi} \end{aligned}$$

und somit:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \text{Volumen einer Kugel vom Radius } R.$$

**Zu Aufgabe 58:** Die Halbkugel sei gemäß folgender Skizze orientiert:



Aus Symmetriegründen muß dann für den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  (bzgl.  $P_0$ ) des Schwerpunktes der Halbkugel

$$\mathbf{X} = X^3 \mathbf{e}_3$$

gelten, wobei

$$\begin{aligned} X^3 &= \frac{2}{M} \int_{\text{Halbkugel}} \underbrace{\mu}_{\text{konst.}} \underbrace{x^3}_{=R \cos \vartheta} dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} 2 \frac{\mu}{M} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{=\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}_{=\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \Big|_0^{\pi/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \\ &= 2 \frac{3}{4\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi \end{aligned}$$

mit

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \mu \frac{4}{3} \pi R^3$$

gilt. Daraus folgt:

$$\underline{\underline{\mathbf{X} = \frac{3}{8} R \mathbf{e}_3.}}$$

**Zu Aufgabe 59:** Wir betrachten nur einen einzigen Zeitpunkt und wählen dafür die rechtshändige ONB  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  so, daß der Zylinder das Gebiet

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x^3| < \frac{L}{2}, |x^1|^2 + |x^2|^2 \leq R \right\}$$

ausfüllt.

Dann gilt für den Trägheitstensor  $\theta$  des Zylinders (zum betrachteten Zeitpunkt)

$$\theta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \mu \int_{\mathcal{G}} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e}_k \times \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\}$$

mit

$$\begin{aligned}\mu &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Massendichte} \\ &= \frac{M}{\pi R^2 L}.\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist klar, daß

$$j \neq k \implies \theta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$$

gilt.<sup>13</sup> Daraus folgt

$$\theta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\omega}_1)(\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\omega}_2) \theta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j).$$

Es sind also nur noch die Hauptträgheitsmomente

$$\theta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \theta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \text{ und } \theta(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)$$

zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\theta(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)}} &= \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{h=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \rho^2 \underbrace{\rho \, d\rho \, d\varphi \, dh}_{=dV} \\ &= \frac{2M}{R^2} \int_{\rho=0}^R \rho^3 \, d\rho \\ &= \underline{\underline{\frac{M}{2} R^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\theta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}} &= \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{h=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R (\rho^2 \sin^2 \varphi + h^2) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dh \\ &= \frac{M}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{=\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi}_{=\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi})^2 \, d\varphi}_{=\pi} + \frac{M}{L} \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} h^2 \, dh}_{=\frac{M}{12} L^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{M}{4} \left( R^2 + \frac{L^2}{3} \right)}}.\end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Denn:

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \theta(\mathbf{e}_j, -\mathbf{e}_k) \\ &\stackrel{\text{Linearität}}{=} -\theta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \quad \text{für } j \neq k \neq 3.\end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 60:** Für einen beliebigen festen Zeitpunkt  $t$  wählen wir eine Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}(t)$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j \\ &\stackrel{(4.40)}{=} \sum_{j=1}^3 \theta_t(\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \underbrace{\omega}_{\neq 0} \theta_t(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{L}(t) \propto \mathbf{e}(t) \iff \theta_t(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}(t)) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

**Anmerkung:** Schon für Punktteilchen gilt  $\mathbf{L}(t) \stackrel{\text{i.a.}}{\not\propto} \mathbf{e}(t)$ .

**Zu Aufgabe 61a):** Wir wählen eine Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ . Voraussetzungsgemäß gilt dann

$$\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|} = \frac{x^3}{|x^3|} \mathbf{e}_3$$

und

$$d|x^3| = |\mathbf{v}(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Daraus folgt

$$\underline{\underline{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = d x^3 \mathbf{e}_3}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_R(0)} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d \underbrace{R \cos \vartheta}_{=x^3} \underbrace{\cos \vartheta}_{=\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_r} \underbrace{R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{=|d\mathbf{S}|} \\ &= r^3 d \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta}_{= -\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \Big|_0^{\pi} = 2/3} \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 d. \end{aligned}$$

Mit  $|U_R(0)| = \frac{4}{3} \pi R^3$  folgt daraus

$$\frac{1}{|U_R(0)|} \int_{\partial U_R(0)} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = d.$$

**Zu Aufgabe 61b):** Für die Ausdehnung in die Richtungen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  mit den entsprechenden relativen Längenänderungen pro Zeiteinheit  $d_1, d_2, d_3$  gilt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 d_j x^j \mathbf{e}_j$$

und somit

$$\int_{\partial U_R(0)} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x = \frac{4}{3} \pi R^3 (d_1 + d_2 + d_3),$$

in Übereinstimmung mit

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = d_1 + d_2 + d_3$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_R(0)} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x & \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \int_{U_R(0)} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV_x \\ & = (d_1 + d_2 + d_3) |U_R(0)|. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 62:** Aus Symmetriegründen muß

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = g(\underbrace{r}_{=|\mathbf{x}|}) \underbrace{\mathbf{e}_r}_{=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|}$$

und somit

$$\underbrace{\int_{\partial U_r(0)} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}_x}_{=g(r)|\partial U_r(0)|} \stackrel{\text{GAUSSsches Ges.}}{=} -4\pi G \underbrace{\int_{U_r(0)} \mu(\mathbf{x}) dV_x}_{= \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 \mu & \text{für } r \leq R \\ \frac{4}{3} \pi R^3 \mu & \text{für } r \geq R \\ =M & \end{cases}}$$

gelten. Daraus folgt

$$g(r) = \begin{cases} -G \frac{4}{3} \pi \mu r & \text{für } r \leq R \\ -\frac{GM}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

und somit gemäß Vorlesung  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{x})$  mit:

$$\underbrace{V(\mathbf{x})}_{\text{stetig differenzierbar}} - \underbrace{V_0}_{\text{Konvention}} = \begin{cases} -\frac{GM}{|\mathbf{x}|} & \text{für } |\mathbf{x}| \geq R, \\ \frac{2}{3} \pi G \mu |\mathbf{x}|^2 - \underbrace{\frac{3GM}{2R}}_{\text{zwecks Stetigkeit}} & \text{für } |\mathbf{x}| \leq R. \end{cases}$$

**Zu Aufgabe 63:** Die  $(\mathbf{e}_3 = -\mathbf{g}/|\mathbf{g}|)$ -Komponente der gesamten Oberflächenkraft auf  $\mathcal{K}$  ist

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \int_{\partial\mathcal{G}} \underbrace{\left(-p(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)}_{=d\mathbf{S}_x} |d\mathbf{S}_x| &= \int_{\partial\mathcal{G}} \left(-p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3\right) \cdot d\mathbf{S}_x \\ &\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \left(-p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3\right) dV_x \\ &= - \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial x^3} p(\mathbf{x}) dV_x, \end{aligned}$$

wobei  $p(\mathbf{x})$  die Druckverteilung innerhalb der Flüssigkeit bezeichnet. Mit

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \mu \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} + \text{const.} \\ &= -\mu |\mathbf{g}| x^3 + \text{const.} \end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung.

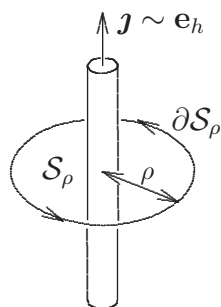
**Anmerkung:** Das Archimedische Prinzip ist physikalisch (auch ohne die verwendeten Näherungen) sehr plausibel:

Wenn man den Körper durch ruhende Flüssigkeit ersetzt, kompensieren sich Oberflächen- und Volumenkräfte. Die von außen auf  $\partial\mathcal{G}$  wirkende — von den tatsächlichen Gleichgewichtsverhältnissen im Inneren von  $\mathcal{G}$  unabhängige — gesamte Oberflächenkraft stimmt also bis auf Vorzeichen mit der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge überein.

**Zu Aufgabe 64:** Indem wir  $\mathbf{e}_h$  in Richtung von  $\mathbf{j}$  wählen, ist in Zylinderkoordinaten<sup>14</sup>

$$H^\varphi(\rho, \varphi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}(\rho, \varphi, h) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\rho, \varphi, h)$$

leicht zu bestimmen:



$$\begin{aligned} 2\pi\rho H^\varphi &\stackrel{\text{Rot.-Symm.}}{=} \int_{\partial\mathcal{S}_\rho} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\text{STOKES}}{=} \int_{\mathcal{S}_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ &\stackrel{\text{MAXWELL}}{=} \int_{\mathcal{S}_\rho} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

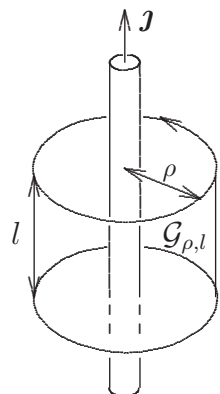
Das Ergebnis lautet

$$H^\varphi(\rho, \varphi, h) = \frac{J_\rho}{2\pi\rho},$$

<sup>14</sup>Siehe Abschnitt 4.3.2 der Vorlesung.

wobei  $J_\rho$  den Gesamtstrom durch die Röhre vom Radius  $\rho$  um die  $\mathbf{e}_h$ -Achse in Richtung von  $\mathbf{e}_h$  ( $\geq 0$ ) bezeichnet. Es ist aber noch  $H^\rho = H^h = 0$  zu zeigen:

Für einen unendlich langen Stromfaden sollte  $\mathbf{H}$  unabhängig von  $h$  sein. Daher:

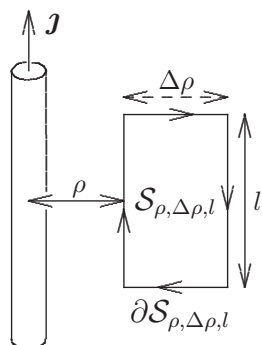


$$\begin{aligned} 2\pi\rho l \underline{\underline{H^\rho}} &= \int_{\partial\mathcal{G}_{\rho,l}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ &\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \int_{\mathcal{G}_{\rho,l}} \operatorname{div} \mathbf{H} \, dV \\ &\stackrel{\text{MAXWELL}}{=} \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

Andererseits muß  $H^h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_h$  wegen

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \stackrel{\text{MAXWELL}}{\propto} \propto \mathbf{e}_h \tag{D.71}$$

konstant sein:



$$\begin{aligned} l \left( H^h(\rho) - H^h(\rho + \Delta\rho) \right) &= \int_{\partial S_{\rho, \Delta\rho, l}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\text{STOKES}}{=} \int_{S_{\rho, \Delta\rho, l}} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ &\stackrel{\text{MAXWELL}}{=} 0. \end{aligned}$$

Damit  $H^h$  in unendlichem Abstand vom Stromfaden verschwindet, muß  $H^h$  also überall verschwinden.

**Zu Aufgabe 65:** Für stetig differenzierbares  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  gilt

$$\begin{aligned} &\nabla \times \left( -\mathbf{x} \times \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda \right) \\ &\stackrel{(4.94)}{=} \underbrace{\left( \nabla \cdot \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda \right)}_{=\int_0^1 \lambda^2 \operatorname{div} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda} \mathbf{x} - \underbrace{\left( \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda \cdot \nabla \right)}_{=\int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda} \mathbf{x} \\ &\quad + \underbrace{\left( \nabla \cdot \mathbf{x} \right)}_{=3} \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda + \underbrace{\mathbf{x} \cdot \nabla \int_0^1 \lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda}_{=\int_0^1 \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda}. \end{aligned}$$



Mit

$$\int_0^1 \underbrace{\left( 2\lambda \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) + \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) \right)}_{= \frac{d}{d\lambda} (\lambda^2 \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}))} d\lambda = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 66:** Aus

$$\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}(t)) \quad (4.5)$$

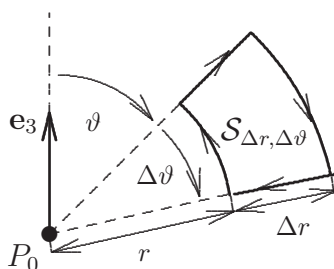
und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) &= \mathbf{e}_r(r, \vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) &= r \mathbf{e}_\vartheta(r, \vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) &= r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} (\text{grad } \Phi)^r &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_r \cdot \text{grad } \Phi = \frac{\partial}{\partial r} \Phi, \\ (\text{grad } \Phi)^\vartheta &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\vartheta \cdot \text{grad } \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi, \\ (\text{grad } \Phi)^\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\varphi \cdot \text{grad } \Phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 67:** Zur Bestimmung von  $(\text{rot } \mathbf{j})^\varphi = (\text{rot } \mathbf{j}) \cdot \mathbf{e}_\varphi$  seien Flächenstücke  $\mathcal{S}_{\Delta r, \Delta \vartheta}$  folgender Art betrachtet:



Dafür gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial \mathcal{S}_{\Delta r, \Delta \vartheta}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \int_r^{r+\Delta r} \left( j^r(r', \vartheta, \varphi) - j^r(r', \vartheta + \Delta \vartheta, \varphi) \right) dr' \\
 & \quad + \int_{\vartheta}^{\vartheta+\Delta \vartheta} \left( (r + \Delta r) j^\vartheta(r + \Delta r, \vartheta', \varphi) - r j^\vartheta(r, \vartheta', \varphi) \right) d\vartheta' \\
 & \stackrel{\text{Satz 3.3.4}}{=} \left( j^r(r_1, \vartheta, \varphi) - j^r(r_1, \vartheta + \Delta \vartheta, \varphi) \right) \Delta r \\
 & \quad + \left( (r + \Delta r) j^\vartheta(r + \Delta r, \vartheta_1, \varphi) - r j^\vartheta(r, \vartheta_1, \varphi) \right) \Delta \vartheta \\
 & \quad \text{für geeignete } r_1 \in [r, r + \Delta r], \vartheta_1 \in [\vartheta, \vartheta + \Delta \vartheta] \\
 & \stackrel{\text{Satz 3.2.2}}{=} - \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^r(r_1, \vartheta, \varphi) \right)_{|\vartheta=\vartheta_2} \Delta \vartheta \Delta r \\
 & \quad + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r j^\vartheta(r_1, \vartheta, \varphi)) \right)_{|r=r_2} \Delta r \Delta \vartheta \\
 & \quad \text{für geeignete } r_\nu \in [r, r + \Delta r], \vartheta_\nu \in [\vartheta, \vartheta + \Delta \vartheta].
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{S}_{\Delta r, \Delta \vartheta}| &= \int_{r'=r}^{r+\Delta r} \int_{\vartheta'=\vartheta}^{\vartheta+\Delta \vartheta} r \, d\vartheta' \, dr' \\
 & \stackrel{\text{Satz 3.3.4}}{=} r_3 \Delta r \Delta \vartheta \quad \text{für geeignetes } r_3 \in [r, r + \Delta r]
 \end{aligned}$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 & \underline{\underline{(\text{rot } \mathbf{j})^\varphi(r, \vartheta, \varphi)}} \\
 & \stackrel{\text{Folg. 4.3.9}}{=} \lim_{\Delta r, \Delta \vartheta \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{S}_{\Delta r, \Delta \vartheta}|} \int_{\partial \mathcal{S}_{\Delta r, \Delta \vartheta}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \lim_{\substack{r_\nu \rightarrow r \\ \vartheta_\nu \rightarrow \vartheta}} \frac{1}{r_3} \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} (r j^\vartheta(r_1, \vartheta, \varphi)) \right)_{|r=r_2} - \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^r(r_1, \vartheta, \varphi) \right)_{|\vartheta=\vartheta_2} \right) \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^r}}.
 \end{aligned}$$

Analog lassen sich  $(\text{rot } \mathbf{j})^\vartheta$  und  $(\text{rot } \mathbf{j})^r$  bestimmen:

Für die Flächenstücke

$$\hat{\mathcal{S}}_{\Delta r, \Delta \varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x}(\varphi', r') \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(\underbrace{r', \vartheta, \varphi'}_{\text{Kugelkoord.}}) : r' \in [r, r + \Delta r], \varphi' \in [\varphi, \varphi + \Delta \varphi] \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\hat{\mathcal{S}}_{\Delta r, \Delta \varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta \varphi} \left( r j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi') - (r + \Delta r) j^{\varphi}(r + \Delta r, \vartheta, \varphi') \right) dr' \\
 & \quad + \int_r^{r + \Delta r} \left( j^r(r', \vartheta, \varphi + \Delta \varphi) - j^r(r', \vartheta, \varphi) \right) dr' \\
 &= \left( r j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi_1) - (r + \Delta r) j^{\varphi}(r + \Delta r, \vartheta, \varphi_1) \right) \sin \vartheta \Delta \varphi \\
 & \quad \left( j^r(r_1, \vartheta, \varphi + \Delta \varphi) - j^r(r_1, \vartheta, \varphi) \right) \Delta r \\
 &= - \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi_1) \right) \right) \Big|_{r=r_2} \Delta r \sin \vartheta \varphi \\
 & \quad + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} j^r(r_1, \vartheta, \varphi) \right) \Big|_{\varphi=\varphi_2} \Delta \varphi \Delta r.
 \end{aligned}$$

mit geeigneten  $r_\nu \in [r, r + \Delta r]$  und  $\varphi_\nu \in [\varphi, \varphi + \Delta \varphi]$ . Mit

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{\mathcal{S}}_{\Delta r, \Delta \varphi} \right| &= \int_{r'=r}^{r+\Delta r} \int_{\varphi'}^{\varphi+\Delta \varphi} r' \sin \vartheta d\varphi' dr' \\
 &= r_3 \sin \vartheta d\varphi' dr'
 \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{(\text{rot } \mathbf{j})^\vartheta}} &= \lim_{\Delta r, \Delta \varphi \rightarrow +0} \frac{1}{\left| \hat{\mathcal{S}}_{\Delta r, \Delta \varphi} \right|} \int_{\partial \hat{\mathcal{S}}_{\Delta r, \Delta \varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j^\varphi)}}.
 \end{aligned}$$

Für die Flächenstücke

$$\mathcal{S}_{\Delta \vartheta, \Delta \varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x}(\vartheta', \varphi') \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(r, \vartheta', \varphi') : \vartheta' \in [\vartheta, \vartheta + \Delta \vartheta], \varphi' \in \varphi, \varphi + \Delta \varphi \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial \mathcal{S}_{\Delta\vartheta, \Delta\varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\vartheta}^{\vartheta + \Delta\vartheta} \left( j^{\vartheta}(r, \vartheta', \varphi) - j^{\vartheta}(r, \vartheta', \varphi + \Delta\varphi) \right) r \, d\vartheta' \\
 & \quad + \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} \left( \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) j^{\varphi}(r, \vartheta + \Delta\vartheta, \varphi') - \sin \vartheta j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi') \right) r \, d\varphi' \\
 &= \left( j^{\vartheta}(r, \vartheta_1, \varphi) - j^{\vartheta}(r, \vartheta_1, \varphi + \Delta\varphi) \right) r \, \Delta\vartheta \\
 & \quad \left( \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) j^{\varphi}(r, \vartheta + \Delta\vartheta, \varphi_1) - \sin \vartheta j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi_1) \right) r \, \Delta\varphi \\
 &= - \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} j^{\vartheta}(r, \vartheta_1, \varphi) \right)_{|\varphi=\varphi_2} \Delta\varphi \, r \, \Delta\vartheta \\
 & \quad + \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta j^{\varphi}(r, \vartheta, \varphi_1) \right) \right)_{|\vartheta=\vartheta_2} \Delta\vartheta \, r \, \Delta\varphi
 \end{aligned}$$

mit geeigneten  $\vartheta_\nu \in [\vartheta, \vartheta + \Delta\vartheta]$  und  $\varphi_\nu \in [\varphi, \varphi + \Delta\varphi]$ . Mit

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{S}_{\Delta\vartheta, \Delta\varphi}| &= \int_{\vartheta'=\vartheta}^{\vartheta'+\Delta\vartheta} \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi'+\Delta\varphi} r^2 \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' \\
 &= r^2 \sin \vartheta_3 \, \Delta\vartheta \, \Delta\varphi
 \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{(\operatorname{rot} \mathbf{j})^r}} &= \lim_{\Delta\vartheta, \Delta\varphi \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{S}_{\Delta\vartheta, \Delta\varphi}|} \int_{\partial \mathcal{S}_{\Delta\vartheta, \Delta\varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^{\varphi}) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^{\vartheta}}}.
 \end{aligned}$$

Im Einklang mit dem Ergebnis von Aufgabe 53 gilt somit

$$\text{für Radialfelder : } \operatorname{rot} \mathbf{j} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \varphi} j^r = \frac{\partial}{\partial \vartheta} j^{\varphi} = 0.$$

**Zu Aufgabe 68:** Für die Gebiete

$$\mathcal{G}_{\Delta r, \Delta\vartheta, \Delta\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x}(r', \vartheta', \varphi') : r' \in [r, r + \Delta r], \vartheta' \in [\vartheta, \vartheta + \Delta\vartheta], \varphi' \in [\varphi, \varphi + \Delta\varphi] \}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial \mathcal{G}_{\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{r'=r}^{r+\Delta r} \int_{\vartheta'=\vartheta}^{\vartheta+\Delta \vartheta} \left( j^\varphi(r', \vartheta', \varphi + \Delta \varphi) - j^\varphi(r', \vartheta', \varphi) \right) r' dr' d\vartheta' \\
& \quad \int_{\vartheta'=\vartheta}^{\vartheta+\Delta \vartheta} \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi+\Delta \varphi} \left( (r + \Delta r)^2 j^r(r + \Delta r, \vartheta', \varphi') - r^2 j^r(r, \vartheta', \varphi') \right) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \\
& \quad \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi+\Delta \varphi} \int_{r'=r}^{r+\Delta r} \left( \sin(\vartheta + \Delta \vartheta) j^\vartheta(r', \vartheta + \Delta \vartheta, \varphi') - \sin \vartheta j^\vartheta(r', \vartheta, \varphi') \right) r' dr' d\varphi' \\
&= \left( j^\varphi(r_1, \vartheta_1, \varphi + \Delta \varphi) - j^\varphi(r_1, \vartheta_1, \varphi) \right) r_1 \Delta r \Delta \vartheta \\
& \quad + \left( (r + \Delta r)^2 j^r(r + \Delta r, \vartheta_2, \varphi_2) - r^2 j^r(r, \vartheta_2, \varphi_2) \right) \sin \vartheta_4 \Delta \vartheta \Delta \varphi \\
& \quad + \left( \sin(\vartheta + \Delta \vartheta) j^\vartheta(r_3, \vartheta + \Delta \vartheta, \varphi_3) - \sin \vartheta j^\vartheta(r_3, \vartheta, \varphi_3) \right) r_4 \Delta r \Delta \varphi \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi(r_1, \vartheta_1, \varphi) \right)_{|\varphi=\varphi_1} \Delta \varphi r_1 \Delta r \Delta \vartheta \\
& \quad + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r(r, \vartheta_2, \varphi_2)) \right)_{|r=r_2} \Delta r \sin \vartheta_4 \Delta \vartheta \Delta \varphi \\
& \quad + \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\vartheta(r_3, \vartheta, \varphi_3)) \right)_{|\vartheta=\vartheta_3} \Delta \vartheta r_4 \Delta r \Delta \varphi
\end{aligned}$$

mit geeigneten  $r_\nu \in [r, r + \Delta r]$ ,  $\vartheta_\nu \in [\vartheta, \vartheta + \Delta \vartheta]$  und  $\varphi_\nu \in [\varphi, \varphi + \Delta \varphi]$ . Mit

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_{\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi}| &= \int_{r'=r}^{r+\Delta r} \int_{\vartheta'=\vartheta}^{\vartheta+\Delta \vartheta} \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi+\Delta \varphi} r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \\
&= r_5^2 \sin \vartheta_5 \Delta r \Delta \vartheta \Delta \varphi
\end{aligned}$$

für geeignete  $r_5 \in [r, r + \Delta r]$  und  $\vartheta_5 \in [\vartheta, \vartheta + \Delta \vartheta]$  folgt daraus

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\operatorname{div} \mathbf{j}}} &\stackrel{\text{Folg. 4.4.10}}{=} \lim_{\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi \rightarrow +0} \frac{1}{|\mathcal{G}_{\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi}|} \int_{\partial \mathcal{G}_{\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\vartheta)}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\text{für Zentralfelder : } \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \\
&\iff \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r) = 0 \quad \forall r \neq 0 \\
&\iff j^r(r, \vartheta, \varphi) = \frac{f(\vartheta, \varphi)}{r^2} \quad \forall r \neq 0.
\end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 69:** Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &\stackrel{\text{Def.}}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \\
 &\stackrel{\text{Aufg. 68}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 (\operatorname{grad} \Phi)^r \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta (\operatorname{grad} \Phi)^\vartheta \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{grad} \Phi)^\varphi \\
 &\stackrel{\text{Aufg. 66}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi) - r \Phi \right) \\
 &= r \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 (r \Phi) .
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 70a):** Gemäß (4.15) und (4.3) gilt<sup>15</sup>

$$j^k(\mathbf{x}) - (j^k(0) + j_{\text{lin}}^k(\mathbf{x})) = \int_0^1 (1-\lambda) \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{x}})^2 j^k \right) (\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda \quad \forall k \in \{1, 2, 3\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.72})$$

bzgl.  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mit

$$\begin{aligned}
 j_{\text{lin}}^k(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( (\mathbf{x} \cdot \nabla) j_{\text{lin}}^k(\mathbf{x}) \right)_{|\mathbf{x}=0} \\
 &= \sum_{l=1}^3 x^l \left( \frac{\partial}{\partial x^l} j^k(\mathbf{x}) \right)_{|\mathbf{x}=0} \quad \forall k \in \{1, 2, 3\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 . \quad (\text{D.73})
 \end{aligned}$$

Aus (D.73) folgt

$$\mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} j_{11}^1 & j_{12}^1 & j_{13}^1 \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{23}^2 \\ j_{31}^3 & j_{32}^3 & j_{33}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad (\text{D.74})$$

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{x}} j^k)(\lambda \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} j^k(\lambda \mathbf{x}) \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} j^k(\lambda \mathbf{x}) .$$

mit

$$j^k_l \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x^l} j^k(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x}=0}.$$

$$\sup_{0 < \|\mathbf{x}\| < 1} \frac{\left| \mathbf{j}(\mathbf{x}) - \left( \mathbf{j}(0) + \mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \right) \right|}{|\mathbf{x}|^2} < \infty$$

folgt aus (D.72) (mit der Dreiecksungleichung) wegen

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \|\mathbf{x}\| < 1} \left| \int_0^1 (1-\lambda) \left( (\mathcal{L}_{\mathbf{x}})^2 j^k \right) (\lambda \mathbf{x}) \, d\lambda \right| / |\mathbf{x}|^2 \\ &= \sup_{0 < \|\mathbf{x}\| < 1} \sup_{\lambda \in [0,1]} \left| \int_0^1 (1-\lambda) (\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} )^2 j^k (\lambda \mathbf{x} + \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}'=0} \, d\lambda \right| / |\mathbf{x}|^2 \\ &= \sup_{0 < \|\mathbf{x}\| < 1} \sup_{\lambda \in [0,1]} \left| \int_0^1 (1-\lambda) \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \right)^2 j^k (\lambda \mathbf{x} + \mathbf{x}') \, d\lambda \right| \Big|_{\mathbf{x}'=0} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 70b):** Aus (D.74) folgt

$$\text{rot } \mathbf{j}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \stackrel{(4.34)}{=} \begin{pmatrix} j^3_2 - j^2_3 \\ j^1_3 - j^3_1 \\ j^2_1 - j^1_2 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.75})$$

und daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 70c):** Aus (D.73) folgt

$$\text{rot } \mathbf{j}(0) = \text{rot } \mathbf{j}_{\text{lin}}(0)$$

und daraus mit (D.75)

$$\frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{j})(0) \times \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (j^1_3 - j^3_1) x^3 - (j^2_1 - j^1_2) x^2 \\ (j^2_1 - j^1_2) x^1 - (j^3_2 - j^2_3) x^3 \\ (j^3_2 - j^2_3) x^2 - (j^1_3 - j^3_1) x^1 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Mit (D.74) ergibt sich daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 71:** Für  $f(z) = z$  lauten die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Re(f(x+iy)) &= + \frac{\partial}{\partial y} \Im(f(x+iy)) \\ \frac{\partial}{\partial x} \Im(f(x+iy)) &= - \frac{\partial}{\partial y} \Re(f(x+iy)) \end{aligned}$$

explizit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} x &= +\frac{d}{dy} y, \\ \frac{\partial}{\partial x} y &= -\frac{d}{dy} x\end{aligned}$$

und sind offensichtlich für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllt. Dementsprechend ist  $f(z) = z$  in ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar und es gilt

$$\underline{\underline{\frac{d}{dz} z}} = \frac{\partial}{\partial x} (x + iy) \underline{\underline{= 1}} \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Für  $f(z) = e^z$  lauten die CAUCHY-RIEMANNSchen Differentialgleichungen explizit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) &= +\frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y), \\ \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) &= -\frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y)\end{aligned}$$

und sind ebenfalls für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllt. Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\frac{d}{dz} e^z}} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^x (\cos y + i \sin y)) \\ &= \underline{\underline{e^z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 72:** Die Aussage

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{D.76}$$

ist für  $n = 0$  trivial, für  $n = 1$  in Aufgabe 71 bewiesen und folgt damit für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion nach  $n$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} z^{n+1} &\stackrel{\text{Produkt.}}{=} \underbrace{\left(\frac{d}{dz} z\right)}_{\substack{= 1 \\ \text{Aufg. 71}}} z^n + \underbrace{\left(\frac{d}{dz} z^n\right)}_{\substack{= n z^{n-1} \\ \text{Voraus.}}} z \\ &= (1 + n) z^n.\end{aligned}$$

Für  $z \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  folgt damit auch

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} z^{-n} &= \frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} \\ &\stackrel{\text{Quotientenr.}}{=} \frac{\left(\frac{d}{dz} 1\right) z^n - 1 \left(\frac{d}{dz} z^n\right)}{(z^n)^1} \\ &\stackrel{\text{(D.76)}}{=} -n z^{-n-1}.\end{aligned}$$



Also:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Dementsprechend ist  $f(z) = z^n$  für  $n \in \mathbb{Z}_+$  in ganz  $\mathbb{C}$ , für  $-n \in \mathbb{N}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph.

Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(z^n) & \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \underbrace{\left( \frac{d}{dz} z^n \right)}_{\substack{= n z^{n-1} \\ \text{s.o.}}} \underbrace{\left( \frac{d}{dz'} e^{z'} \right)}_{\substack{= e^{z'} \\ \text{Aufg. D.76}}} \Big|_{z'=z^n} \\ & = \frac{d}{dz} \exp(z^n) \end{aligned}$$

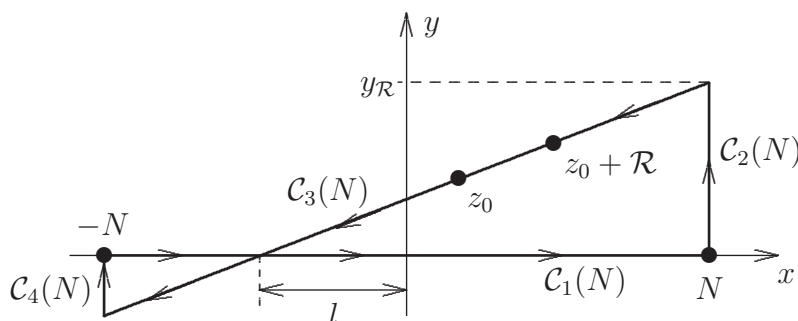
für  $z \in \mathbb{C}$ , falls  $n \in \mathbb{Z}_+$ , für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , falls  $-n \in \mathbb{N}$ .

Dementsprechend ist  $f(z) = \exp(z^n)$  für  $n \in \mathbb{Z}_+$  in ganz  $\mathbb{C}$ , für  $-n \in \mathbb{N}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph.

**Zu Aufgabe 73a):** O.B.d.A. sei  $\Re(\mathcal{R}) > 0$  angenommen. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}, N} = \mathcal{C}_1(N) + \dots + \mathcal{C}_4(N) \quad (\text{D.77})$$

für die Wege  $\mathcal{C}_\nu(N)$  gemäß folgender Skizze:



Dabei ist z.B.

$$\left( z(y) \stackrel{\text{def}}{=} N + iy, 0, y_{\mathcal{R}} \right)$$

eine einfache Parametrisierung von  $\mathcal{C}_2(N)$  und dementsprechend gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_2(N)} e^{-z^2} dz \right| & = \left| \int_0^{y_{\mathcal{R}}} e^{-(N+iy)^2} \underbrace{\frac{dz(y)}{dy}}_{=i} dy \right| \\ & \leq |y_{\mathcal{R}}| \max_{|y| \leq |y_{\mathcal{R}}|} \left| e^{-(N+iy)^2} \right| \\ & \leq |y_{\mathcal{R}}| e^{-N^2 + N|y_{\mathcal{R}}|}. \end{aligned} \quad (\text{D.78})$$

Wegen

$$\Re(\mathcal{R}^2), \Re(\mathcal{R}) > 0 \implies \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\Im(\mathcal{R})|}{\Re(\mathcal{R})} < 1$$

gilt

$$|y_{\mathcal{R}}| \leq (l + N) \underbrace{\lambda}_{<1}, \quad (\text{D.79})$$

also

$$N^2 - N|y_{\mathcal{R}}| \geq \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} N^2 - l\lambda N$$

und somit gemäß (D.78), (D.79)

$$\int_{\mathcal{C}_2(N)} e^{-z^2} dz \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{D.80})$$

Analog zeigt man

$$\int_{\mathcal{C}_4(N)} e^{-z^2} dz \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{D.81})$$

Andererseits gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1(N)} e^{-z^2} dz &= \int_{-N}^{+N} e^{-x^2} dx \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (\text{D.82})$$

Da

$$\left( z(x) \stackrel{\text{def}}{=} z_0 + \mathcal{R}x, -\left(N + \Re(z_0)\right), +\left(N - \Re(z_0)\right) \right)$$

eine einfache Parametrisierung von  $-\mathcal{C}_3(N)$  ist, gilt schließlich noch

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3(N)} e^{-z^2} dz &= - \int_{-N - \Re(z_0)}^{+N - \Re(z_0)} e^{-(\mathcal{R}x + z_0)^2} \underbrace{\frac{dz(x)}{dx}}_{=\mathcal{R}} dx \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x + z_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Mit

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}} e^{-z^2} dz \stackrel{(\text{D.77})}{=} \sum_{\nu=1}^4 \int_{\mathcal{C}_{\nu}(N)} e^{-z^2} dz$$

und (D.80)–(D.82) folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 73b):** Aus dem CAUCHYSchen Integralsatz folgt

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}} e^{-z^2} dz = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

und daraus mit a):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx = \frac{1}{\mathcal{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\iint e^{-x^2-y^2} dx dy} \\ &= \sqrt{2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} dr} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 74:** Jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_\psi$  hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r > 0, \quad \varphi \in (\psi - 2\pi, \psi).$$

Deshalb ist

$$\text{sqrt}_\psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[r]{r} e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad \forall r > 0, \varphi \in (\psi - 2\pi, \psi)$$

eine Definition von  $\text{sqrt}_\psi$  auf  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_\psi$  mit dem Wertebereich

$$\text{sqrt}_\psi(\mathcal{S}_\psi) = \left\{ e^{i\frac{\psi-\pi}{2}} z : z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0 \right\}.$$

Diese Funktion ist die Umkehrfunktion der auf  $\text{sqrt}_\psi(\mathcal{S}_\psi)$  eingeschränkten holomorphen Funktion  $f(z) = z^2$  und damit — gemäß komplexer Differentiationsregel für die Umkehrfunktion — ebenfalls holomorph:

$$\frac{d}{dz} \text{sqrt}_\psi(z) = \frac{1}{2 \text{sqrt}_\psi(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_\psi.$$

**Zu Aufgabe 75:** Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+z_0)^2+1} &= \frac{1}{\left((x+z_0)+i\right)\left((x+z_0)-i\right)} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x+z_0-i} - \frac{1}{x+z_0+i} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

ist der Integrand stetig und für die Funktionen

$$f_\pm(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{i(z+z_0)}}{z+z_0 \pm i} \quad (\text{D.84})$$

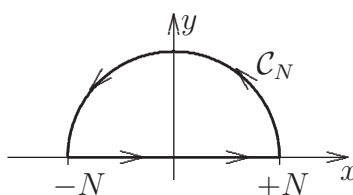
gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mp i - z_0}(F_{\pm}) &\stackrel{\text{D4.5.15}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(\mp i - z_0)} f_{\pm}(z') \, dz' \quad \text{für hinr. kleines } r > 0 \\ &\stackrel{\text{L4.5.10}}{=} \begin{cases} e^{\pm 1} & \text{für } z + z_0 \pm i = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

Außerdem gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} \, dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_N} \frac{e^{i(z+z_0)}}{1+(z+z_0)^2} \, dz$$

für die wie folgt skizzierten geschlossenen Wege  $\mathcal{C}_N$ :



Mit

$$\int_{\mathcal{C}_N} \frac{e^{i(z+z_0)}}{1+(z+z_0)^2} \, dz \stackrel{(\text{D.84}), (\text{D.83})}{=} \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{C}_N} f_-(z) \, dz - \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{C}_N} f_+(z) \, dz$$

und

$$\int_{\mathcal{C}_N} f_{\pm}(z) \, dz \stackrel{\text{F4.5.16}}{=} \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}_{\mp i - z_0}(f_{\pm}) & \text{falls } \Im(z_0) < \mp 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für hinr. großes } N \in \mathbb{N}$$

folgt daraus

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{Res}_{+i-z_0}(f_-) - \operatorname{Res}_{-i-z_0}(f_+) & \text{falls } \Im(z_0) < -1, \\ \operatorname{Res}_{+i-z_0}(f_-) & \text{falls } \Im(z_0) \in (-1, +1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit (D.85) folgt daraus schließlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+z_0)}}{1+(x+z_0)^2} \, dx = \begin{cases} \pi(1/e - e) & \text{falls } \Im(z_0) < 1, \\ \pi/e & \text{falls } \Im(z_0) \in (-1, +1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Zu Aufgabe 76:** Offensichtlich ist  $\ln_{\psi}(z)$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\psi}$  ( $\mathcal{S}_{\psi}$  wie in Aufgabe 74 angegeben) definiert und durch

$$\ln_{\psi}(r e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi \quad \forall r > 0, \varphi \in (\psi - 2\pi, \psi)$$

gegeben. Die komplexe Ableitung ist

$$\frac{d}{dz} \ln_{\psi}(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\psi}.$$

Mit der Definition

$$(z_1)^{z_2} \stackrel{\text{def}}{=} e^{z_2 \ln_{\psi}(z_1)} \quad \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\psi}, z_2 \in \mathbb{C}$$

gilt u.a.

$$\left( (z_1)^{z_2} \right)^{z_3} = (z_1)^{z_2 z_3} \quad (*_1)$$

für alle  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\psi}$  und  $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  mit  $z_2 \ln_{\psi}(z_1) \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\psi}$ . Im Falle  $\psi \in (0, 2\pi)$  gilt auch

$$1^z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (*_2)$$

aber Anwendung der Regeln  $(*_1), (*_2)$  ohne genaue Beachtung ihres Gültigkeitsbereichs führt auf unsinnige Schlußfolgerungen wie z.B.:<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} e^{ix} &= e^{(i2\pi)\frac{x}{2\pi}} \\ &= (e^{i2\pi})^{\frac{x}{2\pi}} \\ &= 1^{\frac{x}{2\pi}} \\ &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 77a):** O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß  $Q(z)$  nicht für alle  $z \in \mathbb{C}$  Null ist. Gemäß Fundamentalsatz der Algebra existiert dann ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$Q(z) = a \prod_{\nu=1}^n (z - z_{\nu}) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (\text{D.86})$$

und somit

$$Q_{\nu}(z) = a \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n (z - z_{\mu}) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \nu \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{D.87})$$

Die  $Q_{\nu}$  sind also Polynome  $(n-1)$ -ten Grades, die der Bedingung

$$Q_{\nu}(z) \neq 0 \iff \nu \neq \mu \quad (\text{D.88})$$

genügen und deshalb linear unabhängig sind:

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} Q_{\nu}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies \lambda_{\mu} \stackrel{(\text{D.88})}{=} \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} Q_{\nu}(z_{\mu}) = 0 \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}.$$

<sup>16</sup>Hier ist zu beachten:

$$\psi < 2\pi \implies 2\pi \notin (\psi - 2\pi, \psi).$$

**Zu Aufgabe 77b):** Da die  $Q_\nu$  linear unabhängig sind, läßt sich jedes Polynom vom Grade  $< n$ , insbesondere also auch  $P$ , als Linearkombination der  $Q_\nu$  darstellen:

$$P(z) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu Q_\nu(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (\text{D.89})$$

Gemäß (D.88) gilt (D.89) mit

$$P(z_\mu) = \lambda_\mu \underbrace{Q_\mu(z_\mu)}_{\neq 0},$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{\nu=1}^n \frac{P(z_\nu)}{Q_\nu(z_\nu)} Q_\nu(z) \\ &= Q(z) \sum_{\nu=1}^n \frac{P(z_\nu)}{Q_\nu(z_\nu)} \frac{1}{z - z_\nu} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Mit

$$Q_\mu(z_\mu) \stackrel{(\text{D.86}), (\text{D.87})}{=} Q'(z_\mu) \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 77c):** Hier gilt

$$Q_\mu(z_\mu) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^3 (z_\mu - z_\nu) \quad \forall \mu \in \{1, 2, 3\}$$

und somit gemäß b):

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + z_4}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} &= \frac{z_1^2 + z_4}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \frac{1}{z - z_1} \\ &= \frac{z_2^2 + z_4}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} \frac{1}{z - z_2} \\ &= \frac{z_3^2 + z_4}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \frac{1}{z - z_3} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 78:** Aus  $\dot{x}(t) = \frac{|x(t)|^2}{t_0 x_0}$  folgt  $\frac{1}{t_0 x_0} = \frac{\dot{x}(t)}{|x(t)|^2}$  und daraus durch Integration über das Zeitintervall  $[0, t]$

$$\begin{aligned} \frac{t}{t_0 x_0} &= \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(t')}{|x(t')|^2} dt' \\ &= - \frac{1}{x(t')} \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ &\stackrel{\text{Anfangsbed.}}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}. \end{aligned}$$

Die Auflösung nach  $x(t)$  ergibt:

$$x(t) = \frac{t_0}{t_0 - t} x_0 \quad \forall t < t_0.$$

Die Beschleunigung ist also so groß, daß  $x(t)$  für  $t \rightarrow t_0$  divergiert (ins Unendliche läuft). Deshalb ist eine stetige Fortsetzung der Lösung über das Zeitintervall  $-\infty < t < t_0$  hinaus natürlich nicht möglich.

**Zu Aufgabe 79a):** Die Behauptung folgt direkt aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/t_e \\ -\omega^2 t_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) t_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega^2 t_e x(t) \end{pmatrix}.$$

**Zu Aufgabe 79b):** Aus (C.12) folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \dot{X}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2(t)/t_e \\ -\omega^2 t_e X^1(t) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} -\omega^2 t_e X^1(t) &= \dot{X}^2(t) \\ &= t_e \ddot{X}^1(t) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

**Zu Aufgabe 79c):** Aus

$$\hat{M}^2 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}^{2\nu} &= (-1)^\nu \omega^{2\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{M}^{2\nu+1} &= (-1)^\nu \omega^{2\nu} \hat{M} \end{aligned} \right\} \forall \nu \in \mathbb{Z}_+$$

und somit

$$e^{\hat{M}t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega^{2\nu} \left( \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \hat{M} \right).$$

Daraus folgt

$$e^{\hat{M}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} (\omega t)^{2\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} (\omega t)^{2\nu+1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega t_e \end{pmatrix}$$

sowie

$$e^{\hat{M}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} (\omega t)^{2\nu} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} (\omega t)^{2\nu+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega t_e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit wegen

$$\cos(\omega t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} (\omega t)^{2\nu}, \quad \sin(\omega t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} (\omega t)^{2\nu+1}$$

die Behauptung.

**Zu Aufgabe 79d):** Da offensichtlich

$$\frac{d}{dt} e^{\hat{M}t} = \hat{M} e^{\hat{M}t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt, sind  $\mathbf{X}_1(t)$  und  $\mathbf{X}_2(t)$  Lösungen von (C.12), die für  $t = 0$  (und damit für alle  $t$ ) unabhängig sind.

**Zu Aufgabe 79e):** Die Behauptung folgt aus a)–d).

**Zu Aufgabe 80:** Gemäß Abschnitt 3.4.4 der Vorlesung ist

$$U(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} |\mathbf{x}|^2$$

die potentielle Energie der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\kappa \mathbf{x}$$

einer idealen Feder. Daraus folgt

$$U(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{F}(\mathbf{x})|^2}{2\kappa}.$$

Die potentielle Energie verschwindet bei beschränkten Kräften also für  $\kappa \rightarrow \infty$  und deshalb können die inneren Kräfte bei Energiebilanzen für (nahezu) starre Körper vernachlässigt werden.



Zu Aufgabe 81: Aus

$$\begin{aligned} F_1 + \Delta F &\stackrel{\text{HOOKE}}{=} E_0 \frac{(L_1 + \Delta L) - L_0}{L_0} \\ &= \underbrace{E_0 \frac{L_1 - L_0}{L_0}}_{\stackrel{\text{HOOKE}}{=} F_1} + E_0 \frac{\Delta L}{L_0} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Delta F}} &= E_0 \frac{\Delta L}{L_0} \\ &= \underline{\underline{E_1 \frac{\Delta L}{L_1}}} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E_1 &\stackrel{\text{def}}{=} E_0 \frac{L_1}{L_0} \\ &= E_0 \underbrace{\frac{L_1 - L_0}{L_0}}_{\stackrel{\text{HOOKE}}{=} F_1} + E_0. \end{aligned}$$

**Anmerkung:**  $E_1 - E_0 =$  stimmt also mit der *Vorspannung*  $F_1$  überein.

**Zu Aufgabe 82a):** Wie bei der schwingenden Saite (nur 1-dimensional und ohne Vorspannung) gilt

$$\mu \int_{l_1}^{l_2} \ddot{x}(l, t) dt = F(l_1, l_2, t) + I_{x(\dots)}(l_2, t) - I_{x(\dots)}(l_1, t) \quad (\text{D.90})$$

mit

$$F(l_1, l_2, t) = (l_2 - l_1) \mu g \quad (\text{Schwerkraft})$$

und

$$\begin{aligned} I_{x(\dots)}(l, t) &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} E_0 \frac{(x(l + \Delta l, t) - x(l, t)) - \Delta l}{\Delta l} \\ &= E_0 \xi'(l, t). \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

Einsetzen von (D.91) in (D.90) und Division durch  $l_2 - l_1$  ergibt im Limes  $l_2, l_1 \rightarrow l$

$$\mu \ddot{x}(l, t) = \mu g + E_0 \xi''(l, t).$$

Mit

$$\mu \ddot{x} = \ddot{\xi}, \quad m = \mu L_0 \quad (\text{D.92})$$

folgt daraus die angegebene Wellengleichung.

Die Randbedingung

$$\xi(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

entspricht der festen Aufhängung der Feder bei  $l = 0$ .

Die NEWTONSche Bewegungsgleichung für  $M$  ist

$$\begin{aligned} M \ddot{x}(L_0, t) &= M g - I_{x(\cdot, \cdot)}(L_0, t) \\ &= M g - E_0 \xi'(L_0, t). \end{aligned} \tag{D.91}$$

Mit (D.92) folgt daraus die Randbedingung

$$\left( M \ddot{\xi}(l, t) + E_0 \xi'(l, t) \right)_{|l=L_0} = M g. \tag{D.93}$$

**Zu Aufgabe 82b):** Daß

$$\xi_{\text{part}}(l, t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{mg}{2E_0 L_0} l^2 + \frac{m+M}{E_0} g l$$

eine Lösung obigen Randwertproblems ist, folgt unmittelbar aus

$$\xi_{\text{part}}(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\xi'_{\text{part}}(l, t) = -\frac{mg}{E_0 L_0} l + \frac{m+M}{E_0} g \quad \forall l \in [0, L_0], t \in \mathbb{R}$$

und

$$\xi''_{\text{part}}(l, t) = -\frac{m}{E_0 L_0} g.$$

**Zu Aufgabe 82c):** Einsetzen von

$$\xi(l, t) = f(l) h(t) + \xi_{\text{part}}(l, t).$$

in die inhomogene Wellengleichung liefert

$$f(l) \ddot{h}(t) - \frac{E_0 L_0}{m} f''(l) h(t) = 0$$

und somit<sup>17</sup>

$$\frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = \frac{E_0 L_0}{m} \frac{f''(l)}{f(l)}.$$

<sup>17</sup>Eigentlich müßten mögliche Nullstellen diskutiert werden.

Da die linke Seite nicht von  $l$  und die rechte Seite nicht von  $t$  abhängt, aber beide Seiten gleich sind, sind beide Seiten konstant. Insbesondere gilt also

$$\frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = C \quad \text{für geeignetes } C \in \mathbb{R}.$$

Da  $h(t)$  nur für  $C \leq 0$  periodisch sein kann, folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 82d):** Die Bedingungen

$$f''(l) = -\frac{m}{E_0 L_0} \omega^2 f(l), \quad \xi(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

sind äquivalent zu

$$\boxed{f(l) \propto \sin\left(\omega \sqrt{\frac{m}{E_0 L_0}} l\right)}. \quad (\text{D.94})$$

Andererseits ist die Bedingung (D.93) unter den Voraussetzungen

$$\ddot{h}(t) = -\omega^2 h(t)$$

und (D.94) äquivalent zu

$$-M \omega^2 \sin\left(\omega \sqrt{\frac{m}{E_0 L_0}} L_0\right) + E_0 \omega \sqrt{\frac{m}{E_0 L_0}} \cos\left(\omega \sqrt{\frac{m}{E_0 L_0}} L_0\right) = 0,$$

also zu

$$\boxed{\omega \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \tan\left(\omega \sqrt{\frac{m}{\kappa}}\right) = \frac{m}{M}}. \quad (\text{D.95})$$

**Zu Aufgabe 82e):** Für

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M + m_{\text{eff}}}}$$

ist (D.95) äquivalent zu

$$\tan \sqrt{\frac{m}{M + m_{\text{eff}}}} = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{M + m_{\text{eff}}}{m}}. \quad (\text{D.96})$$

Für  $m_{\text{eff}} = 0$  ist die linke Seite wegen  $m < M$  größer als die rechte. Da die linke Seite eine monoton fallende, die rechte dagegen monoton wachsende Funktion von  $m_{\text{eff}} > 0$  ist und die rechte Seite beliebig große Werte annehmen kann, existiert genau eine positive Lösung  $m_{\text{eff}}$  von (D.96) und dafür gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{M + m_{\text{eff}}}} + \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{m}{M + m_{\text{eff}}}} \right)^3 &\stackrel{\text{TAYLOR}}{\approx} \tan \sqrt{\frac{m}{M + m_{\text{eff}}}} \\ &\stackrel{(\text{D.96})}{=} \frac{m}{M} \sqrt{\frac{M + m_{\text{eff}}}{m}}, \end{aligned}$$

also

$$1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M + m_{\text{eff}}} \approx \frac{M + m_{\text{eff}}}{M}.$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{m}{3} &\approx \frac{(M + m_{\text{eff}})^2}{M} - (M + m_{\text{eff}}) \\ &= m_{\text{eff}} \left( 1 + \frac{m_{\text{eff}}}{M} \right) \\ &\approx m_{\text{eff}}. \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Tatsächlich ist  $m_{\text{eff}}$  etwas größer als  $m/3$ , aber bereits für  $\frac{M}{m} > 2$  beträgt die Abweichung weniger als 4%.

# Literaturverzeichnis

- Argüeso, F. und Sanz, J. L. (1984). Post-Newtonian extensions of the Runge-Lenz vector. *J. Math. Phys.*, 25:2935–2938. [86](#)
- Bronstein, I., Semendjajew, K., Musiol, G., und Mühlig, H. (2001). *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 5. Auflage. [41](#)
- Campbell, S. L. und C. D. Meyer, J. (1991). *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Dover Publications, Inc., New York. [43](#)
- Fischer, H. und Kaul, H. (2001). *Mathematik für Physiker*, Band 1. B.G. Teubner, Stuttgart, 4. Auflage. Grundkurs. [3](#)
- Fischer, H. und Kaul, H. (2003). *Mathematik für Physiker*, Band 3. B.G. Teubner, Stuttgart. [179](#)
- Fischer, H. und Kaul, H. (2004). *Mathematik für Physiker*, Band 2. B.G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. [3](#)
- Grosche, G., Ziegler, V., Ziegler, D., und Zeidler, E., Herausgeber (2003). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil II*. B. G. Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden, 8. Auflage. [3](#)
- Kamke, E. (1961). *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig, 7. Auflage. [164](#)
- Kamke, E. (1965). *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen II*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig, 5. Auflage. [164](#)
- Knopp, K. (1947). *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Springer-Verlag. [201](#)
- Leach, P. G. L. und Flessas, G. P. (2003). Generalisations of the Laplace-Runge-Lenz vector. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 10:340–423. [math-ph/0403028](#). [86](#)

- Lücke, W. (1995). Solutions of the inhomogeneous wave equation with unusual propagation character and global solution of the Poisson equation. *J. Phys. A*, 28:5393–5400. 144
- Lücke, W. (edyn). Elektrodynamik .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf>. 121
- Lücke, W. (eine). Ergänzungen zu “Mathematische Methoden der Physik”.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/eine.pdf>. 42, 101, 163
- Lücke, W. (ftm). Mathematische Methoden der Physik: Funktionentheoretische Methoden.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ftm.pdf>. 146, 148, 151
- Lücke, W. (fuan). Mathematische Methoden der Physik: Funktionalanalytische Methoden.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/fuan.pdf>. 70
- Lücke, W. (mech). Klassische Mechanik .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/mech.pdf>. 37
- Lücke, W. (musi). Theorie zur Physik der Musikinstrumente.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/musi.html>. 175
- Lücke, W. (rel). Spezielle Relativitätstheorie .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/rel.pdf>. 74, 251
- Mutze, U. (2004). The fundamental theorem of calculus in  $\mathbb{R}^n$ . *mp\_arc/04-165*, Seiten 1–4. 70
- Naas, J. und Schmid, H. L. (1967). *Mathematisches Wörterbuch*, Band II. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Berlin Stuttgart. 182
- Pohl, R. W. (1962). *Mechanik · Akustik und Wärmelehre*, Band 15 von *Einführung in die Physik*. Springer-Verlag, 15. Auflage. 84
- Riesz, F. und Sz.-Nagy, B. (1982). *Vorlesungen über Funktionalanalysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 202
- Sommerfeld, A. (1964). *Mechanik*, Band 1 von *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 7. Auflage. 58, 73
- van der Waerden, B. L. (1966). *Algebra · Erster Teil*. Heidelberger Taschenbücher. Springer-Verlag. 19, 20
- Wille, F. (1992). *Humor in der Mathematik*. Vandenhoeck & Ruprecht. 69

Zeidler, E., Herausgeber (2003). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden, 2. Auflage. **3, 89**





# Index

- 1. Hauptsatz der Thermodynamik, 112
- 2. Hauptsatz der Thermodynamik, 113
- Abbildung
  - kontrahierende, 158
- ABELSche partielle Summation, 201
- Ableitung, 59
  - LIE-, 94
  - LIE-
    - Vertauschbarkeit, 104
  - partielle, 96
  - Vertauschbarkeit, 103
  - Richtungs-, 94
- AMPERESches Durchflutungsgesetz, 121
- Anfangs
  - bedingungen, 67
  - punkt, 105
- Arbeit, 79, 104
- Archimedische Prinzip, 230
- Bahn
  - Beschleunigung, 64
  - Drehimpuls, 76
  - Tangente, 64, 66, 107
- Basis, 18–20
  - Orthonormal-, 26, 28
  - reziproke , 42
- Beschleunigung, 64
  - Bahn-, 64
  - Normal-, 64
- beschränkt
  - polynomial, 150
- Betrag, 25
- Bewegung
  - elliptische, 51
  - geradlinige , 50
  - gleichförmige Kreis-, 64
  - hyperbolische, 55
  - kreisförmige, 51
  - parabolische, 54
- Bewegungsgleichung
  - NEWTONSche, 73
- Bilinearform, 27
  - metrische, 28
- CAUCHY
  - Integralformel von, 148, 149
  - Integralsatz von, 148
- CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen, 147
- COULOMB-Potential, 92
- CRAMERSche Regel, 43
- D’ALEMBERTSche Lösung, 172
- Determinante
  - WRONSKI-, 163
- Differentialgleichung
  - Lösung einer
    - partikuläre, 163
    - explizite, 160
    - gewöhnliche, 156
    - homogene, 161
    - inhomogene, 156
  - Lösung einer, 156, 161
  - Lösungssystem einer
    - fundamentales, 162
  - lineare, 156, 161
    - homogene, 156
  - partielle, 156
  - POISSONSche, 144
  - skalare, 161
  - vektorielle

- $N$ -ter Ordnung, 161
  - 1. Ordnung, 156
- Differentialgleichungen
  - CAUCHY-RIEMANNsche, 147
  - System von, 156, 161
- Differentiation
  - der Umkehrfunktion, 61, 147
  - Kettenregel der, 60, 147
  - Produktregel der, 60, 146
  - Quotientenregel der, 60, 146
  - Regeln für holomorphe Funktionen, 146
- differenzierbar, 58
  - 2-mal, 64
  - stetig, 94
- Diffusions
  - Gleichung, 135
  - Konstante, 135
- Dimension, 19
- DIRICHLET
  - Bedingungen, 173
- Divergenz, 133
  - eines Vektorfeldes
    - in Kugelkoordinaten, 231
- Drehimpuls, 75
  - Satz, 76
  - Bahn-, 76
  - Eigen-, 76
  - Gesamt-, 75
- Drehmoment, 36
- Dreiecksungleichung, 31, 40
- Druck, 111
- ebene Wellen, 177
- Eigendrehimpuls, 76
- einfache Parametrisierung, 124
  - einer Fläche, 113
  - eines Wegstücks, 105
- einfaches
  - Flächenstück, 113
  - Raumgebiet, 124
- Einschaltproblem, 164
- Elatizitätsmodul, 236
- Ellipsengleichung
  - in Polarform, 52
- elliptische
  - Schwingung
    - harmonische, 64
- elliptische Bewegung, 51
- endliche Variation, 199
- Endpunkt, 105
- Energie
  - Satz, 80
  - innere, 112
  - kinetische, 79
  - potentielle, 80
- Entropie, 113
- Entwicklung
  - LAURENT-, 150
  - TAYLOR-, 150
- Entwicklungssatz, 41
- Exzentrizität, 52
- Feder
  - Konstante, 237
  - Kraft, 14
  - Masse
    - effektive, 237
  - Stärke, 81
  - ideale, 81, 94
  - Standard-, 15
- Federkonstante, 237
- Feld
  - Linie, 111
  - Kraft-, 93
  - Potential-, 96
  - Skalar-, 93
  - Vektor-, 93
- Flächen
  - Dichte
    - der Feldwirbel, 123
  - Geschwindigkeit, 77
  - Inhalt, 119
  - Integral
    - eines Skalarfeldes, 115
  - Normale, 114

- Satz, 77
- Stück, 113
  - geschlossenes, 120
  - zusammengesetztes, 120
- Vektor, 113, 213
- Fluß
  - eines Vektorfeldes, 155
- Folge vom Typ  $\delta$ , 198
- Form
  - $q$ -, 193
- FOURIER
  - Transformierte, 175
  - Vokabular, 175
  - Entwicklungskoeffizienten, 173
  - Reihenentwicklung, 174
- Funktion
  - ganze analytische, 150
  - holomorphe, 146
  - polynomial beschränkte, 150
- GAUSSsches Gesetz, 132
- gebundene Zustände, 88
- geradlinige Bewegung, 50
- Gesamtdrehimpuls, 127
- geschlossen, 120
- Geschwindigkeit
  - Flächen-, 77
  - gleichförmige, 13, 14
  - mittlere, 57
  - Momentan-, 58
- Geschwindigkeitsverteilung, 127
- Gesetz
  - AMPERESches Durchflutungs, 121
  - GAUSSsches, 132
  - HOOKEsches, 236
  - HOOKEsches, 167, 236
  - Induktions-, 121
  - vonGAUSS, 230
- gleichförmige Kreisbewegung, 64
- gleichmäßig stetig, 69
- Gradient, 96
  - eines Skalarfeldes
    - in Kugelkoordinaten, 230
- Gravitations
  - Feld, 132
  - Gesetz, 84
  - Konstante, 84
  - Potential, 137
- Hülle
  - lineare, 18
- Halbparameter, 53
- harmonische Schwingung, 63
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 70
- holomorph, 146
- HOOKEsches Gesetz, 236
- HOOKEsches Gesetz, 167, 236
- Hyperbelkosinus, 55
- Hyperbelsinus, 55
- hyperbolische Bewegung, 55
- ideale Feder, 81, 94
- Impuls, 74
  - Satz, 75
- Induktionsgesetz, 121
- Inhomogenität, 156
- innere Energie, 112
- innere Kräfte, 78
- Integral
  - Sinus, 197
  - Kurven-, 106
  - Linien-, 106
  - Oberflächen-, 113, 114
    - eines Skalarfeldes, 115
  - Projektions-
    - eines Flächenstücks, 116
  - RIEMANNsches
    - bestimmtes, 69
  - Weg-, 106
    - eines Skalarfeldes, 106
    - konservativer Felder, 109
- Integrand, 71
- Integration
  - partielle, 99
- isobarer Ausdehnungskoeffizient, 99
- isochorer Spannungskoeffizient, 99

- isotherme Kompressibilität, 99
- KEPLER-Problem, 92
- Kettenregel, 60, 147
  - verallgemeinerte, 98
- kinetische Energie, 79
- komplexe
  - Ableitung, 146
  - Differentiationsregeln, 146
  - Konjugation
    - holomorpher Funktionen, 147
  - Wegintegration, 148
- komplexe Zahlen, 43
  - Polardarstellung, 44
- konservative Kraft, 80
- Kontinuitätsgleichung, 135
- kontrahierende Abbildung, 158
- Kontraktion von Tensorindizes, 185
- konvergent
  - absolut, 150, 151
  - gleichmäßig, 151
- Konvergenz
  - absolute, 45
- Koordinaten
  - Kugel-, 117
  - Polar-, 117
  - Zylinder-, 118
- kovarianten Komponenten, 128
- Kräfteparallelogramm, 16
- Krümmung, 65
- Krümmungsradius, 65
- Kraft
  - Einheit, 15
  - Feld, 93
  - Richtung, 14
  - äußere, 78
  - innere, 78
  - konservative, 80
  - Selbstwechselwirkungs-, 78
  - Zentral-, 77
- kreisförmige Bewegung, 51
- Kreisfrequenz, 64
- Kugel
  - Koordinaten, 117
  - Oberfläche, 118
- Kurvenintegral, 106
- Ladungsdichte, 146
- LAPLACE
  - Gleichung, 137
- LAPLACE
  - Operator, 141
- LAPLACE-Operator, 135
- LAURENT-Entwicklung, 150
- Leistung, 79
- LIE-Ableitung, 94
- LIE-Ableitung
  - Vertauschbarkeit, 104
- linear
  - abhängig, 18
  - unabhängig, 18, 19
- lineare
  - Hülle, 18
  - Schwingung
    - harmonische, 64
- Linearität, 60
- Linienintegral, 106
- Linkssystem, 191
- LORENTZ-DIRAC-Gleichung, 78
- Masse
  - Ruhe-
    - träge, 73
- Massendichte, 126
- Massenpunkt, 74
- Maximum-Prinzip, 149
- Mittelwert-
  - für Flächenintegrale, 119
- Mittelwertsatz
  - für Flächenintegrale, 119
  - für Wegintegrale, 107
- mittlere Geschwindigkeit, 57
- Momentangeschwindigkeit, 58
- Nabla-Operator, 141
- natürliche Zuordnung
  - physikalischer Vektoren, 16

- NEWTONSche Bewegungsgleichung, 73  
 Norm, 25, 30  
 Normalbeschleunigung, 64  
 Oberflächenintegral, 113, 114  
 Operator  
   HODGE-Stern-, 194  
 Orientierung  
   der Flächennormalen, 116  
   eines Wegstücks, 108  
 Orthogonalisierungsverfahren  
   SCHMIDTSches, 33  
 Orthonormalbasis, 26, 28  
  
 parabolische Bewegung, 54  
 Parallelogrammgleichung, 30  
 Parametrisierung  
   einfache  
     einer Fläche, 113  
     eines Wegstücks, 105  
 partielle  
   Ableitung, 96  
   Vertauschbarkeit, 103  
   Integration, 99  
 Perihel, 87  
 PICARD-LINDELÖF-Verfahren, 159  
 POINCARÉ-Konstruktion, 142  
 POISSONSche Differentialgleichung, 144  
 POISSONSche Gleichung, 137  
 Polarkoordinaten, 117  
 Potential, 79  
   -Feld, 96  
   -Kraft, 80  
   homogener Kraftfelder, 97  
   idealer Federn, 97  
   Schwere-  
     von Punktmassen, 98  
 potentielle Energie, 80  
 Prinzip  
   Archimedisches, 230  
 Produkt  
   -Regel, 60, 146  
   äußere, 193  
   dyadisches, 183  
   Skalar-, 28  
   Vektor-  
     mathematisches, 34  
     physikalisches, 34  
 Projektion, 29  
 PYTHAGORAS  
   Satz von, 26, 31  
  
 Quasistatische Prozesse, 112  
 quellfrei, 135  
 Quotientenregel, 60, 146  
  
 Rand, 120, 126, 131  
   eines Flächenstücks  
     orientierter, 116  
   orientierter  
     zusammengesetzter Flächen, 120  
 Teil-  
   eines Flächenstücks, 115  
 Raum  
   -Gebiet  
     einfaches, 124  
   -Inhalt, 130  
   -Winkel, 118  
 Rechtssystem, 191  
 reduzierte Masse, 224  
 Residuensatz, 150  
 Residuum, 150  
 Resonanzkreisfrequenz, 222  
 retardiert, 78  
 reziproke Basis, 42  
 Richtung, 94  
 Richtungsableitung, 94, 139  
 RIEMANN  
   -Integral, 69  
   -integrabel, 69  
 Rotation, 123  
   eines Vektorfeldes  
     in Kugelkoordinaten, 231  
 RUNGE-LENZ-Vektor, 86, 224  
 RUTHERFORD-Streuung, 92, 224  
  
 Saite  
   Bewegungsgleichung, 168

- lineare Näherung, 169
- Randbedingungen, 170
- Schwingung
  - longitudinale, 169
  - transversale, 169
- Satz
  - Drehimpuls-, 76
  - Energie-, 80
  - Entwicklungs-, 41
  - Flächen-, 77
  - Fundamental-
    - der Algebra, 151
  - Impuls-, 75
  - Integral-
    - von CAUCHY, 148
    - von LIOUVILLE, 150
  - Mittelwert-
    - für Wegintegrale, 107
  - Residuen-, 150
  - von Earnshaw
    - von EARNSHAW, 137
    - von PYTHAGORAS, 26, 31, 40
    - von STEINER, 76
    - von STOKES, 122
- schiefe Ebene, 21
- SCHWARZsche Ungleichung, 31, 40
- Schwerkraft, 94
- Schwerpunkt, 38, 75, 229
- Schwerpunktsatz, 75
- Schwingung
  - harmonische, 63
  - elliptische, 64
  - gedämpfte, 272
  - lineare, 64
- Seilspannungen, 23
- Selbstwechselwirkungskräfte, 78
- senkrecht, 28
- Skalar
  - Feld, 93
  - Gradient eines, 96
  - stetiges, 94
  - Produkt, 28
  - Potential, 140
- Spat, 18
  - Produkt, 35
- Spatprodukt, 35
- stückweise
  - glatt, 173
  - monoton, 173
  - stetig, 173
  - stetig differenzierbar, 173
- Stammfunktion, 69
  - einer holomorphen Funktion, 148
- STEINERScher Satz, 76
- stetig, 50
  - differenzierbar, 94
  - gleichmäßig, 69
- Stoßparameter, 88
- STOKESScher Satz, 122
- Streu
  - Winkel, 88
  - Zustände, 88
- Streuungswinkel, 225
- Stromdichte, 213
- Summationskonvention
  - EINSTEINSche, 181
- symmetrisch, 128
- Système International d'Unités, 121
- TAYLOR-Entwicklung, 150
- TAYLOR-Entwicklung, 100, 103
- Teilrand, 126
- Tensor
  - metrischer, 187
- Totalvariation, 199
- Trägheits
  - Moment, 128
  - Tensor, 127
- Translation
  - räumliche, 11
- Umgebung, 136
- Ungleichung
  - Dreiecks-, 31, 40
  - SCHWARZsche, 31, 40
- Variation der Konstanten, 163

- Vektor, 17
  - Feld, 93
  - Fluß, 155
  - konservatives, 96
  - Rotation, 123
  - stetiges, 94
  - Potential, 140, 142
  - Produkt
    - mathematisches, 34
    - physikalisches, 34
  - Raum
    - Basis, 18–20
    - Basis, schiefwinklige, 23
    - Dimension, 19
    - endlichdimensionaler, 19
    - EUKLIDischer, 28
    - Orientierung, 191
    - reeller, 17
  - Flächen-, 113, 213
  - Spalten-Schreibweise, 20
  - Tangenten-, 107
- verallgemeinerte Kettenregel, 98
- Volumen, 111
  - Form, 189
  - natürliche, 193
  - Integral, 125
- Wärme
  - Menge, 112
  - leitungsgleichung, 177
- Weg
  - Integral, 106
    - eines Skalarfeldes, 106
    - konservativer Felder, 109
  - Länge, 107
  - Stück
    - einfaches, 105
    - zusammengesetztes, 108
  - geschlossener, 108
- Wegintegral
  - komplexes, 148
- Wellengleichung
  - D'ALEMBERTSche Lösung, 172
  - homogene, 170, 176
- WRONSKI-Determinante, 163
- Zentralkraft, 77
- Zylinderkoordinaten, 118