Ergänzungen
zu
„Mathematische Methoden der Physik“

Technische Universität Clausthal
WS 2000/2001 – SS 2005

W. Lücke

Vorwort

Teil II dieser Vorlesung ist als Ergänzung — insbesondere im Hinblick auf die Quantenmechanik — für Fachhochschulabsolventen gedacht, die innerhalb von zwei bis drei Semestern zum Diplom geführt werden sollen.

Die eigentlichen mathematischen Schwierigkeiten der Quantentheorie liegen in der unendlichen Dimension des Zustandsraumes begründet, die durch die kanonischen Vertauschungsrelationen erzwungen wird. Viele Autoren setzen sich darüber hinweg, indem sie alle Operatoren formal wie endliche Matrizen behandeln. Das ist durchaus vertretbar, solange man die physikalischen Anwendungen in den Mittelpunkt stellt und sich klar zum heuristischen Charakter der mathematischen Betrachtungen bekennt.

Das vorliegende Skript kommt diesem Standpunkt entgegen, indem zunächst (in Kapitel 7) nur endlichdimensionale lineare Räume betrachtet werden. Das liefert durchaus schon einen gewissen Einblick in die logische Struktur der Quantentheorie, schließt aber natürlich wesentliche Aspekte — wie z.B. die HEISENBERGschen Unschärferelationen und die Auswirkungen unterschiedlicher Randbedingungen — aus.

Um auch anspruchsvolleren Studenten gerecht zu werden, werden in Kapitel 8 dann auch unendlichdimensionale HILBERT-Räume mathematisch exakt behandelt. Kapitel 9 gibt dann noch eine kurze Einführung in die Theorie der verallgemeinerten Funktionen und ihre Anwendung auf partielle Differentialgleichungen der Physik .

Warnung: Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium gedacht.

Literaturempfehlungempfehlung: (Zeidler, 2003; Grosche et al., 2003; Fischer und Kaul, 2001; Fischer und Kaul, 2004; Fischer und Kaul, 2003)

Inhaltsverzeichnis

II Ergänzungen **7**

7 Endlichdimensionale komplexe Vektorräume **9**

7.1 Grundlegende Definitionen . . . 9
7.1.1 Lineare Struktur . . . 9
7.1.2 Komplexe innere Produkte . . . 11
7.1.3 Stetigkeit und Konvergenz . . . 14
7.2 Anwendungsbeispiel: Polarisation von Licht . . . 14
7.2.1 Monochromatische ebene Wellen . . . 14
7.2.2 JONES-Formalismus . . . 16
7.2.3 Einfache polarisationsoptische Komponenten . . . 20
7.3 Lineare Operatoren . . . 22
7.3.1 Grundlegendes . . . 23
7.3.2 Matrizen und Determinanten . . . 25
7.3.3 Selbstadjungierte und unitäre Operatoren . . . 32
7.3.4 Eigenvektoren und Eigenwerte . . . 36
7.4 Multilineare Funktionale (komplexe Tensoren) . . . 44
7.4.1 Lineare Funktionale . . . 44
7.4.2 Bilineare Funktionale . . . 49
7.4.3 Allgemeinere Tensorprodukte . . . 53

8 Unendlichdimensionale komplexe Vektorräume **55**

8.1 Grundlegende Definitionen . . . 55
8.1.1 Maximale Orthonormalsysteme . . . 55
8.1.2 Schwache Konvergenz und Beschränktheit . . . 60
8.1.3 HILBERTsche Räume . . . 62
8.2 Beispiele für vollständige Funktionensysteme . . . 66
8.2.1 LEGENDRE-Polynome . . . 66
8.2.2 HERMITEsche Polynome . . . 68
8.2.3 LAGUERREsche Polynome . . . 70
8.3 Lineare Operatoren . . . 71
8.3.1 Grundsätzliches . . . 71
8.3.2 Kompakte Operatoren . . . 79
8.3.3 Unbeschränkte Operatoren . . . 85

8.3.4 Symmetrien 92
8.4 Multilineare Funktionale 93
8.4.1 Beschränkte lineare Funktionale 93
8.4.2 Beschränkte bilineare Funktionale 96
8.4.3 Allgemeinere Tensorprodukte 98

9 Verallgemeinerte Funktionen **101**
9.1 Grundlegendes 101
9.1.1 Definitionen 101
9.1.2 Zerlegungen der Eins 106
9.1.3 Beispiele und einfache Resultate 108
9.2 GREENsche Funktionen 111
9.2.1 Fundamentallösungen partieller Differentialgleichungen 111
9.2.2 Quantenmechanische Propagatoren 113
9.2.3 Das STURM-LIOUVILLE-Problem 115

E Ergänzende Übungsaufgaben **117**

F Lösungsvorschläge zu den Ergänzungen **151**

Ergänzendes Literaturverzeichnis **235**

Ergänzender Index **239**

Teil II

Ergänzungen

Kapitel 7

Endlichdimensionale komplexe Vektorräume[1]

7.1 Grundlegende Definitionen

7.1.1 Lineare Struktur

In den grundlegenden Definitionen für Vektorräume lassen sich die bisher verwendeten reellen Zahlen ohne weiteres durch komplexen Zahlen ersetzen:

Definition 7.1.1 *Als **komplexen Vektorraum**[2] bezeichnet man eine Menge V zusammen mit einer Additionsvorschrift und einer Vorschrift zur Multiplikation mit komplexen Zahlen derart, daß*

$$z\,\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \in V \quad \textit{für alle } \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in V \textit{ und bel. komplexe } z$$

und die Regeln

$$\text{(V1)–(V7)} \textit{ aus } 1.1.2 \textit{ für beliebige } \textbf{komplexe } \lambda\,,\ \lambda_1\,,\ \lambda_2$$

*gelten. Die Elemente von V nennt man **Vektoren**.*

Definition 7.1.2 *Sei V ein komplexer Vektorraum und sei T eine Teilmenge von V. Als (komplexe) **lineare Hülle** von T bezeichnet man dann die Menge $\mathcal{L}(T)$ aller Vektoren $\mathbf{v} \in V$, die sich in der Form*

$$\mathbf{v} = z^1\mathbf{v}_1 + \ldots + z^n\mathbf{v}_n$$

mit komplexen $z^1,\ldots,z^n$ und $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in T$ darstellen lassen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Version vom 26. März 2009

[1] Die Theorie der Quantencomputer beschränkt sich im wesentlichen auf **endlichdimensionale** komplexe Vektorräume.

[2] Ein komplexer Vektorraum wird allgemein auch als ***linearer Raum über dem Körper der komplexen Zahlen*** bezeichnet.

Definition 7.1.3 *Sei V ein komplexer Vektorraum. Dann heißen die Vektoren einer Teilmenge T von V (komplex)* ***linear unabhängig*** *voneinander, falls $\mathcal{L}(T') \neq \mathcal{L}(T)$ für jede* **echte** *Teilmenge T' von T gilt. Andernfalls heißen die Vektoren von T (insgesamt)* ***linear abhängig*** *(voneinander). Unter einer (*Hamel-*)* ***Basis*** *von V versteht man eine Menge $T \subset V$ linear unabhängiger Vektoren mit $\mathcal{L}(T) = V$.*

Definition 7.1.4 *Ein komplexer Vektorraum V heißt* ***endlichdimensional****, falls eine endliche Zahl von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ existiert, für die*

$$\mathcal{L}\left(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\right) = V$$

gilt. Falls mindestens ein Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert, für den $\mathbf{v} \neq 0\,\mathbf{v}$ gilt,[3] *bezeichnet man das dabei kleinstmögliche n als die* ***Dimension*** *($\dim V$) von V .*

Auch das Kriterium für lineare Unabhängigkeit läßt sich entsprechend auf komplexe Vektoren anwenden:

Lemma 7.1.5

Gegeben: (i) *komplexer Vektorraum V*
(ii) *Teilmenge T von V*

Behauptung: *Die Vektoren von T sind genau dann linear unabhängig, wenn zu jeder endlichen Teilmenge $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ von T und zu jedem $\mathbf{z} \in \mathcal{L}\left(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\right)$* **genau** *ein n-Tupel komplexer Zahlen $(z^1, \ldots z^n)$ existiert mit:*

$$\mathbf{z} = z^1 \mathbf{v}_1 + \ldots + z^n \mathbf{v}_n \,.$$

Lemma 7.1.6

Gegeben: (i) *endlichdimensionaler komplexer Vektorraum V*
(ii) **linear unabhängige** *Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$*

Behauptung: *Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:*

1. $\mathcal{L}\Big(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\Big) = V$.
2. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *ist eine Basis von V .*
3. $n = \dim V$.

Version vom 26. März 2009

[3] Sonst setzt man $\dim V = 0$.

Wie im reellen Falle läßt sich für einen n-dimensionalen komplexen Vektorraum V eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ fest wählen und damit jeder Vektor $\mathbf{x} \in V$ in der Form

$$\mathbf{z} = z^1 \mathbf{b}_1 + \ldots + z^n \mathbf{b}_n$$

mit eindeutigen komplexen ***Komponenten*** $z^1, \ldots, z^n$ schreiben, was entsprechend durch

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

mitgeteilt wird. In diesem Sinne folgt entsprechend aus (V1)–(V7):

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda\, x^2 \\ \vdots \\ \lambda\, x^n \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

für beliebige **komplexe** $\lambda, x^1, \ldots, y^n$. In dieser Darstellungsweise bezeichnet man den komplexen n-dimensionalen Vektorraum als $\mathbb{C}^n$. Offensichtlich gilt

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\,\mathbb{R}^n\,,$$

wobei nun $\mathbb{R}^n$ und $i\,\mathbb{R}^n$ auf natürliche Weise als Teil**mengen** von $\mathbb{C}^n$ aufzufassen sind.[4]

7.1.2 Komplexe innere Produkte

Am einfachsten läßt sich ein ***inneres Produkt*** $\langle . \mid . \rangle$ in einem n-dimensionalen komplexen Vektorraum V dadurch einführen, daß man eine Basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V zur *Orthonormalbasis* erklärt und dementsprechend definiert:

$$\begin{gathered} \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} (a^\nu)^*\, b^\nu\,, \\ \text{falls:} \quad \mathbf{a} = \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu\, \mathbf{e}_\nu\,, \quad \mathbf{b} = \sum_{\nu=1}^{n} b^\nu\, \mathbf{e}_\nu\,. \end{gathered} \tag{7.3}$$

[4]Die Einbettung von $\mathbb{R}^n$ und $i\,\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ hängt natürlich von der Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ab.

Die so eingeführten *inneren Produkte* $\langle . \mid . \rangle$ sind offensichtlich durch folgende Eigenschaften charakterisiert:[5]

$$\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}\,, \tag{7.4}$$

$$\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = \Big(\langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 \rangle \Big)^* \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V\,, \tag{7.5}$$

$$\Big\langle \mathbf{a} \,\Big|\, z^1\, \mathbf{v}_1 + z^2\, \mathbf{v}_2 \Big\rangle = z^1 \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{v}_1 \rangle + z^2 \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{v}_2 \rangle \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V\,,\ z^1, z^2 \in \mathbb{C}\,. \tag{7.6}$$

Ein inneres Produkt $\langle . \mid . \rangle$ ist also ***antilinear*** (*konjugiert linear*) im ersten Argument:

$$\Big\langle z^1\, \mathbf{v}_1 + z^2\, \mathbf{v}_2 \,\Big|\, \mathbf{a} \Big\rangle = \left(z^1\right)^* \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{a} \rangle + \left(z^2\right)^* \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{a} \rangle \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V\,,\ z^1, z^2 \in \mathbb{C}\,. \tag{7.7}$$

Definition 7.1.7 *Unter einem* EUKLID***ischen*** *komplexen* ***Vektorraum*** *V versteht man einen komplexen Vektorraum V, in dem ein* ***inneres Produkt*** *$\langle . \mid . \rangle$ erklärt ist, d.h. eine Zuordnung*

$$\underbrace{\mathbf{v}', \mathbf{v}}_{\in V} \longrightarrow \underbrace{\langle \mathbf{v}' \mid \mathbf{v} \rangle}_{\in \mathbb{C}}\,,$$

die den Bedingungen (7.4)–(7.6) genügt.

Definition 7.1.8

Sei V ein EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Unter einem diskreten* ***Orthonormalsystem*** *von V versteht man dann eine diskrete Teilmenge $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ von V mit*

$$\langle \mathbf{e}_j \mid \mathbf{e}_k \rangle = \begin{cases} 1 & \textit{für } j = k \\ 0 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem[6] *$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ bezeichnet man als* ***maximal****, falls*

$$\mathbf{z} \perp \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\} \implies \mathbf{z} = 0 \qquad \forall\, \mathbf{z} \in V$$

gilt. Für endlichdimensionales V bezeichnet man die maximalen Orthonormalsysteme auch als ***Orthonormalbasen****.*

Wie im reellen Falle läßt sich auch für komplexe endlichdimensionale EUKLIDische Vektorräume V zeigen, daß sich jede Orthonormalbasis eines Teilraumes von V zu einer Orthonormalbasis von ganz V ergänzen läßt. Dabei ist offensichtlich, daß

Version vom 26. März 2009

[5]In der mathematischen Literatur verlangt man i.a. Linearität im ersten Argument. Linearität im zweiten Argument (Forderung (7.6)) ist dagegen in der physikalischen Literatur üblich.

[6]Nicht diskrete Orthonormalsystem werden erst im nächsten Kapitel behandelt. Bis dahin seien unter Orthonormalsystemen stets diskrete Orthonormalsysteme verstanden.

(endliche) Orthonormalbasen tatsächlich (HAMEL-) Basen sind. Jeder Vektors $\mathbf{z} \in V$ läßt sich dementsprechend nach einer beliebig vorgegebenen Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V entwickeln:

$$\mathbf{z} = \sum_{\nu=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z} \rangle \, \mathbf{e}_\nu \,. \tag{7.8}$$

Anmerkung: In der DIRACschen „bra-ket-Schreibweise“

$$|\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b}|\,\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \rangle\, \mathbf{a} \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$$

wird (7.8) oft auch formal durch

$$\boxed{\hat{1} = \sum_{\nu=1}^{n} |\,\mathbf{e}_\nu\rangle\langle\mathbf{e}_\nu\,|}$$

mitgeteilt.[7]

Auch der Begriff der EUKLIDischen Norm läßt sich direkt übertragen:

Definition 7.1.9 *Als (EUKLIDische)* ***Norm*** *des Vektors* $\mathbf{v}$ *eines EUKLIDischen komplexen Vektorraumes bezeichnet man die nichtnegative reelle Zahl*

$$\|\mathbf{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle}\,.$$

Auch die entsprechenden Ungleichungen bleiben gültig:

Lemma 7.1.10

Gegeben: (i) *komplexer EUKLIDischer Vektorraum* V
(ii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

Behauptung: *Es gelten der Satz von PYTHAGORAS*[8]

$$\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \implies \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_1\|^2 \;,$$

die ***Dreiecksungleichung***

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \le \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$$

[7] Vgl. Definition 7.3.1.

[8] Man beachte aber, daß $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$ z.B. auch für $\mathbf{v}_2 = i\,\mathbf{v}_1$ gilt.

und die SCHWARZ***sche Ungleichung***

$$|\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle| \leq \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \ .$$

In den beiden Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *linear abhängig sind.*

7.1.3 Stetigkeit und Konvergenz

Wie im reellen Falle dient die Norm zur Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen komplexen EUKLIDischen Vektorräumen sowie zur Definition der Konvergenz von Folgen in solchen Räumen (auch im Hinblick auf Differentiation):

Definition 7.1.11 *Seien* V_1 *und* V_2 *(reelle oder komplexe)* EUKLID*ische Vektorräume mit den Normen* $\|.\|_1$ *resp.* $\|.\|_2$ *und sei* f *eine Abbildung von* V_1 *in* V_2 *. Dann heißt* f *(stark)* ***stetig****, falls zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_1 < \delta \implies \|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\|_2 < \epsilon \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1 \, .$$

Definition 7.1.12 *Sei* V *ein (reeller oder) komplexer* EUKLID*ischer Vektorraum mit der Norm* $\|.\|$ *und seien* $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \in V$ *. Dann sagt man, daß die Folge* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ *in* V *(stark) gegen* $\mathbf{v}$ ***konvergiert*** *und teilt das durch*

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \qquad \left(\textit{genauer: } \operatorname{s-}\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}\right)$$

mit, falls zu jedem $\epsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* n_0 *existiert mit*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu\| < \epsilon \quad \forall\, \nu > n_0 \, .$$

Genauer gehen wir auf diese Punkte aber zweckmäßiger erst in Kapitel 8 ein.

7.2 Anwendungsbeispiel: Polarisation von Licht

7.2.1 Monochromatische ebene Wellen

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ einer ebenen monochromatischen elektromagnetischen Welle im Vakuum ist bekanntlich von der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \Re \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\, \mathbf{s}\cdot\mathbf{x}\right)} \right) , \qquad (7.9)$$

wobei[9] $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}^3$ und:

$$\begin{aligned} \omega &= \text{Kreisfrequenz} > 0\,, \\ c &= \text{Vakuum-Lichtgeschwindigkeit}\,, \\ \mathbf{s} &= \text{(reeller) Richtungsvektor}\,. \end{aligned}$$

Die ***Transversalität*** der elektromagnetischen Schwingung entspricht der Zusatzbedingung

$$\langle \mathbf{s} \mid \boldsymbol{\mathcal{E}} \rangle = 0\,. \tag{7.10}$$

Indem wir $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$ für ein geeignetes rechtshändiges Orthonormalsystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ setzen, können wir $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ in der Form

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \sum_{j \in \{3,1\}} \left(A^j + i\, B^j \right) \mathbf{e}_j \tag{7.11}$$

mit geeigneten (reellen) elektrischen Feldstärken $A^1, \ldots, B^2$ schreiben. Mit (7.9) folgt daraus

$$\mathbf{E}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(0,t) = \sum_{j \in \{3,1\}} \left(A^j \cos(\omega\, t) + B^j \sin(\omega\, t) \right) \mathbf{e}_j\,. \tag{7.12}$$

Im Sinne der Aufgaben 20 –22 nennt man deshalb die Welle

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{rechtszirkular polarisiert}}, & \text{falls} & A^3 = +B^1\,,\ B^3 = A^1 = 0\,, \\ \textbf{\textit{linkszirkular polarisiert}}\ , & \text{falls} & A^3 = -B^1\,,\ B^3 = A^1 = 0\,, \\ \textbf{\textit{linear}} \parallel \mathbf{e}_3\ \textbf{\textit{polarisiert}}\ , & \text{falls} & A^1 = B^1 = 0 \end{array} \tag{7.13}$$

für jeweils geeignete Wahl der $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$ gilt. In allen übrigen Fällen nennt man die Welle ***elliptisch polarisiert***.[10]

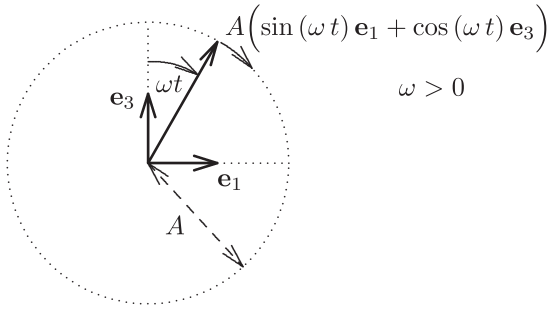
Anmerkungen:

1. Die Polarisation beschreibt den *inneren* Quantenzustand der entsprechenden Photonen.
2. *Rechtszirkular* ist hier — anders als z.B. in (Ebert, 1967, Abschn. 123.230) — so definiert, daß der Feldvektor im Rechtsschraubensinn relativ zu $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$ umläuft. Rechtszirkulares Licht entspricht damit positiver *Helizität* (positiver

[9] Streng genommen müßte man für den jeweiligen Vektorraum auch die physikalische Dimension anzeigen.

[10] Bzgl. der experimentellen Bestimmung des Polarisationszustands siehe (Gjurchinovski, 2002) und Aufgabe E13.

s-Komponente des Drehimpulses) bzw. *rechtshändigen* Photonen:



3. Die Stromdichte der Photonenzahl (nahezu) monochromatischen Lichts ist proportional zur Energiestromdichte.

Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte an der Stelle $\mathbf{x} = 0$ (Zur Zeit $t = 0$) ist

$$\mathbf{I} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \underbrace{\mathbf{E}(0,t) \times \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{B}(0,t)}_{\text{Poynting-Vektor}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Mit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^1\,\mathbf{e}_1 + \mathcal{E}^3\,\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c}\,\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t)$$

(für ebene Wellen, die in Richtung von $\mathbf{e}_2$ laufen) und

$$\mathbf{e}_j \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_k) = -\mathbf{e}_2\,\delta_{jk} \quad \forall\, j,k \in \{1,3\}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= -\frac{\mathbf{e}_2}{\mu_0\,c}\,\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sum_{j\in\{1,3\}} \Big(\Re\left(\mathcal{E}^j\,e^{-i\,\omega\,t}\right)\Big)^2\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2}{2\,\mu_0\,c}\,\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\textbf{\textit{Strahlungsintensität}} &\stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{I}| \\
&= \frac{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2}{2\,\mu_0\,c}
\end{aligned}$$

(im Sinne von 2.1.1 benutzen wir: $|\boldsymbol{\mathcal{E}}| \stackrel{\text{def}}{=} \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\| \cdot \text{Feldstärkeeinheit}\,.$)

7.2.2 Jones-Formalismus

Für fest vorgegebenes $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$ und $\omega > 0$ ist das Feld (7.9) also durch die $(2\mu_0 c)$-fache Strahlungsintensität $|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2$ und den sog. JONES-***Vektor***

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \tag{7.14}$$

gegeben:

$$\mathbf{E}(0,t) = |\boldsymbol{\mathcal{E}}| \sum_{j \in \{3,1\}} \big(\Re(J^j) \cos(\omega\, t) + \Im(J^j) \sin(\omega\, t) \big)\, \mathbf{e}_j \,.$$

Insbesondere ist die Welle

$$\begin{aligned} &\textbf{\textit{rechtszirkular polarisiert}} &&\text{, falls } \mathbf{J} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ &\textbf{\textit{linkszirkular polarisiert}} &&\text{, falls } \mathbf{J} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\ &\textbf{\textit{linear}} \parallel \sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}_3 \ \textbf{\textit{polarisiert}}, &&\text{falls } \mathbf{J} \propto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Anmerkungen:

1. Die Änderung

$$\mathbf{J} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{J}' = e^{i\varphi}\, \mathbf{J} \,, \varphi \in \mathbb{R} \,,$$

des Jones-Vektors (bei ungeänderter Strahlungsintensität) entspricht offensichtlich der Änderung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E}'(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}\left(\mathbf{x}, t - \frac{1}{\omega}\, \varphi \right)$$

des elektrischen Feldes, ändert also nicht den Polarisationszustand.

2. Je zwei JONES-Vektoren $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$ beschreiben genau dann den gleichen Polarisationszustand, wenn sie zueinander proportional sind.

3. Eine Drehung $\hat{D}_{\alpha\,\mathbf{e}_2}$ des elektrischen Feldvektors um den Winkel α im Rechtsschraubensinn um $\mathbf{e}_2$ entspricht der Transformation

$$\mathbf{J} \longmapsto \hat{D}(\alpha)\, \mathbf{J} \,, \quad \hat{D}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ +\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

des JONES-Vektors.

4. Die Raum-Zeit-Spiegelung des elektrischen Feldes entspricht der Transformation

$$\mathbf{J} \longmapsto -\mathbf{J}^{\,*} \,. \tag{7.17}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} z^3 \\ z^1 \end{pmatrix}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (z^3)^* \\ (z^1)^* \end{pmatrix} \quad \forall\, z^3, z^1 \in \mathbb{C} \,. \tag{7.18}$$

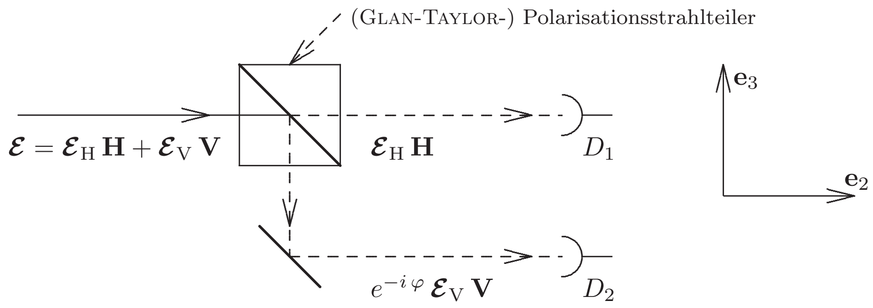


Abb. 7.1: Beispiel einer Polarisationsmessung.

Die Jones-Vektoren

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

für rechts- resp. linkszirkular polarisiertes Licht bilden offenbar eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Entsprechendes gilt für die Jones-Vektoren

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für linear $\parallel \mathbf{e}_1$ resp. $\parallel \mathbf{e}_3$ polarisiertes Licht.

Anmerkung: Für das in Abbildung 7.1 skizzierte einfache quantenoptische Experiment gilt z.B.:

Mit polarisationsunabhängige Photodetektoren D_1, D_2 gleicher Bauart ergibt sich für die entsprechenden Zählraten R_1, R_2

$$R_1 \left|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{V}}\right|^2 = R_2 \left|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{H}}\right|^2$$

und die beiden Detektoren sprechen (bei nicht zu großer Strahlintensität so gut wie) niemals gleichzeitig an. Dementsprechend interpretiert man für die dem Strahl entsprechende Gesamtheit von *Photonen*:

$$\begin{aligned} \text{Wahrscheinlichkeit für } \textbf{h}\text{orizontale Polarisation} &= \frac{\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{H}}^2\right|}{\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}\right|^2} \\ &= \left|\langle \mathbf{H} \mid \mathbf{J} \rangle\right|^2, \\ \text{Wahrscheinlichkeit für } \textbf{v}\text{ertikale Polarisation} &= \frac{\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{V}}^2\right|}{\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}\right|^2} \\ &= \left|\langle \mathbf{V} \mid \mathbf{J} \rangle\right|^2. \end{aligned}$$

Dank $\hat{H} \perp \hat{V}$ ist die Summe beider Wahrscheinlichkeiten 1, was der (naiven) Vorstellung entspricht, daß jedes Photon entweder horizontal oder vertikal polarisiert ist.

Allgemein entsprechen die JONES-Vektoren $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ ***komplementären*** (im Teilchenbild einander ausschließenden) Eigenschaften, wenn sie zueinander ***orthogonal*** sind, d.h. falls

$$\langle \mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2 \rangle = 0$$

gilt, was auch durch $\mathbf{J}_1 \perp \mathbf{J}_2$ mitgeteilt wird. Die physikalisch anschauliche Interpretation dieser Komplementarität ergibt sich aus

$$\mathbf{J}_1 \perp \mathbf{J}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{J}_1 \propto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{D}(\pi/2)} \mathbf{J}_2^*$$

mit der Interpretation von (7.17) und (7.16).

Sei $\mathcal{A}$ ein optisches Gerät, das das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ (der Form (7.9)) in das elektrische Feld $\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = \hat{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ umwandelt. Dann sagt man, $\mathcal{A}$ genüge (für vorgegebene $\omega > 0$ und $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$) dem ***Superpositionsprinzip***, falls

$$\hat{A}\left(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)\right) = \hat{A}\,\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) + \hat{A}\,\mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)$$

für alle $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)$ der Form (7.9) gilt. Setzt man außerdem voraus, daß $\hat{A}$ stetig ist, so folgt, daß $\hat{A}$ auf dem zu $\mathbf{s}$ orthogonalen Teilraum von $\mathbb{C}^3$ linear ist:

$$\hat{A}(\lambda_1 \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\mathcal{E}}_2) = \lambda_1 \hat{A}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 + \lambda_2 \hat{A}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,,\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_1, \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \in \left\{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}^3 :\ \langle \mathbf{s} \mid \boldsymbol{\mathcal{E}} \rangle = 0\right\}.$$

Die Wirkung eines solchen Gerätes läßt sich also durch eine lineare Transformation des **nicht** normierten JONES-Vektors

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \longmapsto \hat{A}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

beschreiben. Das läßt sich auch mithilfe der sog. JONES-***Matrix***

$$\begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{e}_3 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_3 \right\rangle & \left\langle \mathbf{e}_3 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_1 \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{e}_1 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_3 \right\rangle & \left\langle \mathbf{e}_1 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_1 \right\rangle \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{A}$ ausdrücken:

$$\hat{A}\,\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{e}_3 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_3 \right\rangle & \left\langle \mathbf{e}_3 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_1 \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{e}_1 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_3 \right\rangle & \left\langle \mathbf{e}_1 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_1 \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}^3 \\ \mathcal{E}^1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=3,1} \left\langle \mathbf{e}_3 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_j \right\rangle \mathcal{E}^j \\ \sum\limits_{j=3,1} \left\langle \mathbf{e}_1 \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_j \right\rangle \mathcal{E}^j \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}\,.$$

Es ist klar, daß sich jede JONES-Matrix als (komplexe) Linearkombination der PAULI-***Matrizen***[11]

$$\hat{\tau}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

Version vom 26. März 2009

[11] Oft wird $\hat{\sigma}_\nu$ statt $\hat{\tau}^\nu$ geschrieben.

schreiben läßt (Bloch-***Darstellung***), die u.a. folgenden Relationen genügen:[12]

$$\begin{array}{rcll} \hat{\tau}^\nu \hat{\tau}^\nu &=& \hat{1} & \forall\, \nu \in \{0,1,2,3\}\,, \\ \hat{\tau}^j \hat{\tau}^k &=& -\,\hat{\tau}^k \hat{\tau}^j & \forall\, j,k \in \{1,2,3\}\,, j \neq k\,, \\ \hat{\tau}^1 \hat{\tau}^2 &=& i\,\hat{\tau}^3\,, & \\ \hat{\tau}^2 \hat{\tau}^3 &=& i\,\hat{\tau}^1\,, & \\ \hat{\tau}^3 \hat{\tau}^1 &=& i\,\hat{\tau}^2\,. & \end{array} \tag{7.20}$$

7.2.3 Einfache polarisationsoptische Komponenten

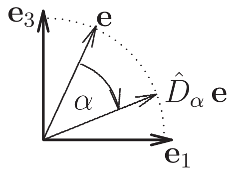
Die (Jones)-Matrizen[13]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\tau}^2} = \cos\alpha\,\hat{\tau}^0 - i\,\sin\alpha\,\hat{\tau}^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ +\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

mit der Wirkung

$$\mathbf{R} \longmapsto e^{-i\,\alpha}\,\mathbf{R}\,, \quad \mathbf{L} \longmapsto e^{+i\,\alpha}\,\mathbf{L}$$

beschreiben die Änderung des Lichtes bei Durchlaufen optisch aktiver Medien[14] entsprechender Dicke:



Bei geeigneter Verwendung doppelbrechender Medien kann man z.B. eine Phasenverzögerung der $\mathbf{e}_1$-Komponente von $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ gemäß der Jones-Matrix

$$\hat{S}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

erzielen oder eine Filterwirkungen entsprechend Tabelle 7.1.

Anmerkungen:

1. Besonders nützliche[15] Phasenverzögerer sind die $\lambda/4$-***Blättchen***, deren Jones-Matrix

$$\hat{S}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Version vom 26. März 2009

[12] Mit $\hat{1}$ (mitunter auch einfach nur durch 1) wird stets die Einheitsmatrix bzw. der Einsoperator bezeichnet. Hier gilt also $\hat{\tau}^0 = \hat{1}$.

[13] Zum Beweis von (7.21) siehe Aufgabe E25b).

[14] In ***optisch aktiv***en Medien haben links- und rechtszirkulares Licht unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Gemäß Gleichung (7.43) entspricht das der Wirkung von $\hat{D}(\alpha)$.

[15] Siehe dazu Aufgaben E13 und E11.

Filter für:	JONES-Matrix bzgl. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$:
rechtszirkulares Licht[16]	$\hat{P}_{\mathbf{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\hat{\tau}^0 + \hat{\tau}^2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
linkszirkulares Licht	$\hat{P}_{\mathbf{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\hat{\tau}^0 - \hat{\tau}^2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
linear $\parallel \mathbf{e}_3$ polarisiertes Licht	$\hat{P}_{\mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\hat{\tau}^0 + \hat{\tau}^3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
linear $\parallel \mathbf{e}_1$ polarisiertes Licht	$\hat{P}_{\mathbf{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\hat{\tau}^0 - \hat{\tau}^3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 7.1: Einfachste Polaristionsfilter

(bei entsprechender Orientierung des Blättchens), die gemäß

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wirkt.

2. Durch Kombination zweier $\lambda/4$-Blättchen ergibt sich auch ein ***$\lambda/2$-Blättchen*** mit der JONES-Matrix (bei entsprechender Orientierung der Blättchen)

$$\hat{S}_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(= \hat{\tau}^3\right)$$

ist, die gemäß

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} \rightleftharpoons \mathbf{L}$$

wirkt.

Die JONES-Matrizen $\hat{D}(\alpha)$ und $\hat{S}_\varphi$ sind *isometrisch*, d.h. die entsprechenden Abbildungen lassen die Norm für alle Vektoren ungeändert. Aufgrund der sog. ***Polarisationsidentität***[17]

$$\langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left\langle \mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \mid \mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \right\rangle \tag{7.22}$$

bilden sie also Orthonormalbasen stets auf Orthonormalbasen ab.

Die JONES-Matrizen $\hat{P}$ der Polarisations-**Filter** sind *idempotent*, d.h. es gilt

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, \tag{7.23}$$

Version vom 26. März 2009

[16]Tatsächlich hängen $\hat{P}_{\mathbf{R}}$ und $\hat{P}_{\mathbf{L}}$ nicht von der speziellen Wahl der rechtshändigen Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{s}\}$ ab (siehe Aufgabe E9).

[17]Zum Beweis von (7.22) siehe Aufgabe E57.

und genügen der Bedingung

$$\left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \left(\hat{1} - \hat{P}\right)\mathbf{z}_2 \right\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^2 \,. \tag{7.24}$$

Man sieht leicht, daß (7.24) unter der Voraussetzung von (7.23) äquivalent ist zu

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}\,, \tag{7.25}$$

wobei die zu $\hat{A}$ ***adjungierte Matrix*** $\hat{A}^\dagger$ jeweils eindeutig durch

$$\left\langle \hat{A}^\dagger\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \mathbf{z}_2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \quad \forall\,, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^2 \tag{7.26}$$

charakterisiert ist.

Beweisskizze: Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}
(7.24) \implies \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \mathbf{z}_2 \right\rangle &= \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle + \underbrace{\left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \left(\hat{1} - \hat{P}\right)\mathbf{z}_2 \right\rangle}_{=0} \\
&= \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle + \underbrace{\left\langle \left(\hat{1} - \hat{P}\right)\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle}_{=0} \\
&= \left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(7.23), (7.25) \implies \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \left(\hat{1} - \hat{P}\right)\mathbf{z}_2 \right\rangle &= \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \mathbf{z}_2 \right\rangle - \underbrace{\left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle}_{=\left\langle \mathbf{z}_1 \middle| \hat{P}^2\,\mathbf{z}_2 \right\rangle} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Matrizen mit den Eigenschaften (7.23) und (7.25) bezeichnet man auch als ***Projektoren***.[18] Speziell die *Projektoren* $\hat{P}_{\mathbf{R}}$ und $\hat{P}_{\mathbf{L}}$ sind zueinander ***komplementär***:

$$\hat{P}_{\mathbf{R}}\,\hat{P}_{\mathbf{L}} = 0\,, \quad \hat{P}_{\mathbf{R}} + \hat{P}_{\mathbf{L}} = \hat{1}\,.$$

Entsprechendes gilt natürlich für das Paar $\hat{P}_{\mathbf{V}}$, $\hat{P}_{\mathbf{H}}$.

Im Gegensatz zu den etwa durch $\hat{D}(\alpha)$ oder $\hat{S}_\varphi$ beschriebenen Wirkungen,[19] lassen sich die Filterwirkungen i.a. nicht mithilfe linearer optischer Komponenten rückgängig machen.

7.3 Lineare Operatoren

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur lineare Abbildungen eines komplexen Vektorraumes V in sich und in Abschnitt 7.4.1 lineare Abbildungen von V in $\mathbb{C}$, also (lineare) komplexwertige Funktionen (*Funktionale*) auf V.

Version vom 26. März 2009

[18] Siehe Definition 7.3.14.

[19] Man beachte: $\hat{D}(-\alpha)\,\hat{D}(\alpha) = \hat{U}_{-\varphi}\,\hat{S}_\varphi = \hat{1}$.

7.3.1 Grundlegendes

Quantenmechanische Motivation: Wenn man einen (7.9) entsprechenden Lichtstrahl durch geeignete Strahlteiler n-fach auffächert, dann sind die (reinen) inneren Quantenzustände der entsprechenden (Einzel-) Photonen durch Elemente des $\mathbb{C}^{2n}$ beschreibbar; vgl. Abschnitt 3.1.2 von (Lücke, qip). $2n \times 2n$-Matrizen beschreiben dann die Wirkung linear optischer Komponenten, die keine weitere Strahlaufteilung produzieren. Insbesondere beschreibt $|\mathbf{J}\rangle\langle\mathbf{J}|$ für normiertes $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{2n}$ jeweils die Wirkung eines Filters, der den $\mathbf{J}$ entsprechenden n-fach-Teilstrahl passieren läßt und den (orthogonalen) Rest absorbiert. Das 'Sortieren' nach normierten $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_{2n}$ entsprechenden inneren Zuständen ist genau dann möglich, wenn die $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_{2n}$ eine ONB bilden:

$$|\langle \mathbf{J}_\nu \mid \mathbf{J}\rangle|^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Übergangswahrscheinlichkeit für } \mathbf{J} \to \mathbf{J}_\nu \\ \text{im Zustand } \mathbf{J} \text{ beim 'Sortieren' nach } \mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_{2n}\,. \end{array} \right.$$

Wenn man jeweils dem Vektor $\mathbf{J}_\nu$ einer ONB von $\mathbb{C}^{2n}$ den Werte a_ν einer physikalischen Größe A zuordnet, dann ist

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \mathbf{J} \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{J} \right\rangle ,$$

wobei

$$\hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu \, |\mathbf{J}_\nu\rangle\langle\mathbf{J}_\nu| \qquad (\textbf{\textit{Observable}} \text{ von } A)\,, \tag{7.27}$$

jeweils der ***Erwartungswert*** für A im Quantenzustand $\widehat{=}\,\mathbf{J}$; denn

$$\left\langle \mathbf{J} \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{J} \right\rangle \underset{(7.27)}{=} \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu \, |\langle \mathbf{J}_\nu \mid \mathbf{J}\rangle|^2$$

und

$$|\langle \mathbf{J}_\nu \mid \mathbf{J}\rangle|^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit für den Übergang} \\ \mathbf{J} \to \mathbf{J}_\nu \text{ bei 'Messung' von } A\,. \end{array} \right.$$

Meistens sind i.d. Quantenmechanik zunächst nur die Observablen $\hat{A}$ der Physikalischen Größen A gegeben und ihre ***Spektraldarstellung*** (7.27) muß erst bestimmt werden. Damit ergibt sich:

> **Zentrales Problem der Quantenmechanik:** Finde zu gegebenem (selbstadjungiertem) $\hat{A}$ eine ONB $\{\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_{2n}\}$ und Werte $a_1, \ldots, a_{2n}$ für A so, daß (7.27) gilt.

Für jedes $\nu \in \{1, \ldots, 2n\}$ folgt aus (7.27)

$$\hat{A}\,\mathbf{J}_\nu = a_\nu\,\mathbf{J}_\nu\,,$$

d.h.:[20] $\mathbf{J}_\nu$ ist jeweils *Eigenvektor* von $\hat{A}$ zum *Eigenwert* a_ν.

Will man die Abbildung $\mathbf{J} \longmapsto \hat{A}\,\mathbf{J}$ Basis-unabhängig beschreiben, die $\mathbf{J}$ also nicht als Spalten-Vektoren darstellen, dann muß man die Matrix $\hat{A}$ durch einen entsprechenden *linearen Operator* ersetzen.

[20] Siehe Definition 7.3.16.

Definition 7.3.1 *Sei V ein komplexer Vektorraum. Ein* ***linearer Operator auf*** *V ist dann eine Abbildung $\hat{A}$ von V in V mit*

$$\hat{A}(a\,\mathbf{z}_1 + b\,\mathbf{z}_2) = a\,\hat{A}(\mathbf{z}_1) + b\,\hat{A}(\mathbf{z}_2) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}\,,\ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V\,.$$

Die Bezeichnung „Operator“ bezieht sich auf die Schreibweise

$$\hat{A}\,\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}(\mathbf{z})\,, \quad \hat{A}\,\hat{B}\,\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\Big(\hat{B}(\mathbf{z})\Big)\,.$$

Definition 7.3.2 *Seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann heißt $\hat{A}$* ***invertierbar****, falls ein linearer Operator $\hat{A}^{-1}$ auf V existiert mit*

$$\hat{A}\,\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\,\hat{A} = \hat{1}\,.$$

Man bezeichnet $\hat{A}^{-1}$ als den ***zu*** *$\hat{A}$* ***invers****en Operator.*[21]

Lemma 7.3.3 *Seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:*

1. *$\hat{A}$ ist invertierbar.*
2. $\hat{A}\,\mathbf{z} = 0 \Longrightarrow \mathbf{z} = 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in V\,.$
3. *$\hat{A}$ bildet* **jede** *Basis von V auf eine (i.a. andere) Basis von V ab.*
4. *Es existiert eine eine Basis von V, deren Bild unter $\hat{A}$ ebenfalls eine Basis von $\hat{A}$ ist.*

Beweisskizze:

<u>Zu '1. $\Longrightarrow$ 2.':</u> Wenn $\hat{A}$ invertierbar ist, gilt

$$\hat{A}\,\mathbf{z} = 0 \Longrightarrow \mathbf{z} = \hat{A}^{-1}\,\hat{A}\,\mathbf{z} = \hat{A}^{-1}\,0 = 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in V\,.$$

<u>Zu '2. $\Longrightarrow$ 3.':</u> Wenn die 2. Aussage gilt, ist mit jeder Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ von V gemäß Lemma 7.1.6 und Lemma 7.1.5 $\left\{\mathbf{b}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}'_n \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\mathbf{b}_n\right\}$ eine Basis von V; denn:

$$\begin{aligned}
z^1\,\hat{A}\,\mathbf{b}_1 + \ldots + z^n\,\hat{A}\,\mathbf{b}_n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \hat{A}\left(z^1\,\mathbf{b}_1 + \ldots + z^n\,\mathbf{b}_n\right) = 0 \\
&\underset{\text{2. Auss.}}{\Longrightarrow} \quad z^1\,\mathbf{b}_1 + \ldots + z^n\,\mathbf{b}_n = 0 \\
&\underset{\text{Lemma 7.1.5}}{\Longrightarrow} \quad z^1 = \ldots = z^n = 0\,.
\end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

[21] Man sieht leicht, daß $\hat{A}^{-1}$ eindeutig durch $\hat{A}$ bestimmt ist. Im Unendlichdimensionalen wird **nicht** mehr $D_{\hat{A}^{-1}} = V$ vorausgesetzt!

Zu '3. $\Longrightarrow$ 4.': Voraussetzungsgemäß existiert eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ von V und wenn die 3. Aussage gilt, bildet $\hat{A}$ diese Basis auf eine (i.a. andere) Basis von V ab.

Zu '4. $\Longrightarrow$ 1.': Wenn die 4. Aussage gilt, können wir eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ von V wählen, die von $\hat{A}$ auf eine Basis von V abgebildet wird. Damit ergibt sich gemäß

$$\hat{A}^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \, \hat{A}\, \mathbf{b}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \, \mathbf{b}_\nu \quad \forall\, z^1, \ldots, z^n \in \mathbb{C}$$

der zu $\hat{A}$ inverse Operator $\hat{A}^{-1}\,'$. ∎

7.3.2 Matrizen und Determinanten

Zur Bestimmung von Eigenwerten a eines linearen Operators $\hat{A}$ ist ein einfaches Kriterium für die Invertierbarkeit von $\hat{A} - a\,\hat{1}$ erwünscht. Für **endlich**dimensionales V dient dazu die *Determinante*.

Oft nehmen wir stillschweigend an, daß V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum mit einer ausgewählten (geordneten) Basis $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ ist.[22] Dann ist jeder lineare Operator $\hat{A}$ auf V durch seine Matrix

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & \ldots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \ldots & A^n{}_n \end{pmatrix}$$

bzgl. dieser Basis eindeutig charakterisiert, deren Komponenten die Wirkung auf die $\mathbf{b}_\nu$ beschreiben:[23]

$$\hat{A}\, \mathbf{b}_\nu = \begin{pmatrix} A^1{}_\nu \\ \vdots \\ A^n{}_\nu \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{7.28}$$

Damit gilt nämlich

$$\hat{A}\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \ldots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \ldots & A^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A^1{}_1\, z^1 + \ldots A^1{}_n\, z^n \\ \vdots \\ A^n{}_1\, z^1 + \ldots A^n{}_n\, z^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)\,, \tag{7.29}$$

Version vom 26. März 2009

[22] Es sei daran erinnert daß man auf einem endlichdimensionalen komplexen Raum V zur jeder vorgegebenen Basis ein inneres Produkt einführen kann, bzgl. dessen diese Basis orthonormal ist (siehe Anfang von 7.1.2).

[23] Im Sinne der Anmerkung zu (7.8) gilt also

$$\hat{A} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \underbrace{A^\mu{}_\nu}_{=\langle \mathbf{e}_\mu | \hat{A}\, \mathbf{e}_\nu \rangle} \; |\mathbf{e}_\mu\rangle\, \langle \mathbf{e}_\nu|\,,$$

wenn $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ mit der geordneten Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ übereinstimmt.

wobei die z^ν natürlich die Komponenten von $\mathbf{z}$ bezeichnen:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \; .$$

In diesem Sinne werden wir oft — sofern dadurch keine Mißverständnisse zu befürchten sind — einen linearen Operator mit seiner Matrix bzgl. der ausgewählten Orthonormalbasis identifizieren[24] und damit gilt dann

$$\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C^\mu{}_\nu = \sum_{\lambda=1}^n A^\mu{}_\lambda \, B^\lambda{}_\nu \quad \forall\, \mu, \nu \in \{1, \dots, n\} \; . \tag{7.30}$$

Lemma 7.3.4 *Gegeben seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum, eine Basis $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ von V und ein invertierbarer linearer Operator*

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix} \quad \textit{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$$

auf V . Dann gilt für alle $\mathbf{z} \in V$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \textit{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \\ \Longleftrightarrow \; & \mathbf{z} = \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \textit{bzgl. } \left(\hat{B}\,\mathbf{b}_1, \dots, \hat{B}\,\mathbf{b}_n\right) \; . \end{aligned}$$

Beweisskizze: Für

$$\sum_{\nu=1}^{\nu} z^\nu \, \mathbf{b}_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu} z'^{\,\nu} \, \hat{B}\, \mathbf{b}_\nu$$

folgt aus der Invertierbarkeit von $\hat{B}$

$$\hat{B}^{-1} \sum_{\nu=1}^{\nu} z^\nu \, \mathbf{b}_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu} z'^{\,\nu} \, \mathbf{b}_\nu$$

Version vom 26. März 2009

[24] Tatsächlich haben wir das bereits in 7.2.3 getan.

und somit[25]

$$\begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'^1 \\ \vdots \\ z'^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)\,. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 7.3.5 *Seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum, $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis von V und $\hat{A}, \hat{B}$ lineare Operatoren auf V. Wenn $\hat{B}$ invertierbar ist, dann stimmt die Matrix von $\hat{A}$ bzgl. $\left(\hat{B}\,\mathbf{b}_1, \dots, \hat{B}\,\mathbf{b}_n\right)$ mit der Matrix von $\hat{B}^{-1}\hat{A}\,\hat{B}$ bzgl. $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ überein.*

Beweisskizze: Für

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \\ &= \begin{pmatrix} z'^1 \\ \vdots \\ z'^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \left(\hat{B}\,\mathbf{b}_1, \dots, \hat{B}\,\mathbf{b}_n\right) \end{aligned}$$

gilt

$$\hat{A}\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$$

und somit gemäß Lemma 7.3.4 bzgl. $\left(\hat{B}\,\mathbf{b}_1, \dots, \hat{B}\,\mathbf{b}_n\right)$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\,\mathbf{z} &= \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}}_{=\text{Matrix von } \hat{B}^{-1}\hat{A}\,\hat{B} \text{ bzgl. } \left(\hat{B}\,\mathbf{b}_1,\dots,\hat{B}\,\mathbf{b}_n\right)} \begin{pmatrix} z'^1 \\ \vdots \\ z'^n \end{pmatrix} . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

[25] Wir kennzeichnen mit $^{-1}$ natürlich die durch

$$\begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^n{}_1 & \dots & B^n{}_n \end{pmatrix}^{-1} = \hat{1}$$

charakterisierte ***inverse Matrix***. Siehe dazu auch Aufgabe E17.

Eine wichtige Kenngröße linearer Operatoren auf endlichdimensionalen komplexen EUKLIDischen Räumen ist ihre ***Determinante*** (vgl. (2.34) und Lemma A.3.2)

$$\boxed{\det(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{\nu=1}^{n} A^{\nu}{}_{\pi(\nu)}\,,} \tag{7.31}$$

wobei S_n die Menge aller rückeindeutigen[26] Abbildungen von $\{1,\ldots,n\}$ auf $\{1,\ldots,n\}$ bezeichnet[27] und die sog. ***Signatur*** $\operatorname{sign}(\pi)$ von $\pi \in S_n$ so definiert ist daß

$$\prod_{\substack{\nu,\mu \in \{1,\ldots,n\} \\ \nu<\mu}} \left(x_{\pi(\nu)} - x_{\pi(\mu)}\right) = \operatorname{sign}(\pi) \prod_{\substack{\nu,\mu \in \{1,\ldots,n\} \\ \nu<\mu}} (x_\nu - x_\mu) \quad \forall\, x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$$

und somit[28]

$$\operatorname{sign}(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } \pi = \text{Produkt einer } \textbf{geraden} \text{ Zahl von Transpositionen}\,, \\ -1 & \text{falls } \pi = \text{Produkt einer } \textbf{ungeraden} \text{ Zahl von Transpositionen} \end{cases} \tag{7.32}$$

gilt. In der Schreibweise

$$\hat{A} = (\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n)\;, \qquad \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} A^1{}_\nu \\ \vdots \\ A^n{}_\nu \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$$

gilt dafür offensichtlich

$$\det\left(\mathbf{A}_{\pi(1)},\ldots,\mathbf{A}_{\pi(n)}\right) = \operatorname{sign}(\pi)\, \det(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n) \quad \forall\, \pi \in S_n\,, \tag{7.33}$$

woraus mit

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A}_1 + \lambda\,\mathbf{B}, \mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n) \\ =\;& \det(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n) + \lambda\, \det(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,,\, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^n \end{aligned} \tag{7.34}$$

auch

$$\det(\mathbf{A}_1 + \lambda\,\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,,\, \mu \in \{2,\ldots,n\} \tag{7.35}$$

folgt.

Anmerkung: Mithilfe von (7.33) und (7.35) lassen sich die Determinanten von $n \times n$-Matrizen auch für $n > 3$ leicht bestimmen.

[26] Rückeindeutige Abbildungen nennt man auch ***injektiv***.

[27] Diese Abbildungen nennt man auch ***Permutationen***.

[28] Als ***Transposition*** bezeichnet man eine Permutation $\pi \in \mathrm{S}_n$, die genau zwei der Zahlen $1,\ldots,n$ ändert (miteinander vertauscht).

Außerdem gilt

$$\boxed{\det\left(\hat{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det(\hat{A})\,,} \tag{7.36}$$

wobei $\hat{A}^{\mathrm{T}}$ die zu $\hat{A}$ ***transponierten Matrix***[29]

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^n{}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^1{}_n & \dots & A^n{}_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Verallgemeinerungen:

1. Für beliebige komplexe $n \times m$-Matrizen definiert man

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^n{}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^1{}_m & \dots & A^n{}_m \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

und

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_m \end{pmatrix}^{\dagger} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \left(A^1{}_1\right)^* & \dots & \left(A^n{}_1\right)^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(A^1{}_m\right)^* & \dots & \left(A^n{}_m\right)^* \end{pmatrix}. \tag{7.38}$$

2. Für beliebige komplexe $j \times m$- und $m \times k$-Matrizen Definiert man

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^j{}_1 & \dots & A^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^m{}_1 & \dots & B^m{}_k \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^m A^1{}_\mu\, B^\mu{}_1 & \dots & \sum_{\mu=1}^m A^1{}_\mu\, B^\mu{}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\mu=1}^m A^j{}_\mu\, B^\mu{}_1 & \dots & \sum_{\mu=1}^m A^j{}_\mu\, B^\mu{}_k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.39}$$

3. Aus

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \qquad \text{bzgl. der ONB } (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

folgt damit stets

$$\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^n (a^\nu)^*\, b^\nu$$

und

$$|\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b}| = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^1\left(b^1\right)^* & \dots & a^1\left(b^n\right)^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n\left(b^1\right)^* & \dots & a^n\left(b^n\right)^* \end{pmatrix} \qquad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\,.$$

Lemma 7.3.6 ——— *Version vom 26. März 2009* ———

[29]**Warnung:** Welchem Operator die transponierte Matrix entspricht, hängt i.a. von der Basis ab, auf die sich die Matrix bezieht!

Seien V ein komplexer Vektorraum und $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis von V. Dann gilt bzgl. dieser Basis

$$\boxed{\det\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) = \det(\hat{A})\,\det(\hat{B})\,.}$$

für alle linearen Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ auf V.

Beweisskizze:[30]

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) &= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A^\nu{}_\mu B^\mu{}_{\pi(\nu)} \\
&= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\mu_\nu} B^{\mu_\nu}{}_{\pi(\nu)} \\
&= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_n\in\{1,\ldots,n\} \\ \mu_j\neq\mu_k \text{ for } j\neq k}} \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\mu_\nu} B^{\mu_\nu}{}_{\pi(\nu)} \\
&= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\pi_1\in \mathrm{S}_n} \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\pi_1(\nu)} B^{\pi_1(\nu)}{}_{\pi(\nu)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\pi,\pi_1\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\pi_1(\nu)} \prod_{\mu=1}^{n} B^{\pi_1(\mu)}{}_{\pi(\mu)} \\
&= \sum_{\pi,\pi_1\in \mathrm{S}_n} \underbrace{\operatorname{sign}(\pi\circ\pi_1)}_{=\operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\pi_1)} \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\pi_1(\nu)} \underbrace{\prod_{\mu=1}^{n} B^{\pi_1(\mu)}{}_{\pi\left(\pi_1(\mu)\right)}}_{=\prod_{\mu=1}^{n} B^\mu{}_{\pi(\mu)}} \\
&= \left(\sum_{\pi_1\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi_1) \prod_{\nu=1}^{n} A^\nu{}_{\pi_1(\nu)}\right) \left(\sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{\mu=1}^{n} B^\mu{}_{\pi(\mu)}\right) \\
&= \det\left(\hat{A}\right) \det\left(\hat{B}\right)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Anmerkung: Für invertierbares $\hat{A}$ folgt aus Lemma 7.3.6

$$\boxed{\det\left(\hat{A}^{-1}\right) = 1/\det(\hat{A})\,,}$$

insbesondere für $\hat{A} = \hat{1}$ also

$$\boxed{\det(\hat{1}) = 1\,.}$$

[30] Üblicherweise bezeichnet man mit $f\circ g$ die Komposition der Abbildungen f und g:

$$(f\circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(g(x)\big)\,.$$

Folgerung 7.3.7 *Die Definition (7.31) hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweisskizze: Nach Lemma 7.3.5 stimmt die Matrix von $\hat{A}$ bzgl. $(\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n)$ mit der Matrix von $\hat{B}^{-1}\,\hat{A}\,\hat{B}$ bzgl. $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ überein, wobei $\hat{B}$ den durch

$$\hat{B}\,\mathbf{b}_\nu = \mathbf{b}'_\nu \quad \forall\,\nu \in \{1, \dots, n\}$$

charakterisierten linearen Operator auf V bezeichnet. Der Wert der Determinante von $\hat{A}$ bzgl. $(\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n)$ stimmt also mit dem Wert der Determinante von $\hat{B}^{-1}\,\hat{A}\,\hat{B}$ bzgl. $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ überein. Die Behauptung folgt damit gemäß

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{B}^{-1}\,\hat{A}\,\hat{B}\right) &\underset{\text{Lemma 7.3.6}}{=} \det\left(\hat{B}^{-1}\right)\,\det\left(\hat{A}\,\hat{B}\right)\\
&= \det\left(\hat{B}^{-1}\right)\,\det\left(\hat{A}\right)\,\det\left(\hat{B}\right)\\
&\underset{\text{Lemma 7.3.6}}{=} \det\left(\hat{B}^{-1}\,\hat{B}\right)\,\det\left(\hat{A}\right)\\
&= \det(\hat{1})\,\det\left(\hat{A}\right)\\
&= \det\left(\hat{A}\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 7.3.8 *Seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann gilt:*

$$\boxed{\hat{A} \text{ invertierbar} \iff \det\hat{A} \neq 0\,.}$$

Beweisskizze: Falls $\hat{A}$ invertierbar ist, folgt aus

$$1 = \det(\hat{1}) = \det\left(\hat{A}^{-1}\,\hat{A}\right) \underset{\text{Lemma 7.3.6}}{=} \det\left(\hat{A}^{-1}\right)\,\det\left(\hat{A}\right)$$

unmittelbar $\det\left(\hat{A}\right) \neq 0$. Falls $\hat{A}$ nicht invertierbar ist, existiert ein $\mathbf{z} \in V$ mit

$$0 = \hat{A}\,\mathbf{z} = \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \begin{pmatrix} A^1{}_\nu \\ \vdots \\ A^n{}_\nu \end{pmatrix}.$$

Die Spalten-Vektoren der Matrix von $\hat{A}$ sind also linear abhängig. Mit (7.33) und (7.35) folgt daraus, daß die Determinante verschwindet. $\blacksquare$

Anmerkung: $\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$ ist also genau dann von Null verschieden, wenn die $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ linear unabhängig sind.

7.3.3 Selbstadjungierte und unitäre Operatoren

Definition 7.3.9 *Seien V ein komplexer Vektorraum mit* EUKLID*ischer Norm $\|.\|$ und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann nennt man $\hat{A}$* ***isometrisch****, falls*

$$\left\|\hat{A}\,\mathbf{z}\right\| = \|\mathbf{z}\| \quad \forall\,\mathbf{z} \in V$$

gilt. Falls zusätzlich[31]

$$R_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,V = V$$

gilt, nennt man $\hat{A}$ ***unitär****.*

Folgerung 7.3.10 *Seien V ein (nicht notwendig endlichdimensionaler)* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

1. *$\hat{A}$ ist isometrisch.*
2. *Es gilt*
$$\left\langle \hat{A}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle = \langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2 \rangle \quad \forall\,\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V\,.$$
3. *Für jedes (nicht notwendige endliche) Orthonormalsystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ von V ist auch $\left\{\hat{A}\,\mathbf{e}_1, \hat{A}\,\mathbf{e}_2, \ldots\right\}$ ein Orthonormalsystem von V.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Polarisationsidentität (7.22). ∎

Definition 7.3.11 *Sei V ein komplexer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle . \mid . \rangle$ und Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Sei weiterhin $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann bezeichnet man den durch*

$$\hat{A}^\dagger\,\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \left\langle \hat{A}\,\mathbf{e}_\nu \,\middle|\, \mathbf{z} \right\rangle \mathbf{e}_\nu \quad \forall\,\mathbf{z} \in V$$

charakterisierten linearen Operator $\hat{A}^\dagger$ als den zu $\hat{A}$ ***adjungiert****en Operator. Im Falle $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ nennt man $\hat{A}$* ***selbstadjungiert****.*

Version vom 26. März 2009

[31] Wir benutzen die übliche Schreibweise

$$\hat{A}\,M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{A}\,\mathbf{z} : \mathbf{z} \in M\right\}$$

für Operatoren $\hat{A}$ auf und Teilmengen M von V.

Folgerung 7.3.12 *Unter den Voraussetzungen von Definition 7.3.11 ist der adjungierte Operator der einzige Operator $\hat{A}^\dagger$, für den*

$$\left\langle \mathbf{z}_1 \middle| \hat{A}\, \mathbf{z}_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger\, \mathbf{z}_1 \middle| \mathbf{z}_2 \right\rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$$

gilt, also von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis unabhängig.

Anmerkung: Gemäß den Folgerungen 7.3.10 (2. Aussage) und 7.3.12 gilt

$$\hat{A} \text{ isometrisch} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{1}\,.$$

Lemma 7.3.13 *Seien V ein endlichdimensionaler*[32] *komplexer Vektorraum und $\hat{U}$ ein linearer Operator auf V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\hat{U}$ ist unitär.*
2. *Für jede diskrete Teilmenge $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ von V gilt*

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\} \ \textbf{maximales}\ \textit{Orthonormalsystem von}\ V \\ \Longrightarrow\ &\left\{\hat{U}\mathbf{e}_1, \hat{U}\mathbf{e}_2, \ldots\right\} \ \textbf{maximales}\ \textit{Orthonormalsystem von}\ V\,. \end{aligned}$$

3. *Es gilt*

$$\hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\,\hat{U} = \hat{1}\,.$$

Beweisskizze: Sei $\hat{U}$ unitär und sei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ ein Orthonormalsystem von V. Nach Folgerung 7.3.10 ist dann auch $\left\{\hat{U}\,\mathbf{e}_1, \hat{U}\,\mathbf{e}_2, \ldots\right\}$ ein Orthonormalsystem von V. Da voraussetzungsgemäß $R_{\hat{U}} = V$ gilt, muß auch $\left\{\hat{U}\,\mathbf{e}_1, \hat{U}\,\mathbf{e}_2, \ldots\right\}$ maximal sein, wenn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ maximal ist.[33] Damit ist „1. $\Longrightarrow$ 2.“ bewiesen.

[32] Das Lemma ist so formuliert, daß es auch für separable HILBERT-Räume gilt (siehe Kapitel 8).

[33] Während das für endlichdimensionales V evident ist, läßt sich für unendlichdimensionales V wie folgt argumentieren: Wäre $\left\{\hat{U}\,\mathbf{e}_1, \hat{U}\,\mathbf{e}_2, \ldots\right\}$ nicht maximal, gäbe es ein $\mathbf{z}' \in V$ mit

$$\|\mathbf{z}'\| = 1 \quad \mathbf{z}' \perp \hat{U}\,\mathbf{e}_\nu \quad \forall\,\nu$$

Wegen $R_{\hat{U}} = V$ würde dazu ein $\mathbf{z} \in V$ existieren mit $\hat{U}\,\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ und somit, gemäß Folgerung 7.3.10,

$$\|\mathbf{z}\| = 1 \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_\nu \quad \forall\,\nu\,,$$

Dann wäre $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ aber nicht maximal.

Wenn $\hat{U}$ maximale Orthonormalsysteme von V wieder auf solche abbildet, dann existiert $\hat{U}^{-1}$ und dafür gilt

$$\begin{aligned}
\Big\langle \hat{U}^{-1} \underbrace{\mathbf{e}'_\nu}_{\stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}\,\mathbf{e}_\nu} \Big| \mathbf{e}_\mu \Big\rangle &= \langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{e}_\mu \rangle \\
&= \delta_{\nu\mu} \\
&= \left\langle \hat{U}\,\mathbf{e}_\nu \middle| \hat{U}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{e}'_\nu \middle| \hat{U}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \quad \forall\, \nu, \mu\,,
\end{aligned}$$

wenn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ und damit auch $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots\}$ ein maximales Orthonormalsystem von V ist. Daraus folgt

$$\left\langle \hat{U}^{-1}\,\mathbf{z}_1 \middle| \mathbf{z}_2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{z}_1 \middle| \hat{U}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$$

und somit, gemäß Lemma 7.3.12, $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, also $\hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\,\hat{U} = \hat{1}$. Damit ist auch „2. $\Longrightarrow$ 3.“ bewiesen.

Wenn $\hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\,\hat{U} = \hat{1}$ und somit $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ gilt, dann folgt daraus

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{U}\,\mathbf{z}_1 \middle| \hat{U}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle &= \left\langle \mathbf{z}_1 \mid \hat{U}^\dagger\,\hat{U}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{z}_1 \middle| \hat{U}^{-1}\,\hat{U}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2 \rangle\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V
\end{aligned}$$

und somit die Isometrie von $\hat{U}$. Da $\hat{U}^{-1}$ auf ganz V definiert ist, gilt auch $R_{\hat{U}} = V$. $\hat{U}$ ist also unitär. Damit ist schließlich auch „3. $\Longrightarrow$ 1.“ gezeigt und die Beweiskette geschlossen. ∎

Anmerkungen:

1. Für isometrische Operatoren $\hat{A}$ auf endlichdimensionalen euklischen Räumen gilt stets $R_{\hat{A}} = V$, sie sind also stets auch unitär.

2. Für isometrische Operatoren $\hat{A}$ auf unendlichdimensionalen euklischen Räumen gilt $R_{\hat{A}} = V$ jedoch **nicht** immer, wie etwa das Beispiel[34]
$$\hat{A}\,\mathbf{e}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{\nu+1} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$
mit einem maximalen Orthonormalsystem $\{\mathbf{e}_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ zeigt.

Die einfachsten selbstadjungierten Operatoren sind *Orthogonalprojektoren*, wie z.B. $\hat{P}_{\mathbf{R}}$, $\hat{P}_{\mathbf{L}}$, $\hat{P}_{\mathbf{V}}$ und $\hat{P}_{\mathbf{H}}$ aus 7.2.3.

Version vom 26. März 2009

[34] Die Definition für $\hat{A}$ ist natürlich linear und stetig fortzusetzen.

Definition 7.3.14 *Sei ein en V ein endlichdimensionaler*[35] EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{P}$ ein linearer Operator auf V. Dann nennt man $\hat{P}$ einen (Orthogonal-)* ***Projektionsoperator*** *(kurz: Projektor), wenn*[36]

$$\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$$

gilt.

Folgerung 7.3.15 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{P}$ ein linearer Operator auf V. Dann ist $\hat{P}$ genau dann ein Projektor, wenn ein Teilraum T von V existiert mit*

$$\hat{P}\,\mathbf{z} = \begin{cases} \mathbf{z} & \text{für } \mathbf{z} \in T\,, \\ 0 & \text{für } \mathbf{z} \perp T\,. \end{cases} \tag{7.40}$$

Wenn $\hat{P}$ ein Projektor ist, dann stimmt der Teilraum T von (7.40) mit $\hat{P}\,V$ überein und für jede Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ von $\hat{P}\,V$ gilt:

$$\hat{P}\,\mathbf{z} = \sum_{\mu=1}^{m} \langle \mathbf{e}_\mu \mid \mathbf{z} \rangle\, \mathbf{e}_\mu \quad \forall\, \mathbf{z} \in V\,. \tag{7.41}$$

Beweisskizze: Sei $\hat{P}$ ein Projektor. Dann folgt (7.40) für $\mathbf{z} \in T = \hat{P}\,V$ aus $\hat{P}^2 = \hat{P}$ und für $\mathbf{z} \perp T = \hat{P}\,V$ aus

$$\left\langle \mathbf{z}' \,\middle|\, \hat{P}\,\mathbf{z} \right\rangle \underset{\hat{P}=\hat{P}^\dagger}{=} \left\langle \hat{P}\,\mathbf{z}' \,\middle|\, \mathbf{z} \right\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{z}' \in V\,.$$

Umgekehrt, falls (7.40) gilt, dann folgt daraus[37] $T = \hat{P}\,V$ und (7.41). Aus letzterem folgt aber $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$. ∎

Anmerkung: Nach Folgerung 7.3.15 existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen Projektoren $\hat{P}$ und Teilräumen T. Dementsprechend bezeichnet man mit $\hat{P}_T$ jeweils den Projektor mit $\hat{P}\,V = T$. Im Falle $T = \{\lambda\,\mathbf{z} :\ \lambda \in C\}$ schreibt man dafür auch kürzer $\hat{P}_{\mathbf{z}}$. Damit gilt

$$\hat{P}_{\mathbf{z}}\,\mathbf{z}' = \left\langle \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \middle| \mathbf{z}' \right\rangle \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \quad \forall\, \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in V \setminus \{0\}\ ,$$

was man — im Sinne der Anmerkung zu Gleichung (7.8) — auch formal durch

$$\hat{P}_{\mathbf{z}} = \left| \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right|$$

mitteilt.

[35] Definition 7.3.14 gilt mit Definition 8.3.7 auch für HILBERT-Räume; siehe Definition 8.3.13.

[36] Man sieht leicht: $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger \iff \hat{P}^\dagger \hat{P} = \hat{P}$.

[37] Man ergänze $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ zu einer Orthonormalbasis von V (falls $T \neq V$).

Reelle Linearkombinationen von Projektoren auf einem **endlichdimensionalen** EUKLIDischen komplexen Raum sind offensichtlich ebenfalls selbstadjungiert. Wir werden sehen, daß damit bereits alle selbstadjungierten Operatoren auf solchen Räumen erfaßt sind.

7.3.4 Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition 7.3.16 *Seien V ein komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann versteht man unter einem **Eigenvektor** von $\hat{A}$ einen Vektor $\mathbf{z} \in V$ mit*

$$\hat{A}\,\mathbf{z} \propto \mathbf{z} \neq 0\,.$$

*Unter einem **Eigenwert** von $\hat{A}$ versteht man eine komplexe Zahl E, für die $\hat{A} - E\,\hat{1}$* **nicht** *invertierbar ist.*

Lemma 7.3.17 *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum, $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V und $E \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *E ist ein Eigenwert von $\hat{A}$.*
2. $\det\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right) = 0$.
3. *Es existiert[38] ein Eigenvektor $\mathbf{z}_E$ von $\hat{A}$ mit $\hat{A}\,\mathbf{z}_E = E\,\mathbf{z}_E$.*

Beweis: Siehe Lemma 7.3.3 resp. Lemma 7.3.8. ∎

Beispiel $\hat{A} = \hat{\tau}^2$: Hier gilt

$$\det\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right) \underset{\text{bzgl. } \{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1\}}{=} \det\begin{pmatrix} -E & -i \\ +i & -E \end{pmatrix} = E^2 - 1\,.$$

Die Menge der Eigenwerte besteht also aus allen reellen Zahlen E mit $E^2 = 1$; d.h. die Eigenwerte von $\hat{\tau}^2$ sind $+1$ und -1. Die zugehörigen Eigenräume werden offensichtlich von den JONES-Vektoren für rechts- und linkszirkulares Licht aufgespannt:

$$\hat{\tau}^2\,\mathbf{J_R} = +\mathbf{J_R}\,, \quad \hat{\tau}^2\,\mathbf{J_L} = -\mathbf{J_L}\,.$$

Dementsprechend gilt

$$\hat{\tau}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{P}_{\mathbf{R}} - \hat{P}_{\mathbf{L}} \tag{7.42}$$

[38] Es können durchaus mehrere Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert existieren.

(vgl. Tabelle 7.1) und somit

$$\hat{\tau}^2\,\hat{P}_{\mathbf{R}} = +\hat{P}_{\mathbf{R}}\,,\quad \hat{\tau}^2\,\hat{P}_{\mathbf{L}} = -\hat{P}_{\mathbf{L}}\,.$$

Daraus ergibt sich für $\hat{D}(\alpha) = e^{-i\,\alpha\,\hat{\tau}^2}$ die Zerlegung

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-i\alpha}\hat{P}_{\mathbf{R}} + e^{+i\alpha}\hat{P}_{\mathbf{L}}\,,$$

also

$$\hat{D}(\alpha) \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} e^{-i\,\alpha} & 0 \\ 0 & e^{+i\,\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{J_R}, \mathbf{J_L}\}\,,$$

und damit die physikalisch gut interpretierbare Wirkungsweise

$$\hat{D}(\alpha)\,\mathbf{J_R} = e^{-i\,\alpha}\,\mathbf{J_R}\,,\quad \hat{D}(\alpha)\,\mathbf{J_L} = e^{+i\,\alpha}\,\mathbf{J_L}\,. \tag{7.43}$$

Lemma 7.3.18 (Schur-*Zerlegung*) *Seien V ein n-dimensionaler* Euklid*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V mit*

$$\nu > \mu \implies \left\langle \mathbf{e}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle = 0 \quad \forall\,\nu,\mu \in \{1,\ldots,n\}\,. \tag{7.44}$$

Beweisskizze: Für $n = 1$ ist die Aussage des Lemmas trivial.

Sei nun $n > 1$ und das Lemma bereits für $n-1$ anstelle von n bereits bewiesen. Dann können wir jeden normierten Vektor $\mathbf{e}_1 \in V$ so zu einem Orthonormalsystem $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V ergänzen, daß

$$\nu > \mu \implies \left\langle \mathbf{e}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle = 0 \quad \forall\,\nu,\mu \in \{2,\ldots,n\}$$

gilt.[39] Wir müssen also nur noch zeigen, daß $\hat{A}$ mindestens einen (normierten) Eigenvektor $\mathbf{e}_1$ besitzt:

$\det\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right)$ ist ein Polynom n-ten Grades in E. Gemäß ***Fundamentalsatz der Algebra*** (siehe Folgerung 4.5.18) gilt deshalb

$$\det\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right) \propto \prod_{\nu=1}^{n} (E - E_\nu)$$

für geeignete $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{C}$. Diese E_ν (von denen u.U. einige gleich sein können) sind gemäß Lemma 7.3.17 Eigenwerte von $\hat{A}$. Zu jedem Eigenwert von A gehört aber definitionsgemäß mindestens ein Eigenvektor. ∎

[39]Man wende das Lemma einfach auf

$$\hat{A}' = \hat{P}_{V_\perp}\,\hat{A}\big/\!\!\!\backslash V_\perp\,,\quad V_\perp = \{\mathbf{z} \in V : \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_1\}\,,$$

an.

Anmerkungen:

1. Gemäß (7.44) hat die Matrix von $\hat{A}$ bzgl. $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *obere Dreiecksform*, d.h. die Elemente links unterhalb der Diagonalen sind alle Null.
2. $\mathbf{e}_1$ ist dementsprechend ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert ${A^1}_1$.

Folgerung 7.3.19 (Spektralsatz für endlichdimensionale Räume) *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer* EUKLID*ischer Vektorraum und $\hat{A}$ ein* ***normaler*** *Operator auf V, d.h. es gelte $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{A}\,\hat{A}^\dagger$. Dann existieren eine Orthonormalbasis*[40] $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *von V und Eigenwerte $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$\hat{A} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_n \end{pmatrix} \quad \textit{bzgl.}\ (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\,. \tag{7.45}$$

Die E_ν sind reell (resp. haben den Betrag 1), wenn $\hat{A}$ selbstadjungiert (resp. unitär) ist.

Beweisskizze: Nach Lemma 7.3.18 genügen die Matrix-Elemente ${A^\nu}_\mu = \left\langle \mathbf{a}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{a}_\mu \right\rangle$ von $\hat{A}$ bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ von V der Bedingung

$$\nu > \mu \implies {A^\nu}_\mu = 0 \quad \forall\, \nu, \mu \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{7.46}$$

Da $\hat{A}$ normal ist, folgt daraus

$$\sum_{\substack{\lambda \in \{1,\ldots,n'\} \\ \lambda \geq \nu,\mu}} {A^\nu}_\lambda \left({A^\mu}_\lambda\right)^* = \sum_{\substack{\lambda \in \{1,\ldots,n'\} \\ \lambda \leq \nu,\mu}} \left({A^\lambda}_\nu\right)^* {A^\lambda}_\mu \quad \forall\, \nu, \mu \in \{1, \ldots, n'\} \tag{7.47}$$

für $n = n'$. Speziell für $\nu = \mu = n$ bedeutet das

$$\left|{A^n}_n\right|^2 = \sum_{\substack{\lambda \in \{1,\ldots,n\} \\ \lambda \leq n}} \left|{A^\lambda}_n\right|^2$$

und somit

$${A^\lambda}_n = 0 \quad \forall\, \lambda < n\,.$$

Aus (7.47) für $n' = n$ folgt damit (7.47) für $n' = n - 1$ und durch Iteration dieser Argumentation

$$\nu < \mu \implies {A^\nu}_\mu = 0 \quad \forall\, \nu, \mu \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

[40] Die Menge der zugehörigen 1-dimensionalen Teilräume $\{z\,\mathbf{a}_\nu : z \in \mathbb{C}\}$ ist natürlich nur dann eindeutig, wenn alle Eigenwerte E_ν voneinander verschieden sind. Für $n = 2$ lassen sich $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ entsprechend Aufgabe E20 leicht bestimmen.

Zusammen mit (7.46) und

$$E_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \mathbf{a}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{a}_\nu \right\rangle \quad \forall\, \nu \in \{1,\dots,n\}$$

folgt daraus (7.45). ∎

Anmerkung:

1. Die selbstadjungierten Operatoren $\hat{A}$ auf V sind natürlich schon aufgrund ihrer Definition alle normal.
2. Daß auch die unitären Operatoren $\hat{A}$ auf V alle normal sind, folgt aus der dritten Behauptung von Lemma 7.3.13.
3. Man sieht auch sofort, daß ein Operator $\hat{A}$ auf V normal ist, wenn eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ von V existiert, bezüglich derer er die ***Diagonalform*** (7.45) mit geeigneten $E_1,\dots,E_n \in \mathbb{C}$ annimmt.
4. Die den Pauli-Matrizen als Jones-Matrizen entsprechenden Operatoren sind selbstadjungiert und zu sich selbst invers. Solche Operatoren auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind nach Lemma 7.3.13 stets unitär und als Wert ihrer Determinante resp. Eigenwerte kommen gemäß Spektralsatz resp. 7.3.19 nur $+1$ und -1 in Frage.
5. (7.45) ist äquivalent zu

$$\hat{A} = \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu\, \hat{P}_{\mathbf{a}_\nu}\,.$$

6. (7.45) erlaubt die Definition von $f(\hat{A})$ für beliebige komplexwertige Funktionen f über $\mathbb{C}$:

$$f(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(E_\nu\right) \hat{P}_{\mathbf{a}_\nu}\,.$$

7. Dafür gilt

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, f^{(\nu)}(0)\, x^\nu \;\forall\, x \in \mathbb{R} \implies f(\hat{A}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, f^{(\nu)}(0)\, \hat{A}^\nu\,.$$

8. Nicht jeder lineare Operator $\hat{A}$ auf einem n-dimensionalen komplexen Vektorraum besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren (siehe Aufgabe E15).

Lemma 7.3.20 *Sei V ein* **endlich***dimensionaler komplexer* EUKLID*ischer Vektorraum. Dann erlaubt jeder lineare Operator $\hat{A}$ auf V eine* ***Polarzerlegung***[41]

$$\hat{A} = \underbrace{\hat{U}}_{\text{unitär}} \underbrace{\hat{B}}_{\geq 0} .$$

Dabei ist $\hat{B} = \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}$. Falls $\hat{A}$ invertierbar ist, ist auch $\hat{U}$ eindeutig.

Beweisskizze: Weil

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{A}\,\mathbf{z} \right\|^2 &= \left\langle \hat{A}\,\mathbf{z} \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{z} \,\middle|\, \hat{A}^\dagger \hat{A}\,\mathbf{z} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{z} \,\middle|\, \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}} \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \right\rangle \\
&= \left\langle \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \,\middle|\, \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \right\rangle \\
&= \left\| \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \right\|^2
\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{z} \in V$ gilt, ist

$$\hat{\hat{U}} \left(\sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\mathbf{z} \quad \forall\, \mathbf{z} \in V$$

eine konsistente Definition für eine lineare Abbildung $\hat{\hat{U}}$ des Teilraumes $T = \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,V$ auf $\hat{A}\,V$. Da $\hat{\hat{U}}$ die Norm nicht ändert, gilt $\dim(T) = \dim(\hat{A}\,V)$ und somit — da V endlichdimensional ist — $\dim(V \ominus T) = \dim(V \ominus \hat{A}\,V)$, wobei

$$V \ominus T' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z} \in V : \mathbf{z} \perp T'\} \quad \forall\, T' \subset V . \tag{7.48}$$

Deshalb existieren lineare Abbildungen $\hat{W}$ von $V \ominus T$ auf $V \ominus \hat{A}V$, die die Norm nicht ändern und für jede solche Abbildung ergibt sich mit den Definitionen

$$\hat{B} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,, \quad \hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\hat{U}}\,\hat{P}_T + \hat{W}\,\hat{P}_{V \ominus T}$$

eine Polarzerlegung von $\hat{A}$, denn

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} \in V \ominus T \quad &\Longrightarrow \quad \left\langle \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} \mid \mathbf{z}' \right\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{z}' \in V \\
&\Longrightarrow \quad \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\,\mathbf{z} = 0 \\
&\underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \quad \hat{A}\,\mathbf{z} = 0 .
\end{aligned}$$

Für jede Polarzerlegung gilt

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{B}^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{B} = \hat{B}^2$$

und somit $\hat{B} = \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}}$. Falls $\hat{A}$ und somit auch $\left(\sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}} \right)$ invertierbar ist, folgt daraus $\hat{U} = \hat{A} \left(\sqrt[+]{\hat{A}^\dagger \hat{A}} \right)^{-1}$. ∎

[41] $\hat{B} \geq 0$ meint, daß $\hat{B}$ ein selbstadjungierter Operator auf V ist, der nur nichtnegative Eigenwerte hat. Üblicherweise benutzt man in der Polarzerlegung den i.a. nur *partiell isometrischen*, dafür aber eindeutigen, Operator $\hat{\hat{U}}\hat{P}_T$ anstelle des unitären Operators $\hat{U}$. Daß die Polarzerlegung mit unitärem $\hat{U}$ funktioniert, ist nämlich nur für endlichdimensionales V garantiert.

Lemma 7.3.21 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum, $\hat{A}$ ein normaler Operator auf V und $\mathbf{e}$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert $E \in \mathbb{C}$. Dann ist $\mathbf{e}$ Eigenvektor von $\hat{A}^\dagger$ zum Eigenwert E^*.*

Beweis: Die Behauptung folgt fast unmittelbar aus dem Spektralsatz. ∎

Lemma 7.3.22 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{A}, \hat{B}$ normale Operatoren auf V. Dann existiert genau dann eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V mit*

$$\hat{A}\,\mathbf{e}_\nu \propto \mathbf{e}_\nu\,, \quad \hat{B}\,\mathbf{e}_\nu \propto \mathbf{e}_\nu \qquad \forall\,\nu \in \{1, \ldots, n\}$$

*(**gemeinsame Diagonalisierbarkeit** von $\hat{A}$ und $\hat{B}$), wenn $\hat{A}$ und $\hat{B}$ miteinander **vertauschen**, d.h. wenn $\hat{A}\,\hat{B} = \hat{B}\,\hat{A}$.*

Beweisskizze: Sei $\left\{\check{E}_1, \ldots, \check{E}_m\right\}$ die Menge der Eigenwerte von $\hat{A}$ und seien T_1, $\ldots, T_m$ die zugehörigen Eigenräume. Im Falle $\hat{A}\,\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \in T_\mu \quad &\Longrightarrow \quad \hat{A}\left(\hat{B}\,\mathbf{z}\right) = \hat{B}\left(\hat{A}\,\mathbf{z}\right) = \hat{B}\left(\check{E}_\mu\,\mathbf{z}\right) = \check{E}_\mu\,\hat{B}\,\mathbf{z} \\ &\Longrightarrow \quad \hat{B}\,\mathbf{z} \in T_\mu\,. \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 7.3.21 folgt mit $\hat{A}^\dagger$ statt $\hat{A}$ wegen

$$\hat{A}\,\hat{B} = \hat{B}\,\hat{A} \Longrightarrow \hat{A}^\dagger\,\hat{B}^\dagger = \hat{B}^\dagger\,\hat{A}^\dagger\,.$$

analog

$$\mathbf{z} \in T_\mu \quad \Longrightarrow \quad \hat{B}^\dagger\,\mathbf{z} \in T_\mu$$

Folglich ist die Einschränkung von $\hat{B}$ auf T_μ auch jeweils normal und besitzt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren. Da die Eigenräume zueinander orthogonal sind, folgt daraus die Existenz einer Orthonormalbasis, deren Elemente Eigenvektoren sowohl von $\hat{A}$ als auch von $\hat{B}$ sind. Daß umgekehrt aus letzterem die Vertauschbarkeit von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ folgt, ist offensichtlich. ∎

Anmerkung: Unter den Voraussetzungen von Lemma 7.3.22 gilt[42]

$$\hat{A}\,\hat{B} = \hat{B}\,\hat{A} \quad \Longrightarrow \quad f(\hat{A})\,g(\hat{B}) = g(\hat{B})\,f(\hat{A})$$

für alle komplexwertigen Funktionen f und g über $\mathbb{C}$.

Gemäß Anmerkung 1 zu Lemma 7.3.13 ist der einer polarisationsoptischen Komponenten im Sinne von 7.2.2 entsprechende Operator $\hat{A}$ stets unitär, wenn sich die

[42]Bzgl. der Definition von $f(\hat{A})$ und $g(\hat{B})$ siehe Anmerkungen 6 und 7 zum Spektralsatz.

Intensität von Lichtstrahlen durch diese Komponente nicht ändert. Insbesondere sind also die Operatoren $\hat{D}(\alpha)$ und $\hat{S}_\varphi$ aus 7.2.3 unitär. Die Familien $\left\{\hat{D}(\alpha)\right\}_{|\alpha\in\mathbb{R}}$ und $\left\{\hat{S}_\varphi\right\}_{|\varphi\in\mathbb{R}}$ sind Beispiele für *stetige 1-parametrige Gruppen unitärer Operatoren*:

Definition 7.3.23 *Sei V ein* Euklid*ischer komplexer Vektorraum. Dann bezeichnet man eine Familie $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{|t\in\mathbb{R}}$ von Operatoren auf V als* ***stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren****, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1.) $\hat{U}(t)$ *unitär* $\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$.

2.) $\hat{U}(t_1+t_2)=\hat{U}(t_1)\,\hat{U}(t_2)\quad\forall\, t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

3.) $\left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{U}(t)\,\mathbf{z}_2\right\rangle$ *stetig in t (an der Stelle $t=0$)* $\quad\forall\,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\in V$.

Stetige 1-parametrige Gruppen unitärer Operatoren sind eineindeutig selbstadjungierten Operatoren zugeordnet:

Lemma 7.3.24 (Satz von Stone für endlichdimensionale Räume) *Sei V ein endlichdimensionaler* Euklid*ischer komplexer Vektorraum. Dann ist eine Familie $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{|t\in\mathbb{R}}$ von Operatoren auf V genau dann eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren auf V , wenn sie einen selbstadjungierten* ***Generator*** *besitzt, d.h. einen selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ mit*

$$\hat{U}(t)=e^{-i\,\hat{A}\,t}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}\,. \tag{7.49}$$

Ein solcher Generator ist, falls er existiert, durch die Bedingung

$$\left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z}_2\right\rangle = i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{U}(t)\,\mathbf{z}_2\right\rangle\right)_{|t=0}\qquad\forall\,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\in V \tag{7.50}$$

eindeutig festgelegt.

Beweisskizze: Sei $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{|t\in\mathbb{R}}$ eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren auf V . Dann folgt aus der zweiten Bedingung von Definition 7.3.23

$$\hat{U}(t_1)\,\hat{U}(t_2)=\hat{U}(t_2)\,\hat{U}(t_1)\quad\forall\, t_1,t_2\in\mathbb{R}\,,$$

und mithilfe der Beweistechnik zu Lemma 7.3.22 erkennt man daraus leicht, daß eine Orthonormalbasis existiert, bzgl. der alle $\hat{U}(t)$ diagonal, aufgrund ihrer Unitarität also von der Form

$$\hat{U}(t)=\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{i\varphi_2(t)} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3(t)} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\varphi_n(t)}\end{pmatrix}\quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$$

mit reell-wertigen $\varphi_\nu(t)$ sind. Aufgrund der zweiten Bedingung in Definition 7.3.23 gilt dabei

$$\varphi_\nu(t_1+t_2) = \varphi_\nu(t_1) + \varphi_\nu(t_2) \bmod 2\pi \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\,,\, \nu \in \{1,\ldots,n\}\ .$$

Deshalb und dank der dritten Bedingung in Definition 7.3.23 existieren $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu\, t \bmod 2\pi \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,\, \nu \in \{1,\ldots,n\}\ .$$

Damit gilt also

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1 t} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{i\varphi_n t} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\ ,$$

d.h. (7.49) mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\varphi_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\ .$$

Umgekehrt folgt aus (7.49) mithilfe des Spektralsatzes fast unmittelbar, daß die $\hat{U}(t)$ eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren auf V bilden. ∎

<u>Beispiel $\hat{D}(\alpha)$:</u> Der Generator der 1-parametrigen Gruppe $\left\{\hat{D}(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\tau}^2}\right\}_{|\alpha\in\mathbb{R}}$ aus 7.2.3 ist offensichtlich $\hat{\tau}^2$. Sein ***Erwartungswert***

$$E_{\mathbf{J}}(\hat{\tau}^2) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \mathbf{J} \mid \hat{\tau}^2\, \mathbf{J} \right\rangle$$

in dem durch den JONES-Vektor $\mathbf{J}$ charakterisierten Polarisationszustand hat folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} \left|E_{\mathbf{J}}(\hat{\tau}^2)\right| = \frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}}{2-\epsilon^2}\ , &\quad \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \text{Exzentrizität der Polarisationsellipse}\,, \\ E_{\mathbf{J}}(\hat{\tau}^2) > 0 \quad \Longrightarrow &\quad \text{rechtshändige (elliptische) Polarisation}\,, \\ E_{\mathbf{J}}(\hat{\tau}^2) < 0 \quad \Longrightarrow &\quad \text{linkshändige (elliptische) Polarisation} \end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe E7). Kontinuierliche Zustandstransformationen dieser Art, i.a. allerdings mit komplizierteren Generatoren (z.B. HAMILTON-Operatoren), sind besonders typisch für die allgemeine Quantentheorie.

7.4 Multilineare Funktionale (komplexe Tensoren)

7.4.1 Lineare Funktionale

Für jeden Vektor $\mathbf{z}_0$ eines EUKLIDischen komplexen Raumes definiert

$$L(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{z}_0 \mid \mathbf{z} \rangle \quad \forall\, \mathbf{z} \in V \tag{7.51}$$

ein *lineares Funktional*[43] L auf V :

Definition 7.4.1 *Sei V ein komplexer Vektorraum. Als* ***lineares Funktional*** *auf V bezeichnet man dann eine Abbildung L von V in $\mathbb{C}$, die der Bedingung*

$$L(\lambda_1\, \mathbf{z}_1 + \lambda_2\, \mathbf{z}_2) = \lambda_1\, L(\mathbf{z}_1) + \lambda_2\, L(\mathbf{z}_2)$$

für alle $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ genügt.

Lemma 7.4.2 (Satz von RIESZ für endlichdimensionale Räume) *Sei V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann sind alle linearen Funktionale L auf V vom Typ (7.51).*

Beweisskizze: Man wähle eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V und beachte, daß

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}) &\underset{(7.8)}{=} L\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z} \rangle\, \mathbf{e}_\nu\Bigr) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z} \rangle\, L(\mathbf{e}_\nu) \\ &= \Bigl\langle \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \bigl(L(\mathbf{e}_\nu)\bigr)^* \mathbf{e}_\nu}_{=\mathbf{z}_0} \Bigm| \mathbf{z} \Bigr\rangle\,. \end{aligned}$$

∎

Für jeden komplexen Vektorraum V hat die Menge

$$L(V,V) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{\text{lineare Operatoren } \hat{A} \text{ auf } V\Bigr)$$

eine natürliche Vektorraumstruktur, die durch die üblichen Addition und Multiplikation mit komplexen Zahlen gegeben ist. Ein wichtiges lineares Funktional auf $L(V,V)$ ist jeweils die *Spur*:

[43] Für diese Funktional wird im Sinne der Anmerkung zu Gleichung (7.8) oft auch $\langle \mathbf{z}_0|$ statt L (gleichzeitig mit $|\mathbf{z}\rangle$ statt $\mathbf{z}$.) geschrieben (DIRACsche ***bra-ket-Schreibweise***).

Definition 7.4.3 *Seinen V ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum,* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *eine Orthonormalbasis von V und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V. Dann bezeichnet man*

$$\mathrm{Spur}\,(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\nu \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle$$

als die ***Spur*** *von $\hat{A}$.*

Lemma 7.4.4

Sei V ein endlichdimensionaler EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann ist die Definition der Spur auf $L(V,V)$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis für V und stellt ein lineares Funktional auf $L(V,V)$ dar, das außerdem* ***positiv*** *ist, d.h. der Bedingung*

$$\mathrm{Spur}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) \geq 0 \quad \forall\, \hat{A} \in L(V,V)$$

genügt. Dabei gilt sogar

$$\mathrm{Spur}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) = 0 \implies \hat{A} = 0$$

für alle $\hat{A} \in L(V,V)$.

Beweisskizze: Seien $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ und $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ Orthonormalbasen von V. Dann gilt für alle $\hat{A} \in L(V,V)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}'_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}'_\nu \right\rangle &= \sum_{\nu,\mu,\rho=1}^{n} \langle \mathbf{e}'_\nu \mid \mathbf{e}_\mu \rangle \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\rho \right\rangle \langle \mathbf{e}_\rho \mid \mathbf{e}'_\nu \rangle \\
&= \sum_{\nu,\mu,\rho=1}^{n} \underbrace{\langle \mathbf{e}_\rho \mid \mathbf{e}'_\nu \rangle \langle \mathbf{e}'_\nu \mid \mathbf{e}_\mu \rangle}_{=\langle \mathbf{e}_\rho | \mathbf{e}_\mu \rangle = \delta_{\rho\mu}} \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\rho \right\rangle \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle
\end{aligned}$$

und somit die Unabhängigkeit der Spur von der Wahl der Orthonormalbasis. Der Rest folgt aus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) &= \sum_{\mu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{A}^\dagger \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \left\| \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\|^2 . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Folgerung 7.4.5 *Sei V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann ist durch*

$$\left\langle \hat{A} \mid \hat{B} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Spur}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \quad \forall\, \hat{A}, \hat{B} \in L(V,V) \tag{7.52}$$

ein inneres Produkt auf $L(V,V)$ gegeben und zu jedem linearen Funktional L auf $L(V,V)$ existiert ein Operator $\hat\rho$ auf V mit $L = \omega_{\hat\rho}$, wobei

$$\omega_{\hat\rho}(\hat A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spur}\left(\hat\rho\,\hat A\right) \quad \forall\,\hat A \in L(V,V)\,. \tag{7.53}$$

Beweisskizze: Die (7.4) entsprechende Bedingung folgt unmittelbar aus Lemma 7.4.4. Die (7.5) entsprechende Bedingung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat B \mid \hat A \right\rangle &= \operatorname{Spur}\left(\hat B^\dagger\,\hat A\right)\\
&= \sum_{\nu=1}^n \left\langle \mathbf{e}_\nu \mid \hat B^\dagger \hat A\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle\\
&= \sum_{\nu=1}^n \left(\left\langle \hat B^\dagger \hat A\,\mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{e}_\nu \right\rangle\right)^*\\
&= \sum_{\nu=1}^n \left(\left\langle \hat A\,\mathbf{e}_\nu \mid \hat B\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle\right)^*\\
&= \left(\operatorname{Spur}\left(\hat A^\dagger\,\hat B\right)\right)^*\\
&= \left(\left\langle \hat A \mid \hat B \right\rangle\right)^*.
\end{aligned}$$

Daß die (7.6) entsprechende Bedingung erfüllt ist, ist offensichtlich. Also definiert (7.52) tatsächlich ein inneres Produkt $\langle .\mid .\rangle$ auf $L(V,V)$. Aus Lemma 7.4.2 folgt damit, daß lineare Funktionale auf $L(V,V)$ von Typ (7.53) sind. ∎

Anmerkungen:

1. Für jedes $\mathbf{z} \in V \setminus \{0\}$ gilt

   $$\omega_{\hat P_{\mathbf{z}}}(\hat A) = \left\langle \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \middle| \hat A\,\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right\rangle \quad \forall\,\hat A \in L(V,V)\,.$$

   Dementsprechend ist $\omega_{\hat P_{\mathbf{z}}}$ positiv und ***normiert***:

   $$\omega_{\hat P_{\mathbf{z}}}(\hat 1) = 1\,.$$

2. Mithilfe des Spektralsatzes zeigt man leicht, daß zu jedem positiven, normierten, linearen Funktional L eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots\}$ von V und nichtnegative Zahlen $c_1, c_2, \ldots$ existieren mit

   $$L = \sum_\nu c_\nu\,\omega_{\hat P_{\mathbf{e}_\nu}}\,, \quad \sum_\nu \underbrace{c_\nu}_{\geq 0} = 1\,.$$

3. Positive, normierte, lineare Funktionale bezeichnet man auch als ***Zustände***. Einen Zustand L bezeichnet man als ***rein***, wenn er von der Form

   $$L = \omega_{\hat P_{\mathbf{z}}}\,, \quad \mathbf{z} \in V\,,$$

ist, sonst als ***gemischt***.[44]

Lemma 7.4.6 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\hat{A}, \hat{B} \in L(V,V)$. Dann gilt*

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) = \operatorname{Spur}\left(\hat{B}\hat{A}\right) . \tag{7.54}$$

Beweis: Für Orthonormalbasen $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spur}\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) &= \sum_{\nu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\hat{B}\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\nu \mid \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{B}\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{B}\,\mathbf{e}_\nu \right\rangle \left\langle \mathbf{e}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \left\langle \mathbf{e}_\mu \,\middle|\, \hat{B}\hat{A}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \\
&= \operatorname{Spur}\left(\hat{B}\hat{A}\right) . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Die in 7.2.2 angegebene Transformation (7.17) der JONES-Vektoren, die der Raum-Zeit-Spiegelung des zugehörigen elektrischen Feldes entspricht, hat alle Eigenschaften einer *Konjugation*:

Definition 7.4.7 *Sei V ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann versteht man unter einer* ***Konjugation*** *auf V eine Abbildung K von V in V, die den Bedingungen*

$$\langle K(\mathbf{z}_1) \mid K(\mathbf{z}_2)\rangle = (\langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2\rangle)^* \quad \forall\, \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 \in V . \tag{7.55}$$

und

$$K^2 = \hat{1} . \tag{7.56}$$

genügt.[45]

Lemma 7.4.8 *Seien V ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und K eine Konjugation auf V. Dann gilt*

$$\|K(\mathbf{z})\| = \|\mathbf{z}\| \quad \forall\, \mathbf{z} \in V$$

[44] Man beachte in diesem Zusammenhang Aufgabe E75.

[45] Abbildungen K von V **auf** V mit (7.55) bezeichnet man auch als ***antiunitär*** (vgl. Lemma 7.4.10).

und K ist ***konjugiert linear***, [46] *d.h.:*

$$K\left(\lambda_1\,\mathbf{z}_1+\lambda_2\,\mathbf{z}_2\right)=\lambda_1^*\,K(\mathbf{z}_1)+\lambda_2^*\,K(\mathbf{z}_2)\quad\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\,,\ \mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\in V\,. \tag{7.57}$$

Beweisskizze: Für $\mathbf{z}\in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|K(\mathbf{z})\|^2 &= \langle K(\mathbf{z})\mid K(\mathbf{z})\rangle\\ &= \left(\langle\mathbf{z}\mid\mathbf{z}\rangle\right)^*\\ &= \|\mathbf{z}\|^2\end{aligned}$$

und somit tatsächlich $\|K(\mathbf{z})\|=\|\mathbf{z}\|$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\Big\langle\mathbf{z}\mid K\left(\lambda_1\,\mathbf{z}_1+\lambda_2\,\mathbf{z}_2\right)\Big\rangle &= \Big\langle K\big(K(\mathbf{z})\big)\mid K\left(\lambda_1\,\mathbf{z}_1+\lambda_2\,\mathbf{z}_2\right)\Big\rangle\\ &= \left(\left\langle K(\mathbf{z})\mid\lambda_1\,\mathbf{z}_1+\lambda_2\,\mathbf{z}_2\right\rangle\right)^*\\ &= \left(\lambda_1\left\langle K(\mathbf{z})\mid\mathbf{z}_1\right\rangle+\lambda_2\left\langle K(\mathbf{z})\mid\mathbf{z}_2\right\rangle\right)^*\\ &= \lambda_1^*\left\langle\mathbf{z}\mid K(\mathbf{z}_1)\right\rangle+\lambda_2^*\left\langle\mathbf{z}\mid K(\mathbf{z}_2)\right\rangle\\ &= \Big\langle\mathbf{z}\mid\lambda_1^*\,K(\mathbf{z}_1)+\lambda_2^*\,K(\mathbf{z}_2)\Big\rangle\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{z},\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\in V$ und alle $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$. Also gilt auch (7.57). ∎

Lemma 7.4.9 *Seien V ein n-dimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und K eine Konjugation auf V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ von V mit*

$$K\left(\sum_{\nu=1}^n\lambda_\nu\,\mathbf{e}_\nu\right)=\sum_{\nu=1}^n\lambda_\nu^*\,\mathbf{e}_\nu\quad\forall\,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}\,. \tag{7.58}$$

Beweisskizze: Die Menge

$$F\stackrel{\text{def}}{=}\{\mathbf{z}\in V:\ K(\mathbf{z})=\mathbf{z}\}$$

aller *Fixpunkte* von K hat eine natürliche Struktur als **reeller** EUKLIDischer Vektorraum.[47] Wegen

$$\mathbf{z}=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\mathbf{z}+K(\mathbf{z})}_{\in F}+i\big(\underbrace{i\,K(\mathbf{z})-i\,\mathbf{z}}_{\in F}\big)\Big)$$

ist jede Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ dieses Raumes auch Orthonormalbasis von V, für die (7.58) gilt. ∎

Für jeden EUKLIDischen komplexen Vektorraum V hat die Menge

$$\mathcal{L}(V,\mathbb{C})\stackrel{\text{def}}{=}\Big\{\langle\mathbf{z}|\,:\ \mathbf{z}\in V\Big\}$$

[46] Konjugationen sind also rückeindeutige Abbildungen.
[47] Man lasse bei der Multiplikation einfach nur reelle Zahlen zu.

(beachte Fußnote 43) eine natürliche EUKLIDische Vektorraumstruktur[48]

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_1| + \langle \mathbf{z}_2| &= \langle \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2| \,, \\ \lambda \langle \mathbf{z}| &= \langle \lambda^* \mathbf{z}| \,, \\ \big\| \langle \mathbf{z}| \big\| &\stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{z}\| \,. \end{aligned}$$

Dafür gilt:

Lemma 7.4.10 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer Vektorraum und K eine Konjugation auf V. Dann definiert*

$$\hat{U}(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle K(\mathbf{z})| \quad \forall \, \mathbf{z} \in V$$

*eine **unitäre** Abbildung von V auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$; d.h. eine lineare Abbildung $\hat{U}$ von V auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ mit*

$$\left\| \hat{U}\mathbf{z} \right\| = \|\mathbf{z}\| \quad \forall \, \mathbf{z} \in V \,.$$

Beweisskizze: Daß $\hat{U}$ eine lineare, normerhaltende Abbildung ist, ist offensichtlich. Daß $\hat{U}$ den Vektorraum V **auf** seinen ***Dualraum*** $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ abbildet, folgt aus Lemma 7.4.2. ∎

7.4.2 Bilineare Funktionale

Definition 7.4.11 *Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine **Bilinearform** (=*komplexer kovarianter Tensor 2. Stufe*) auf V ist dann eine Abbildung B von $V \times V$ in $\mathbb{C}$ mit*

$$\left.\begin{aligned} B(\mathbf{z}, \lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2) &= \lambda_1 B(\mathbf{z}, \mathbf{z}_1) + \lambda_2 B(\mathbf{z}, \mathbf{z}_2) \\ B(\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2, \mathbf{z}) &= \lambda_1 B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}) + \lambda_2 B(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}) \end{aligned}\right\} \quad \forall \, \mathbf{z}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \,.$$

*Eine Bilinearform B auf V heißt **symmetrisch**, falls*

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = +\, B(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1) \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \,.$$

*Sie heißt **antisymmetrisch**, falls*

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = -\, B(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1) \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \,.$$

[48]Erinnerung: Das innere Produkt mit der EUKLIDischen Norm $\|.\|$ ist durch die Polarisationsidentität (7.22) gegeben. Dementsprechend gilt

$$\Big\langle \langle \mathbf{z}_1| \;\Big|\; \langle \mathbf{z}_2| \Big\rangle = \langle \mathbf{z}_2 \mid \mathbf{z}_1 \rangle \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \,.$$

Lemma 7.4.12 *Seien V ein endlichdimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum, B eine Bilinearform auf V und K eine Konjugation auf V. Dann existiert ein linearer Operator $\hat{B}$ auf V mit*[49]

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \left\langle K(\mathbf{z}_1) \,\middle|\, \hat{B}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \,, \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V\,.$$

Beweisskizze: Gemäß Lemma 7.4.9 existiert eine eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V mit

$$K(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\nu \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{7.59}$$

Damit gilt für alle $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \underbrace{\langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z}_1 \rangle}_{\substack{= \langle K(\mathbf{z}_1) \mid K(\mathbf{e}_\nu)\rangle \\ \underset{(7.59)}{=} \langle K(\mathbf{z}_1) \mid \mathbf{e}_\nu \rangle}} \langle \mathbf{e}_\mu \mid \mathbf{z}_2 \rangle\, B(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu) \\ &= \left\langle K(\mathbf{z}_1) \,\middle|\, \hat{B}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \end{aligned}$$

mit

$$\hat{B}\,\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \Big(B(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu)\, \langle \mathbf{e}_\mu \mid \mathbf{z} \rangle \Big) \mathbf{e}_\nu \quad \forall\, \mathbf{z} \in V\,. \qquad \blacksquare$$

Anmerkung: Bzgl. jeder Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V mit (7.59) stimmen die (kovarianten) ***Komponenten***

$$B_{\nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} B(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu)$$

von B mit den Matrixelementen von $\hat{B}$ bzgl. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ überein:

$$(7.59) \quad \Longrightarrow \quad B_{\nu\mu} = \left\langle \mathbf{e}_\nu \mid \hat{B}\,\mathbf{e}_\mu \right\rangle \quad \forall\, \nu, \mu \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Lemma 7.4.13 *Seien V ein n-dimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum, $\hat{B} \in L(V.V)$ und K eine Konjugation auf V. Falls die $\hat{B}$ entsprechende Bilinearform*

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle K(\mathbf{z}_1) \mid \hat{B}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$$

Version vom 26. März 2009

[49]Innere Produkte sind dagegen ***Semibilinearformen*** (englisch: sesquilinear forms), d.h. in einem Argument linear, im anderen aber konjugiert linear. Semibilinearformen S, für die außerdem

$$S(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \Big(S(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1) \Big)^* \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$$

gilt (wie für innere Produkte), nennt man HERMITE***sch***.

symmetrisch oder antisymmetrisch ist und[50]

$$\langle K(\mathbf{z}_0) \mid \mathbf{z}_0 \rangle \neq 0 \text{ für } \textbf{alle} \text{ Eigenvektoren } \mathbf{z}_0 \text{ von } \hat{B} \tag{7.60}$$

gilt,[51] *dann existieren Vektoren* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in V$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *ist eine Basis von* V.
2. $\langle K(\mathbf{b}_\nu) \mid \mathbf{b}_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$
3. *Alle* $\mathbf{b}_\nu$ *sind Eigenvektoren von* $\hat{B}$.
4. *Die Komponenten der Bilinearform* B *bzgl.* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *stimmen mit den Komponenten der Matrix des Operators* $\hat{B}$ *bzgl.* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *überein.*

Beweisskizze: Gemäß Lemma 7.3.18 besitzt jeder lineare Operator auf einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum mindestens einen Eigenvektor. Wir können also einen Eigenvektor $\mathbf{b}_1$ von $\hat{B}$ wählen und (voraussetzungsgemäß) so normieren, daß $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1$ gilt, wobei:

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle K(\mathbf{z}_1) \mid \mathbf{z}_2 \rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V\,.$$

Sei nun $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ und seien $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ Eigenvektoren von $\hat{B}$ mit

$$\mathbf{b}_\nu \cdot \mathbf{b}_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\nu, \mu \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}_\nu \quad \Longrightarrow \quad \left(\hat{B}\,\mathbf{z}\right) \cdot \mathbf{b}_\nu &= \left\langle K\left(\hat{B}\,\mathbf{z}\right) \mid \mathbf{b}_\nu \right\rangle \\ &= \left\langle K\left(\mathbf{b}_\nu\right) \mid \hat{B}\,\mathbf{z} \right\rangle \\ &= B(\mathbf{b}_\nu, \mathbf{z}) \\ &= \begin{cases} +B(\mathbf{z}, \mathbf{b}_\nu) & \text{für symmetrisches } B \\ -B(\mathbf{z}, \mathbf{b}_\nu) & \text{für antisymmetrisches } B \end{cases} \\ &\propto \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}_\nu = 0 \end{aligned}$$

für $\nu \in \{1, \ldots, m\}$. $\hat{B}$ läßt also den $(n-m)$-dimensionalen Teilraum

$$\{\mathbf{z} \in V : \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}_\nu = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, m\}$$

von V invariant. Deshalb enthält dieser Teilraum mindestens einen Eigenvektor $\mathbf{b}_{m+1}$ von $\hat{B}$, der sich (voraussetzungsgemäß) so normieren läßt, daß

$$\mathbf{b}_\nu \cdot \mathbf{b}_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\nu, \mu \in \{1, \ldots, m+1\}$ gilt. Ausgehend von $m = 1$ ergibt sich auf diese Weise nach $n-1$ Schritten die gewünschte Basis. ∎

Version vom 26. März 2009

[50] Ohne die Voraussetzung (7.60) läßt sich zeigen, daß zu jeder Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von V ein unitärer Operator $\hat{U}$ auf V existiert, für den die Matrix von $\hat{U}\,\hat{B}\,\hat{U}^{\mathrm{T}}$ bzgl. dieser Basis diagonal ist (Eckert et al., 2002, Equation (9)).

[51] Bzgl. der Notwendigkeit dieser Zusatzbedingung siehe Aufgabe E15.

Gemäß Lemma 7.4.2 (Satz von RIESZ) existiert für endlichdimensionales V zu jedem komplexen kontravarianten Tensor L' erster Stufe über V, d.h. zu jedem linearen Funktional L' über $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ genau ein $\mathbf{z}_0$ mit $L' = |\mathbf{z}_0\rangle$, wobei

$$|\mathbf{z}_0\rangle\Big(\langle z|\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\langle \langle \mathbf{z}_0| \Big| \langle \mathbf{z}| \Big\rangle = \langle \mathbf{z} \mid \mathbf{z}_0\rangle \quad \forall\, \mathbf{z} \in V\,. \tag{7.61}$$

In diesem Sinne lassen sich also die $\mathbf{z}_0 \in V$ mit den $|\mathbf{z}_0\rangle \in L\Big(\mathcal{L}(V,\mathbb{C}),\mathbb{C}\Big)$ identifizieren. Das dyadische Produkt, d.h. das ***Tensorprodukt*** $\mathbf{z}_1 \otimes \mathbf{z}_2$ von $|\mathbf{z}_1\rangle$ und $|\mathbf{z}_2\rangle$ ist durch

$$(\mathbf{z}_1 \otimes \mathbf{z}_2)\Big(\langle a|\,,\langle b|\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{z}_1\rangle\,\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{z}_2\rangle \quad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in V \tag{7.62}$$

als kontravarianter Tensor 2. Stufe über V, d.h. als Bilinearform auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ definiert. Auch die Bilinearformen auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ haben eine natürliche komplexe Vektorraumstruktur. Dafür gilt:

Lemma 7.4.14 *Seien V ein EUKLIDischer komplexer Vektorraum und $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für jede Bilinearform B' auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$*

$$B' = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} B'\Big(\langle \mathbf{e}_\nu|\,,\langle \mathbf{e}_\mu|\Big)\, \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu \tag{7.63}$$

und

$$\|B'\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \Big| B'\Big(\langle \mathbf{e}_\nu|\,,\langle \mathbf{e}_\mu|\Big)\Big|^2}$$

*definiert eine EUKLIDische Norm auf dem **Tensorprodukt** $V \otimes V$ von V mit sich selbst, d.h. auf dem Vektorraum aller Bilinearformen B' auf $\mathcal{L}(V,\mathbb{C})$. Für das dieser Norm entsprechende innere Produkt gilt:*

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n\} \text{ Orthonormalbasis von } V \\ &\Longrightarrow \quad \Big\{\mathbf{e}'_\nu \otimes \mathbf{e}'_\mu : \nu,\mu \in \{1,\ldots,n\}\Big\} \text{ Orthonormalbasis von } V \otimes V\,. \end{aligned}$$

Beweisskizze: (7.63) folgt gemäß

$$\begin{aligned} B'\Big(\langle z_1|,\langle z_2|\Big) &= B'\left(\left\langle \sum_{\nu=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z}_1\rangle\, \mathbf{e}_\nu \right|, \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\mu \mid \mathbf{z}_2\rangle\, \mathbf{e}_\mu \right|\right) \\ &= B'\left(\sum_{\nu=1}^{n} \left(\langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z}_1\rangle\right)^* |\mathbf{e}_\nu\rangle\,, \sum_{\mu=1}^{n} \left(\langle \mathbf{e}_\nu \mid \mathbf{z}_2\rangle\right)^* |\mathbf{e}_\mu\rangle\right) \\ &= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} B'\Big(\langle \mathbf{e}_\nu|\,,\langle \mathbf{e}_\mu|\Big)\, \langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{e}_\nu\rangle\, \langle \mathbf{z}_2 \mid \mathbf{e}_\mu\rangle \\ &= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} B'\Big(\langle \mathbf{e}_\nu|\,,\langle \mathbf{e}_\mu|\Big)\, (\mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu)\Big(\langle \mathbf{z}_1|\,,\langle \mathbf{z}_2|\Big)\,. \end{aligned}$$

Daß die auf $V \otimes V$ eingeführte Norm EUKLIDisch ist, ist offensichtlich. Sei schließlich $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ eine weitere Orthonormalbasis von V. Dann gilt:

$$\mathbf{e}'_\nu \otimes \mathbf{e}'_\mu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \langle \mathbf{e}_\alpha \mid \mathbf{e}'_\nu \rangle \langle \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}'_\mu \rangle \, \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$$

und somit:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{e}'_\nu \otimes \mathbf{e}'_\mu \mid \mathbf{e}'_\rho \otimes \mathbf{e}'_\tau \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} \left(\langle \mathbf{e}_\alpha \mid \mathbf{e}'_\nu \rangle \langle \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}'_\mu \rangle \right)^* \langle \mathbf{e}_\gamma \mid \mathbf{e}'_\rho \rangle \langle \mathbf{e}_\delta \mid \mathbf{e}'_\tau \rangle \underbrace{\langle \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta \rangle}_{=\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\langle \mathbf{e}_\alpha \mid \mathbf{e}'_\nu \rangle \langle \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}'_\mu \rangle \right)^* \langle \mathbf{e}_\alpha \mid \mathbf{e}'_\rho \rangle \langle \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}'_\tau \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\langle \mathbf{e}'_\nu \mid \mathbf{e}_\alpha \rangle \langle \mathbf{e}_\alpha \mid \mathbf{e}'_\rho \rangle \right) \left(\langle \mathbf{e}'_\mu \mid \mathbf{e}_\beta \rangle \langle \mathbf{e}_\beta \mid \mathbf{e}'_\tau \rangle \right) \\
&= \langle \mathbf{e}'_\nu \mid \mathbf{e}'_\rho \rangle \langle \mathbf{e}'_\mu \mid \mathbf{e}'_\tau \rangle \\
&= \delta_{\nu\rho}\,\delta_{\mu\tau} \,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 7.4.15 *Sei V ein n-dimensionaler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann existiert zu jeder Bilinearform B auf $\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ eine* SCHMIDT-***Zerlegung****, d.h. eine Darstellung der Form*

$$B = \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{w_\nu}_{\geq 0} \, \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}'_\nu$$

mit geeigneten (von B abhängigen) Orthonormalbasen $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ und $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ von V. Dabei hängt die Anzahl der von Null verschiedenen w_ν, die sog. SCHMIDT-***Zahl****, nur von B ab.*

Beweis: Siehe z.B. (Nielsen, 2000, Anhang A). ∎

7.4.3 Allgemeinere Tensorprodukte

Definition 7.4.16 *Seien $V_1, \dots, V_N$ komplexe Vektorräume. Dann bezeichnet man den natürlichen komplexen Vektorraum aller Abbildungen T' von $L(V_1, \mathbb{C}) \times \ldots \times L(V_N, \mathbb{C})$ in $\mathbb{C}$, die in jedem Argument linear sind, als das* ***algebraische Tensorprodukt*** *$V_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \ldots \otimes_{\mathrm{alg}} V_N$ der Räume $V_1, \dots, V_N$.*

Lemma 7.4.17 *Seien $V_1, \ldots, V_N$ endlichdimensionale* EUKLID*ische komplexe Vektorräume und sei für $j \in \{1, \ldots, N\}$ jeweils $\left\{\mathbf{e}_{j,1}, \ldots, \mathbf{e}_{j,n_j}\right\}$ eine Orthonormalbasis von V_j. Dann gilt für jedes $T' \in V_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \ldots \otimes_{\mathrm{alg}} V_N$*

$$T' = \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_N=1}^{n_N} T'\Big(\langle \mathbf{e}_{1,\nu_1}|, \ldots, \langle \mathbf{e}_{N,\nu_N}|\Big)\, \mathbf{e}_{1,\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{N,\nu_N} \,,$$

wobei:

$$(\mathbf{e}_{1,\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{N,\nu_N})\Big(\langle \mathbf{z}_1|, \ldots, \langle \mathbf{z}_N|\Big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} \left\langle \mathbf{z}_j \mid \mathbf{e}_{j,\nu_j} \right\rangle \quad \forall\, (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_N) \in V_1 \times \ldots V_N \,.$$

Dabei ist durch

$$\|T'\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\sum_{\nu_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_N=1}^{n_N} \left| T'\Big(\langle \mathbf{e}_{1,\nu_1}|, \ldots, \langle \mathbf{e}_{N,\nu_N}|\Big) \right|^2} \tag{7.64}$$

eine EUKLID*ische Norm auf $V_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \ldots \otimes_{\mathrm{alg}} V_N$ gegeben, die nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalbasen abhängt.*

Beweis: Direkte Verallgemeinerung des Beweises von Lemma 7.4.14. ∎

Anmerkungen:

1. Das algebraische Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$ mit dem (7.64) entsprechenden inneren Produkt wird als EUKLID***isches Tensorprodukt*** $V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$ bezeichnet.
2. Unter den Voraussetzungen von Lemma 7.4.17 ist

$$\left\{\mathbf{e}_{1,\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{N,\nu_N} : \nu_j \in \{1, \ldots, n_j\} \ \forall\, j \in \{1, \ldots, N\}\right\}$$

eine Orthonormalbasis von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$.

Definition 7.4.18 *Seien $V_1, \ldots, V_N$ endlichdimensionale komplexe Vektorräume und sei für $j \in \{1, \ldots, N\}$ jeweils $\hat{A}_j \in L(V_j, V_j)$. Dann versteht man unter dem $\hat{A}_1 \otimes \ldots \hat{A}_N$ der Operatoren $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_N$ den durch*

$$(\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_N)(\mathbf{z}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{z}_N) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Big(\hat{A}_1\, \mathbf{z}_1\Big) \otimes \ldots \otimes \Big(\hat{A}_N\, \mathbf{z}_N\Big) \quad \forall\, (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in V_1 \times \ldots \times V_N$$

(gemäß Lemma 7.4.17) eindeutig charakterisierten linearen Operator auf $V_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \ldots \otimes_{\mathrm{alg}} V_N$.

Kapitel 8

Unendlichdimensionale komplexe Vektorräume

8.1 Grundlegende Definitionen

8.1.1 Maximale Orthonormalsysteme

Für viele Betrachtungen im Zusammenhang mit EUKLIDischen Vektorräumen kann man sich auf dichte Teilmengen beschränken.

Definition 8.1.1 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und T eine Teilmenge von $\mathcal{H}$. Dann sagt man, T liege in $\mathcal{H}$* ***dicht****, falls*

$$\mathrm{d}(\Phi, T) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Psi \in T} \|\Phi - \Psi\| = 0 \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{H}\,.$$

Zum Nachweis dichter Teilmengen ist vielfach folgender Sachverhalt nützlich:

Satz 8.1.2 (WEIERSTRASS**scher Approximationssatz)** *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $F(\mathbf{x})$ eine stetige Funktion über $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Folge $\{P_\mu(\mathbf{x})\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ von Polynomen $P_\mu(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}$, die für $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ gleichmäßig gegen $F(\mathbf{x})$ konvergiert.*

Beweisskizze:[1] Wählt man N groß genug, daß

$$\mathbf{x} \in \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad |x^\nu| < N \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

[1] Vgl. (Courant und Hilbert, 1968, Kap. II, § 4).

gilt, dann sind die

$$P_\mu(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{-N}^{+N} \left(1 - \left(\frac{y}{2\,N}\right)^2\right)^\mu \mathrm{d}y\right)^{-n} \int_{\mathbf{y}\in[-N,+N]^n} F(\mathbf{y}) \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{x^\nu - y^\nu}{2\,N}\right)^2\right)^\mu \mathrm{d}V_{\mathbf{y}}$$

geeignete Polynome. ∎

Als Beispiel betrachten wir den Raum[2] $C(S^1)$ der stetigen Funktionen $f(\varphi)$ über $\mathbb{R}$ mit der Periode $2\,\pi$,

$$f(\varphi + 2\,\pi) = f(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$$

mit der natürlichen linearen Struktur und dem inneren Produkt

$$\langle f \mid g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(f(\varphi)\Big)^* g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \quad \forall\, f, g \in C(S^1)\,.$$

Offensichtlich ist dies ein unendlichdimensionaler komplexer EUKLIDischer Raum. Für $\nu \in \mathbb{Z}$ bezeichne jeweils e_ν die durch

$$e_\nu(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\,\nu\,\varphi} \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion. Dann ist $\{e_\nu : \nu \in \mathbb{Z}\}$ ein *Orthonormalsystem* (ONS), d.h. es gilt

$$\langle e_\nu \mid e_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dieses ONS ist zwar keine Basis von $C(S^1)$ im Sinne der Definition 7.1.3, aber der WEIERSTRASSsche Approximationssatz zeigt, daß die lineare Hülle dieses ONS in $C(S^1)$ dicht liegt; man muß dazu also nicht die Theorie der FOURIER-Reihen (siehe z.B. 6.2.1 bereits entwickelt haben.

Begründung:[3] Zu gegebenem $g(\varphi) \in C(S^1)$ wähle man eine beliebige stetige Funktion $\chi(r)$ über $\mathbb{R}$ mit $\chi(1) = 1$ und

$$\chi(r) = 0 \quad \forall\, r \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right).$$

Dann ist die Definition

$$F\big(e^{\rho + i\,\varphi}\big) \stackrel{\text{def}}{=} \chi\,(e^\rho)\; g(\varphi) \quad \forall\, \rho, \varphi \in \mathbb{R}$$

erlaubt und liefert (mit $F(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$) eine stetige Funktion $F(z)$ über $\mathbb{C}$ mit

$$F\big(e^{i\varphi}\big) = g(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Da sich $F(z)$ gemäß Satz 8.1.2 gleichmäßig für $|z| < 2$ durch Polynome in z und z^* approximieren läßt, folgt daraus die Behauptung. ∎

Version vom 26. März 2009

[2]Hier bezeichnet S^1 den durch das Bogenmaß modulo 2π parametrisierten Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.
[3]Vgl. (Courant und Hilbert, 1968, Kap. II, § 4, Nr. 4).

Daraus ergibt sich, daß das ONS **maximal** im Sinne von Definition 7.1.8 ist, d.h. für alle $f \in C(S^1)$ gilt

$$\Big(\langle e_\nu \mid f\rangle = 0 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}\Big) \quad \Longrightarrow \quad f = 0\,.$$

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist die folgende:

Definition 8.1.3 *Sei $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Als **Orthonormalsystem** (ONS) von $\mathcal{H}$ bezeichnet man dann eine Familie $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I} \subset \mathcal{H}$ mit*

$$\langle \Phi_\iota \mid \Phi_{\iota'}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } \iota = \iota'\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

*Als **maximales Orthonormalsystem** (MONS) von $\mathcal{H}$ bezeichnet man ein ONS, daß sich nicht in ein echt größeres ONS einbetten läßt. Wir nennen $\mathcal{H}$ **separabel**, wenn ein endliches oder abzählbares MONS von $\mathcal{H}$ existiert, dessen lineare Hülle in $\mathcal{H}$ dicht liegt.*[4]

Anmerkung: Jedes **endliche** MONS ist natürlich eine (HAMEL-) **Basis**.

Die Gültigkeit des folgenden Lemmas ist für unendlichdimensionales $\mathcal{H}$ — im Gegensatz zu Folgerung 2.1.6 — nicht so selbstverständlich, wie es vielleicht scheinen mag, sondern beruht auf dem sog. ZORNschen Lemma.[5]

Lemma 8.1.4 *Sei $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* EUKLID*ischer Vektorraum. Dann läßt sich jedes ONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I'}$ von $\mathcal{H}$ zu einem MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ von $\mathcal{H}$ ergänzen ($I \supset I'$).*

Lemma 8.1.5 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ ein ONS von $\mathcal{H}$. Dann gilt die* BESSEL***sche Ungleichung***

$$\|\Psi\|^2 \geq \sum_{\nu=1}^{N} |\langle \Phi_\nu \mid \Psi\rangle|^2 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Beweisskizze: Mit

$$\Psi_\parallel \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \langle \Phi_\nu \mid \Psi\rangle\, \Phi_\nu\,, \quad \Psi_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \Psi - \Psi_\parallel$$

[4] Man beachte in diesem Zusammenhang Lemma 8.1.8.

[5] Bzgl. dieses ‘Lemmas’ siehe z.B. (Rédei, 1959, Kap I §11). Man beachte allerdings die 3. Anmerkung zu Folgerung 8.3.14.

gilt

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 &= \left\|\Psi_\| + \Psi_\perp\right\| \\
&= \left\|\Psi_\|\right\|^2 + \|\Psi_\perp\| \\
&\geq \left\|\Psi_\|\right\|^2 \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} |\langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle|^2 \,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 8.1.6 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum, $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ ein ONS von $\mathcal{H}$ und Ψ ein Vektor aus $\mathcal{H}$. Dann existiert eine endliche oder abzählbare Teilmenge I_Ψ von I mit*

$$\langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle \neq 0 \iff \iota \in I_\Psi \,.$$

Beweisskizze: Sei I_n jeweils die Menge aller $\iota \in I$ mit $|\langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle|^2 > 1/n$. Da gemäß Lemma 8.1.5 die Ungleichung

$$\|\Psi\|^2 \geq \sum_{\iota' \in I'} |\langle \Phi_{\iota'} \mid \Psi \rangle|^2$$

für jede endliche Teilmenge I' von I gilt, muß I_n jeweils endlich sein. Daraus folgt aber, daß $I_\Psi = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ höchstens abzählbar ist. ∎

Folgerung 8.1.7 *Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler separabler* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum. Dann ist jedes unendliche ONS von $\mathcal{H}$ abzählbar.*

Beweisskizze: Da $\mathcal{H}$ separabel ist, existiert ein MONS $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$. Sei nun $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ ein beliebiges unendlichdimensionales ONS von $\mathcal{H}$. Dann existieren gemäß Lemma 8.1.6 zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ nur abzählbar viele Φ_ι mit $\langle \Phi_\iota \mid \Psi_\nu \rangle \neq 0$. Da aber $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ maximal ist, kann kein Φ_ι existieren mit

$$\langle \Phi_\iota \mid \Psi_\nu \rangle = 0 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N} \,.$$

Also ist I die Vereinigung abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen und somit abzählbar unendlich. ∎

Anmerkung: Auch wenn $\mathcal{H}$ nicht separabel ist, hat jedes MONS von $\mathcal{H}$ die gleiche Mächtigkeit; vgl. Aufgabe 18 von (Lücke, fuan).

Lemma 8.1.8 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Vektorraum und $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ ein ONS von $\mathcal{H}$, dessen lineare Hülle in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann ist $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ ein MONS von*

$\mathcal{H}$ und es gilt[6]

$$\Psi = \sum_{\iota\in I} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle \, \Phi_\iota \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H} \tag{8.1}$$

sowie

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{\iota\in I} |\langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle|^2 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{8.2}$$

Beweisskizze: Sei $\Psi \in \mathcal{H}$. Da die lineare Hülle von $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, existiert dann zu jedem $\epsilon > 0$ ein Vektor der Form[7]

$$\Psi_\epsilon = \lambda_1 \, \Phi_{\iota_1} + \ldots + \lambda_n \, \Phi_{\iota_n} \,, \quad \{\iota_1, \ldots, \iota_n\} \subset I\,,$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon &> \|\Psi - \Psi_\epsilon\|^2 \\ &= \left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 + \left\| \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle - \lambda_\nu \Big) \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 < \epsilon\,.$$

Da außerdem

$$\begin{aligned} \left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 &= \left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n+n'} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 + \left\| \sum_{\nu=n+1}^{n+n'} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 \\ &\ge \left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n+n'} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} \right\|^2 \end{aligned}$$

für alle $n' \in \mathbb{N}$ und $\iota_{n+1}, \ldots, \iota_{n+n'} \in I$ gilt, folgt daraus (8.1) und damit auch

$$\Big(\langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle = 0 \quad \forall\, \iota \in I \Big) \quad \Longrightarrow \quad \Psi = 0\,.$$

Da das für alle $\Psi \in \mathcal{H}$ gilt, ist $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ also ein MONS von $\mathcal{H}$. Da weiterhin

$$\|\Psi\|^2 = \underbrace{\left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n'} \left\langle \Phi_{\iota'_\nu} \,\middle|\, \Psi \right\rangle \Phi_{\iota'_\nu} \right\|^2}_{\xrightarrow[n'\to\infty]{} 0} + \underbrace{\left\| \sum_{\nu=1}^{n'} \left\langle \Phi_{\iota'_\nu} \,\middle|\, \Psi \right\rangle \Phi_{\iota'_\nu} \right\|^2}_{=\sum_{\nu=1}^{n'} \left| \left\langle \Phi_{\iota'_\nu} \,\middle|\, \Psi \right\rangle \right|^2}$$

für alle $n' \in \mathbb{N}$ und $\iota'_1, \ldots, \iota'_{n'} \in I$ gilt, ist nach Lemma 8.1.6 klar, daß (8.2) aus (8.1) folgt. ▮

Version vom 26. März 2009

[6]Man beachte, daß nach Lemma 8.1.6 nur über höchstens abzählbar viele $\iota \in I$ zu summieren ist. Für abzählbare Mengen I_Ψ meint $\Psi = \sum_{\iota\in I_\Psi} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle \, \Phi_\iota$ stets:

$$I_\Psi = \{\iota_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{N} \langle \Phi_{\iota_\nu} \mid \Psi \rangle \, \Phi_{\iota_\nu} = \Psi$$

(vgl. Definition 7.1.12).

[7]Die $\iota_1 + \ldots + \iota_n$ sollen alle voneinander verschieden sein.

Anmerkungen:

1. Anwendung von Lemma 8.1.8 auf den Fall
$$\mathcal{H} = C(S^1)\,, \quad \{\Phi_\iota\}_{\iota\in I} = \{e_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$$
liefert mit (8.1) die FOURIER-***Reihenentwicklung***
$$f(\varphi) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \langle e_\nu \mid f\rangle\, e^{i\,\nu\,\varphi} \quad \forall\, f \in C(S^1) \tag{8.3}$$
(starke Konvergenz in $C(S^1)$, auch *Konvergenz im Mittel* genannt), wobei
$$\langle e_\nu \mid f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-i\,\nu\,\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}\,.$$
2. Man sieht leicht (Aufgabe E51), daß die unendliche Reihe in (8.3) sogar absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn $f(\varphi)$ stetig differenzierbar ist.

8.1.2 Schwache Konvergenz und Beschränktheit

Der Begriff der starken Konvergenz wurde bereits in Definition Definition 7.1.12 eingeführt. Wenn der Zusatz 'stark' weggelassen wird ist, stets *starke* Konvergenz gemeint. Oft jedoch sind auch andere Konvergenzbegriffe nützlich.

Definition 8.1.9 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer Vektorraum und $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$. Falls ein $\Psi \in \mathcal{H}$ existiert mit*
$$\lim_{\nu\to\infty} \langle \Phi \mid \Psi_\nu\rangle = \langle \Phi \mid \Psi\rangle \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{H}\,,$$
*dann sagt man, daß die Folge **schwach** gegen Ψ **konvergiert** und teilt das durch*
$$\text{w-}\lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi$$
mit.

Anmerkungen:

1. Die Grenzwerte $\text{s-}\lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu$ und $\text{w-}\lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu$ sind natürlich stets eindeutig, sofern sie existieren. Wenn beide Grenzwerte existieren, stimmen sie überein.
2. Für jedes ONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ gilt: $\text{w-}\lim_{\nu\to\infty} \Phi_\nu = 0\,.$

Folgerung 8.1.10 *Für jede Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in einem* Euklid*ischen Vektorraum gilt*

$$s\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\Psi_\nu = \Psi \iff \begin{cases} w\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\Psi_\nu = \Psi\,, \\ \lim_{\nu\to\infty}\|\Psi_\nu\| = \|\Psi\|\,. \end{cases}$$

Beweisskizze: Aus

$$\begin{aligned} |\langle\Phi\mid\Psi\rangle - \langle\Phi\mid\Psi_\nu\rangle| &= |\langle\Psi\mid\Psi-\Psi_\nu\rangle| \\ &\underset{\text{Schwarz}}{\leq} \|\Phi\|\,\|\Psi-\Psi_\nu\| \end{aligned}$$

erkennt man sofort, daß aus der starken Konvergenz stets die schwache folgt. Mit

$$\|\Psi-\Psi_\nu\|^2 = \|\Psi\|^2 - 2\,\Re\langle\Psi\mid\Psi_\nu\rangle + \|\Psi_\nu\|^2 \tag{8.4}$$

folgt daraus auch

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\Psi_\nu\| = \|\Psi\|\,.$$

Umgekehrt folgt aus der schwachen Konvergenz und der Konvergenz der Normen mit (8.4) unmittelbar die starke Konvergenz. ∎

Definition 8.1.11 *Seien $\mathcal{H}$ ein* Euklid*ischer Vektorraum und T eine Teilmenge von $\mathcal{H}$. Dann heißt T* ***beschränkt****, falls*

$$\sup_{\Psi\in T}\|\Psi\| < \infty\,.$$

Entsprechend nennt man eine Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ beschränkt, falls die Menge $\{\Psi_\nu : \nu\in\mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Lemma 8.1.12 *Sei $\mathcal{H}$ ein* Euklid*ischer Vektorraum. Dann ist jede schwach konvergente Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ beschränkt.*

Beweisskizze: Angenommen, $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ sei schwach konvergent aber nicht beschränkt. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ schwach gegen 0 konvergiert. Dann lassen sich iterativ eine Teilfolge $\{\Psi'_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ und ein ONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ konstruieren mit

$$\langle\Psi'_\nu\mid\Phi_\nu\rangle > \nu^2 \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}$$

und

$$\mu<\nu \implies \left|\left\langle\Psi'_\mu\mid\Phi_\nu\right\rangle\right| < \nu^{-1} \qquad \forall\mu,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Bei geeigneter Wahl der Vorzeichen $\sigma_\nu\in\{-1,+1\}$ gilt damit

$$|\langle\Psi'_\nu\mid\Phi\rangle| > \nu-2 \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,,$$

für

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sigma_\nu}{\nu}\,\Phi_\nu\in\mathcal{H}\,.$$

Das steht aber im Widerspruch zur schwachen Konvergenz von $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. ∎

Definition 8.1.13 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer Vektorraum und $\Psi(t)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$. Dann heißt diese Abbildung (stark)* ***differenzierbar****, falls*

$$\dot{\Psi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} s\text{-}\lim_{\substack{t_1,t_2\to t\\ t_1\neq t_2}} \frac{\Psi(t_1)-\Psi(t_2)}{t_1-t_2}$$

existiert.[8] *Falls $\langle \Phi \mid \Psi(t)\rangle$ für alle $\Phi \in \mathcal{H}$ nach t differenzierbar ist, nennt man $\Psi(t)$* ***schwach differenzierbar****.*

Anmerkung: Falls $\Psi(t)$ stark differenzierbar ist, dann ist $\Psi(t)$ gemäß Folgerung 8.1.10 auch schwach differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \Phi \mid \Psi(t)\rangle = \left\langle \Phi \,\middle|\, \dot{\Psi}(t)\right\rangle \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{H}\,.$$

8.1.3 HILBERTsche Räume

Definition 8.1.14 *Als* HILBERT***-Raum*** *bezeichnet man einen* EUKLID*ischen komplexen Vektorraum $\mathcal{H}$, in dem jede* CAUCHY***-Folge****, d.h. jede Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit*

$$\lim_{N\to+\infty}\ \sup_{\nu,\mu>N} \|\Psi_\nu - \Psi_\mu\| = 0\,,$$

eine starken Grenzwert besitzt:

$$s - \lim_{\nu\to+\infty} \Psi_\nu = \Psi \quad \textit{für geeignetes } \Psi \in H\,.$$

Unter HILBERT***-Raum-Basis***[9] *versteht man ein MONS eines* HILBERT*-Raumes.*

Folgerung 8.1.15 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Dann*[10] *gelten die Gleichungen (8.1) und (8.2).*

[8] Eigentlich haben wir die starke Konvergenz nur für diskrete Folgen definiert. Trotzdem sollte klar sein, was hier gemeint ist.

[9] **Warnung:** Nur für endlichdimensionale HILBERTsche Räume sind die HILBERT-Raum-Basen auch Basen im Sinne der Definition 7.1.3.

[10] Bzgl. der Notwendigkeit der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ siehe Aufgabe E56.

Beweisskizze: Dank der BESSELschen Ungleichung existiert

$$\sum_{\iota \in I_\Psi} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle \, \Phi_\iota$$

für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ und dafür gilt

$$\Psi - \sum_{\iota \in I_\Psi} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle \, \Phi_\iota \;\perp\; \Phi_{\iota'} \quad \forall \, \iota' \in I\,.$$

Da $\{\Phi_\iota\}_{\iota \in I}$ maximal ist, folgt daraus (8.1). Daraus folgt auch, daß die lineare Hülle von $\{\Phi_\iota\}_{\iota \in I}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt und gemäß Lemma 8.1.8 somit (8.2) gilt. ▮

Lemma 8.1.16 *Die Menge*

$$\ell^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z = \{z^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \; \|z\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} |z^n|^2 < \infty \right\} \tag{8.5}$$

aller quadratsummierbaren Folgen komplexer Zahlen mit ihrer natürlichen linearen Struktur und dem inneren Produkt

$$\langle z_1 \mid z_2 \rangle \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_1^\nu)^* \, z_2^\nu \quad \forall \, z_1, z_2 \in \ell^2 \tag{8.6}$$

ist ein HILBERT*-Raum.*

Beweisskizze: Offensichtlich gilt

$$\lambda \, z = \left\{ \lambda \, z^1, \lambda \, z^2, \ldots \right\} \in \ell^2 \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{C}\,, \; z \in \ell^2$$

gilt, ist offensichtlich. Daß auch

$$z_1 + z_2 = \left\{ z_1^1 + z_2^1, z_1^2 + z_2^2, \ldots \right\} \in \ell^2 \quad \forall \, z_1, z_2 \in \ell^2$$

gilt folgt aus

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} |z_1^\nu + z_2^\nu|^2} \;\; & \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \;\; \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} |z_1^\nu|^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} |z_2^\nu|^2} \\ & \leq \;\; \|z_1\| + \|z_2\| \quad \forall \, N \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

ℓ^2 ist also sicherlich ein komplexer Vektorraum. Daß die rechte Seite von (8.6) endlich ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} \left| (z_1^\nu)^* \, z_2^\nu \right| \;\; & = \;\; \left| \sum_{\nu=1}^{N} |z_1^\nu|^* \, |z_2^\nu| \right| \\ & \underset{\text{Schwarz}}{\leq} \;\; \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} |z_1^\nu|^2} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} |z_2^\nu|^2} \\ & \leq \;\; \|z_1\| \, \|z_2\| \quad \forall \, N \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Der komplexe Vektorraum ℓ^2 ist damit EUKLIDisch. Sei nun $\{z_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in ℓ^2. Wenn dazu überhaupt ein Grenzwert $z \in \ell^2$ existiert, muß dafür

$$\begin{aligned} z^\nu &= \langle e_\nu \mid z\rangle \\ &= \lim_{\mu\to\infty} \left\langle e_\nu \,\middle|\, z_\mu \right\rangle \\ &= \lim_{\mu\to\infty} z_\mu^\nu \end{aligned}$$

gelten, wobei

$$e_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{\delta_{\nu,1}, \delta_{\nu,2}, \dots\} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Für

$$z^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mu\to\infty} z_\mu^\nu \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N} \tag{8.7}$$

ist also zu zeigen:

1. $z = \left\{z^1, z^2, \dots\right\} \in \ell^2$ und
2. $\lim_{\mu\to\infty} \|z - z_\mu\| = 0\,.$

Zu 1.: Da $\{z_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \epsilon &> \|z_\mu - z_\nu\|^2 \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left|z_\mu^\lambda - z_\nu^\lambda\right|^2 \\ &= \sum_{\lambda=1}^{L} \left|z_\mu^\lambda - z_\nu^\lambda\right|^2 \quad \forall\, \mu,\nu \geq N_\epsilon\,,\; L \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Mit (8.7) folgt daraus

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \left|z^\lambda - z_\nu^\lambda\right|^2 \leq \epsilon \quad \forall\, \nu \geq N_\epsilon\,,\; L \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left|z^\lambda - z_\nu^\lambda\right|^2 \leq \epsilon \quad \forall\, \nu \geq N_\epsilon\,. \tag{8.8}$$

Daraus folgt insbesondere

$$\left\{z^1 - z_{N_\epsilon}^1, z^2 - z_{N_\epsilon}^2, \dots\right\} \in \ell^2$$

und wegen $z_{N_\epsilon} \in \ell^2$ somit

$$z = \left\{z^1, z^2, \dots\right\} \in \ell^2\,.$$

Zu 2.: Da (8.8) für beliebes $\epsilon > 0$ mit geeignetem $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned} \|z - z_\nu\|^2 &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left|z^\lambda - z_\nu^\lambda\right|^2 \\ &\xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 8.1.17 *Seien $\mathcal{H}$ ein* EUKLID*ischer komplexer Raum und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein ONS von $\mathcal{H}$, dessen lineare Hülle in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann ist $\mathcal{H}$ genau dann ein* HILBERT-*Raum, wenn zu jeder Folge $z \in \ell^2$ ein $\Psi \in \mathcal{H}$ existiert mit $\Psi = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} z^\nu \,\Phi_\nu$.*

Beweisskizze: Wenn man die Elemente $\Psi \in \mathcal{H}$ gemäß Lemma 8.1.8 mit den entsprechenden Folgen $z = \{z^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ der Entwicklungskoeffizienten $z^\nu = \langle \Phi_\nu \mid \Psi\rangle$ identifiziert, dann stellt sich $\mathcal{H}$ als EUKLIDischer Teilraum von ℓ^2 dar. Da ℓ^2 gemäß Lemma 8.1.16 ein HILBERT-Raum ist, ist also nur zu zeigen, daß jeder vollständige Teilraum von ℓ^2, der alle abbrechenden Folgen

$$\{z^1,\dots,z^N,0,0,\dots\}\ ,\quad N\in\mathbb{N}\,,$$

enthält, mit ℓ^2 übereinstimmt:

Sei also $\check{\mathcal{H}}$ ein solcher Teilraum und sei $z = \{z^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Element von ℓ^2. Dann bilden die

$$z_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \{z^1,\dots,z^\mu,0,0,\dots\}$$

wegen

$$\|z_\nu - z_\mu\|^2 = \sum_{\lambda=\mu+1}^{\nu} \left|z^\lambda\right|^2 \quad \text{für } \mu<\nu$$

eine CAUCHY-Folge in $\check{\mathcal{H}}$. Gemäß Definition 8.1.14 muß also ein $\check z = \{\check z^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in \check{\mathcal{H}}$ existieren mit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\mu\to\infty} \|\check z - z_\mu\|^2 \\ &= \lim_{\mu\to\infty}\left(\sum_{\lambda=0}^{\mu}\left|\check z^\lambda - z^\lambda\right|^2 + \sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty}\left|\check z^\lambda\right|^2\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\check z = z$ und somit, da $z\in\ell^2$ beliebig vorgegeben war, $\ell^2 \subset \check{\mathcal{H}}$. ∎

Folgerung 8.1.18 *Seien $\mathcal{H}$ und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ wie in Lemma 8.1.17 vorgegeben. Dann ist*[11]

$$\overline{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu\,\Phi_\nu \,:\, z\in\ell^2\right\}$$

mit seiner natürlichen linearen Struktur und dem inneren Produkt

$$\left\langle \sum_{\nu=1}^{\infty} z_2^\nu\,\Phi_\nu \,\middle|\, \sum_{\mu=1}^{\infty} z_2^\mu\,\Phi_\mu\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle z_1 \mid z_2\rangle \quad \forall\, z_1,z_2\in\ell^2$$

ein separabler HILBERT-*Raum, der $\mathcal{H}$ als dichten* EUKLID*ischen Teilraum enthält und für den $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS ist. Falls $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum ist, dann gilt $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$.*

[11] Diejenigen Reihen von $\overline{\mathcal{H}}$, die nicht in $\mathcal{H}$ konvergieren, stehen einfach für sich selbst.

Anmerkungen:

1. Alle separablen unendlichdimensionalen HILBERT-Räume stimmen also i.w. mit ℓ^2 überein.
2. Alle endlichdimensionalen EUKLIDischen Vektorräume sind vollständig, also HILBERT-Räume.

8.2 Beispiele für vollständige Funktionensysteme

In physikalischen Anwendungen wird oft der *Funktionenraum* $L^2(\mathcal{G})$ benutzt, wobei $\mathcal{G}$ ein hinreichend gutartiges Gebiet des $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Um nicht auf die maßtheoretische Formulierung eingehen zu müssen, fassen wir hier den $L^2(\mathcal{G})$ im Sinne von Folgerung 8.1.18 als HILBERT-Raum-Vervollständigung des EUKLIDischen komplexen Vektorraumes $C(\mathcal{G}, \mathrm{d}|\mathcal{G}|)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen $f(\mathbf{x})$ über $\mathcal{G}$ auf, für die die EUKLIDische Norm

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}} |f(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}|\mathcal{G}|_{\mathbf{x}}$$

als gewöhnliches (RIEMANNsches) Integral existiert. Das innere Produkt stetiger Funktionen $f, g \in L^2(\mathcal{G})$ ist also durch

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\mathcal{G}} \Big(f(\mathbf{x})\Big)^* g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}|\mathcal{G}|_{\mathbf{x}} \tag{8.9}$$

gegeben. Wendet man das im Beweis von Folgerung 2.1.6 und in 2.1.3 beschriebene SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren auf eine abzählbare Menge von Vektoren an, deren lineare Hülle in $C(\mathcal{G}, \mathrm{d}|\mathcal{G}|)$ *dicht* liegt, dann[12] erhält man stets ein MONS von $L^2(\mathcal{G})$.

8.2.1 LEGENDRE-Polynome

[12]Reihen, die nicht in $C(\mathcal{G}, \mathrm{d}|\mathcal{G}|)$ konvergieren, aber deren Differenz in $C(\mathcal{G}, \mathrm{d}|\mathcal{G}|)$ gegen Null konvergiert, werden identifiziert.

Lemma 8.2.1 *Durch Anwendung des* SCHMIDT*schen Orthonormalisierungsverfahrens auf*

$$\left\{ m_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^\nu \right\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \subset C\Big([-1,+1], \mathrm{d}x\Big)$$

ergibt sich das aus den sog. LEGENDRE-***Polynome****n*[13]

$$P_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^\nu\, \nu!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu \left(x^2-1\right)^\nu \quad \forall\, x \in [-1,+1]\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+\,; \tag{8.10}$$

durch Normierung gebildete MONS

$$\left\{ v_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\nu + \frac{1}{2}}\, P_\nu(x) \right\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+}$$

von $L^2\Big([-1,+1]\Big)$ *.*

Beweisskizze: Aus dem WEIERSTRASSschen Approximationssatz folgt, daß die lineare Hülle der $m_\nu(x)$ in $C\Big([-1,+1], \mathrm{d}x\Big)$ dicht ist. Das gleiche gilt deshalb für die lineare Hülle der LEGENDRE-Polynome, denn wegen

$$\text{Rang}\left((x^2-1)^\nu - x^{2\nu}\right) < 2\nu$$

gilt

$$\text{Rang}\left(P_\nu(x) - \frac{(2\nu)!}{2^\nu\,(\nu!)^2}\, x^\nu\right) < \nu\,, \tag{8.11}$$

woraus übrigens[14]

$$P_\nu^{(\nu)}(x) = \frac{(2\nu)!}{2^\nu\, \nu!} \quad \forall\, x \in [-1,+1] \tag{8.12}$$

folgt. Gemäß Folgerung 8.1.18 ist also nur noch zu zeigen, daß die $v_\nu(x)$ ein ONS von $C\Big([-1,+1], \mathrm{d}x\Big)$ bilden:

Aus (8.11) erkennt man mithilfe $(\nu+1)$-facher partieller Integration leicht:

$$\langle P_\nu \mid P_\mu \rangle = \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, P_\mu(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für } \nu < \mu\,.$$

[13]Siehe (Jahnke et al., 1960, Kap. VIII).

[14]Wir verwenden die übliche Notation $f^{(\nu)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu f(x)$.

Außerdem ergibt sich durch wiederholte partielle Integration:[15]

$$\begin{aligned}\langle P_\nu \mid P_\nu\rangle &\underset{(8.10)}{=} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu\,\nu!}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^\nu\,P_\nu^{(\nu)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &\underset{(8.12)}{=} \frac{(2\nu)!}{(2^\nu\,\nu!)^2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^\nu(1-x)^\nu\,\mathrm{d}x\\ &= 2^{-2\nu}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2\nu}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Anmerkung: Bzgl. der Bedeutung der LEGENDRE-Polynome für die Multipolentwicklung siehe Aufgabe E47 und Abschnitt 1.4.2 von (Lücke, edyn). Zur Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen siehe (Fischer und Kaul, 2004, § 15, Nr. 3.5).

8.2.2 HERMITEsche Polynome

Lemma 8.2.2 *Die lineare Hülle von*

$$\left\{\psi_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} (ix)^\nu\,e^{-\frac{x^2}{2}} \,:\, \nu\in\mathbb{Z}_+\right\}$$

ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$ *.*

Beweisskizze: Sei

$$\Psi_z(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{x^2}{2}}\,e^{ixz} \quad \forall\, x,z\in\mathbb{R}\,.$$

Mithilfe der SCHWARZschen Ungleichung und der Formel

$$\int x^n\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\sqrt{\pi} & \text{für } n=0\\ (1-\frac{1}{2})\cdots(k-\frac{1}{2})\sqrt{\pi} & \text{für } n=2k\,,\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \tag{8.13}$$

sieht man leicht, daß die TAYLOR-Entwicklung von

$$f_\Psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\Psi \mid \Psi_z\rangle \quad \forall\, z\in\mathbb{R}$$

für jedes $\Psi\in L^2(\mathbb{R})$ an der Stelle $z=0$ existiert und einen unendlichen Konvergenzradius hat. Wegen

$$f_\Psi^{(\nu)}(0) = \langle\Psi \mid \psi_\nu\rangle$$

[15] Die vorletzte Gleichung ergibt sich durch wiederholte Anwendung von

$$\int_{-1}^{+1}(1+x)^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x \underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{\beta}{\alpha+1}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x \quad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{N}\,.$$

folgt daraus

$$\Psi \perp \{\psi_\nu : \nu \in \mathbb{Z}_+\} \quad \Longrightarrow \quad \langle \Psi \mid \Psi_z \rangle = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$$
$$\underset{\text{Fourier-Theorie}}{\Longrightarrow} \quad \Psi = 0$$

für alle $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$. Deshalb enthält die lineare Hülle der Menge aller ψ_ν ein MONS von $L^2(\mathbb{R})$ und liegt somit gemäß Folgerung 8.1.15 in diesem Hilbert-Raum dicht.

∎

Folgerung 8.2.3 *Die aus den* Hermite***schen Polynomen***[16]

$$H_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\nu\, e^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu e^{-x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+$$

gebildeten Funktionen

$$\varphi_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_\nu(x)}{\sqrt{\nu!\, 2^\nu \sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+$$

bilden ein MONS von $L^2(\mathbb{R})$ *.*

Beweisskizze: Aus

$$\mathrm{Rang}\Big(H_\nu(x) - (2\,x)^\nu\Big) < \nu$$

folgt mit Lemma 8.2.2, daß die lineare Hülle der φ_ν gemäß Lemma 8.2.2 in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt. Mit

$$\langle \varphi_\nu \mid \varphi_\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu!\,\mu!\,2^{\nu+\mu}\,\pi}} \int H_\nu(x)\,(-1)^\mu \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\mu e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ergibt sich außerdem durch μ-fache partielle Integration

$$\langle \varphi_\nu \mid \varphi_\mu \rangle = 0 \quad \text{für } \nu < \mu$$

und

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_\nu \mid \varphi_\nu \rangle &= \frac{1}{\nu!\,2^\nu \sqrt{\pi}} \int H_\nu(x)\,(-1)^\nu \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\nu!\,2^\nu \sqrt{\pi}} \int H_\nu^{(\nu)}(x)\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

$\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+}$ ist also tatsächlich ein MONS von $L^2(\mathbb{R})$. ∎

[16] Siehe (Jahnke et al., 1960, Abschn. VII.C). Bzgl. der Bedeutung der Hermiteschen Polynome für den quantisierten harmonischen Oszillator siehe Aufgabe E62.

Es sei angemerkt, daß alle φ_ν zum SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der ***temperiert***en Funktionen über $\mathbb{R}$ gehören:[17]

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_N < \infty \; \forall \, N \in \mathbb{N}\right\} ,\\ \|\varphi\|_N &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^N \sup_{\nu\in\{0,\ldots,N\}} \left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu \varphi(x)\right| . \end{aligned}} \tag{8.14}$$

8.2.3 LAGUERREsche Polynome

Folgerung 8.2.4 *Die lineare Hülle von*

$$\left\{\Psi'_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^\nu \, e^{-\frac{x}{2}} : \nu \in \mathbb{Z}_+\right\}$$

ist dicht in $L^2\Big([0,\infty)\Big)$.

Beweisskizze: Sei f eine stetige Funktion über $[0,\infty)$, die bei $x = 0$ sowie für hinreichend großes x verschwindet, und sei $\epsilon > 0$. Dann genügt es zu zeigen, daß ein Polynom $\check{P}(x)$ über $[0,\infty)$ existiert mit

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x) - \check{P}(x+1)\, e^{-\frac{x}{2}}\right|^2 \, \mathrm{d}x < \epsilon \, . \tag{8.15}$$

Gemäß Lemma 8.2.2 existiert ein Polynom $P(x)$ über $\mathbb{R}$ mit[18]

$$\begin{aligned} \epsilon \quad &\geq \quad \int \left|x\, f(x^2-1) - P(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \, \mathrm{d}x \\ &\geq \quad \int \left|x\, f(x^2-1) - \frac{P(x)-P(-x)}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \quad 2 \int_0^{+\infty} \left|x\, f(x^2-1) - \frac{P(x)-P(-x)}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\underset{x'=x^2}{=} \quad \int_0^{+\infty} \left| f(x'-1) - \frac{P\left(\sqrt[+]{x'}\right) - P\left(\sqrt[+]{x'}\right)}{2\,\sqrt[+]{x'}}\, e^{-\frac{x'}{2}}\right|^2 \sqrt[+]{x'} \, \mathrm{d}x' \\ &\geq \quad \int_1^{+\infty} \left| f(x'-1) - \frac{P\left(\sqrt[+]{x'}\right) - P\left(\sqrt[+]{x'}\right)}{2\,\sqrt[+]{x'}}\, e^{-\frac{x'}{2}}\right|^2 \mathrm{d}x' \\ &= \quad \int_1^{+\infty} \left| f(x'-1) - \check{P}(x')\, e^{-\frac{x'-1}{2}}\right|^2 \, \mathrm{d}x' , \end{aligned}$$

[17]Mit $C^\infty(\mathbb{R})$ wird i.a. der Raum aller beliebig oft ableitbaren komplexwertigen Funktionen über $\mathbb{R}$ bezeichnet.

[18]Man beachte für die zweite Ungleichung:

$$\left.\begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \ni u(x) \text{ ungerade} \\ L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \ni g(x) \text{ gerade} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \int g(x)\, u(x)\, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

wobei

$$\check{P}(x') \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{1}{2}} \frac{P\left(\sqrt[+]{x'}\right) - P\left(\sqrt[+]{x'}\right)}{2\,x'}$$

ein Polynom in x' ist. Daraus folgt (8.15) durch Variablensubstitution $x' \mapsto x = x'-1$.

▮

Folgerung 8.2.5 *Die aus den* LAGUERRE***schen Polynomen***[19]

$$L_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu \left(x^\nu e^{-x}\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+$$

gebildeten Funktionen

$$\check{\varphi}_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu!}\, e^{-\frac{x}{2}}\, L_\nu(x) \quad \forall\, x \geq 0\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+$$

bilden ein MONS von $L^2\Big([0,\infty)\Big)$.

Beweisskizze: Analog[20] demjenigen von Folgerung 8.2.3 . ▮

8.3 Lineare Operatoren

8.3.1 Grundsätzliches

Die in der Quantenmechanik benutzten Operatoren sind vielfach nur auf ***linearen*** (nicht HILBERTschen) Teilräumen des HILBERTschen Zustandsraumes $\mathcal{H}$ definiert.

Definition 8.3.1 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein (komplexer)* HILBERT*-Raum. Ein* ***linearer Operator in*** $\mathcal{H}$ *ist dann eine lineare Abbildung* $\hat{A}$ *eines linearen Teilraumes* $D_{\hat{A}}$ *von* $\mathcal{H}$ *in* $\mathcal{H}$ *. Dabei bezeichnet man* $D_{\hat{A}}$ *als den* ***Definitionsbereich*** *von* $\hat{A}$ *.*

Version vom 26. März 2009

[19]Siehe (Jahnke et al., 1960, Abschn. VII.B).

[20]Dabei ist allerdings zu beachten, daß

$$\int_0^{+\infty} x^\nu\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \nu! \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}_+ \,.$$

Den linearen Operator $\hat{B}$ in $\mathcal{H}$ nennt man eine ***Erweiterung*** *des linearen Operators $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ und dementsprechend $\hat{A}$ die* ***Einschränkung*** *von $\hat{B}$ auf $D = D_{\hat{A}}$, wenn*

$$\hat{A}\,\Psi = \hat{B}\,\Psi \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{B}}$$

gilt. Dann schreibt man für $\hat{A}$ auch $\hat{B}\restriction D$.

Den Operator $\hat{A}$ nennt man HERMITE***sch****, falls*[21]

$$\left\langle \Psi_1 \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}\,\Psi_1 \,\middle|\, \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\,\Psi_1, \Psi_2 \in D_{\hat{A}}\,.$$

Das ***Operatorprodukt*** *$\hat{A}\,\hat{B}$ linearer Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ in $\mathcal{H}$ ist die durch*

$$\begin{aligned} D_{\hat{A}\,\hat{B}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi \in D_{\hat{B}} : \hat{B}\,\Psi \in D_{\hat{A}} \right\}, \\ \hat{A}\,\hat{B}\,\Psi &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\left(\hat{B}\,\Psi\right) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}\,\hat{B}} \end{aligned}$$

gegebene Abbildung von $D_{\hat{A}\,\hat{B}}$ in $\mathcal{H}$.

Die ***Operatorsumme*** *$\hat{A} + \hat{B}$ linearer Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ in $\mathcal{H}$ ist die durch*

$$\begin{aligned} D_{\hat{A}+\hat{B}} &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{A}} \cap D_{\hat{B}}\,, \\ \left(\hat{A} + \hat{B}\right)\Psi &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\Psi + \hat{B}\,\Psi \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}+\hat{B}} \end{aligned}$$

gegebene Abbildung von $D_{\hat{A}+\hat{B}}$ in $\mathcal{H}$.

Mit $\hat{1}$ bezeichnet man den durch $D_{\hat{1}} = \mathcal{H}$ und

$$\hat{1}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}$$

gegebenen ***Einsoperator****.*

Für komplexe Zahlen λ und lineare Operatoren $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ definiert man außerdem

$$\begin{aligned} D_{\lambda\hat{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{A}}\,, \\ \left(\lambda\hat{A}\right)\Psi &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda\left(\hat{A}\,\Psi\right) \quad \forall\,\Psi \in D_{\lambda\hat{A}}\,. \end{aligned}$$

Statt $\lambda\,\hat{1}$ schreibt man oft einfach nur λ.

Unter einem ***Eigenwert*** *des linearen Operators $\hat{A}$ versteht man eine komplexe Zahl, zu der ein Vektor $\Psi \in D_{\hat{A}} \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$\hat{A}\,\Psi = \lambda\,\Psi.$$

Solche Vektoren bezeichnet man als ***Eigenvektor****en von $\hat{A}$.*

[21]Wenn außerdem noch $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, nennt man $\hat{A}$ ***symmetrisch***.

Lemma 8.3.2 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

1. *Wenn $\hat{A}$* HERMITE*sch ist, dann sind alle Eigenwerte von $\hat{A}$ reell.*
2. *Wenn $\hat{A}$ isometrisch ist, dann haben alle Eigenwerte von $\hat{A}$ den Betrag 1.*
3. *Wenn $\hat{A}$* HERMITE*sch oder/und isometrisch ist, dann sind Eigenvektoren von $\hat{A}$ zu ungleichen Eigenwerten zueinander orthogonal.*

Beweisskizze: Für je zwei Eigenvektoren Ψ_1, Ψ_2 von $\hat{A}$ folgen die Behauptung durch Anwendung von Folgerung 7.3.19 auf $\hat{A}/\!\!\setminus\mathcal{L}\Big(\{\Psi_1,\Psi_2\}\Big)$. ∎

Viele Sätze über lineare Operatoren auf endlichdimensionalen EUKLIDischen Vektorräumen gelten auch für *beschränkte* lineare Operatoren auf unendlichdimensionalen HILBERT-Räumen.

Definition 8.3.3 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann nennt man $\hat{A}$* ***beschränkt****, falls*

$$T \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad \hat{A}\,T \text{ beschränkt}$$

für alle Teilmengen T von $D_{\hat{A}}$ gilt. Die Menge aller beschränkten linearen Operatoren **auf** *$\mathcal{H}$ wird mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet. Die* ***Operatornorm*** *eines Operators $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist*

$$\left\|\hat{A}\right\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H}\\ \|\Psi\|=1}} \left\|\hat{A}\Psi\right\| .$$

Anmerkung: Man überzeugt sich leicht davon, daß $\|.\|$ tatsächlich alle Eigenschaften einer ***Norm*** hat:[22]

$$\left\|\hat{A}\right\| = 0 \implies \hat{A} = 0\,, \tag{8.16}$$

$$\left\|z\,\hat{A}\right\| = |z|\left\|\hat{A}\right\| \geq 0 \quad \forall\, z\in\mathbb{C}\,,\ \hat{A}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\,, \tag{8.17}$$

$$\left\|\hat{A}+\hat{B}\right\| \leq \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\hat{B}\right\| \quad \forall\, \hat{A},\hat{B}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\,. \tag{8.18}$$

Leider sind aber z.B. die quantenmechanischen Orts- und Impulsoperatoren nicht beschränkt.

[22] Man beachte allerdings Aufgabe E68c).

Lemma 8.3.4 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT-*Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$ (also $D_{\hat{A}} = \mathcal{H}$), der alle schwach konvergenten Folgen in $\mathcal{H}$ auf schwach konvergente Folgen in $\mathcal{H}$ abbildet. Dann ist $\hat{A}$ beschränkt.*

Beweisskizze: Wäre $\hat{A}$ unbeschränkt, so müßte ein Orthonormalsystem $\{\Phi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ existieren mit

$$\left\| \hat{A}\, \Phi_\nu \right\| > \nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Gemäß Lemma 8.1.12 und Anmerkung 2 zu Definition 8.1.9 stünde das aber im Widerspruch zur Voraussetzung an $\hat{A}$. ∎

Folgerung 8.3.5 (Satz von Hellinger und Toeplitz) *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT-*Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ HERMITEsch} \\ D_{\hat{A}} = \mathcal{H} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \hat{A} \text{ beschränkt}\,.$$

Beweisskizze: Aus den Implikationsvoraussetzungen ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} \operatorname{w-lim}_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \Psi' \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi_\nu \right\rangle \quad &= \quad \left\langle \hat{A}\,\Psi' \,\middle|\, \Psi_\nu \right\rangle \\ &\underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \quad \left\langle \hat{A}\,\Psi' \,\middle|\, \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi' \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi \right\rangle \quad \forall \Psi' \in \mathcal{H}\,, \end{aligned}$$

daß $\hat{A}$ die Voraussetzungen von Lemma 8.3.4 erfüllt. ∎

Unbeschränkte quantenmechanische Observable können also nicht auf dem ganzen Zustandsraum definiert sein!

Ganz offensichtlich gilt das folgende Lemma:

Lemma 8.3.6 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT-*Raum, $\Phi \in \mathcal{H}$ und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann existiert höchstens ein $\Phi^\dagger \in \mathcal{H}$ mit*

$$\left\langle \Phi^\dagger \,\middle|\, \Psi \right\rangle = \left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi \right\rangle \quad \forall \Psi \in D_{\hat{A}}\,.$$

Das ermöglicht folgende Definition:[23]

[23]Man beachte die Konsistenz mit Definition 7.3.11.

Definition 8.3.7 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann bezeichnet man den durch*

$$D_{\hat{A}^\dagger} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Phi : \Phi^\dagger \textit{ entspr. Lemma 8.3.6 exist.}\right\} ,$$

und

$$\hat{A}^\dagger \, \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^\dagger \; (\textit{entspr. Lemma 8.3.6}) \quad \forall \, \Phi \in D_{\hat{A}^\dagger}$$

*gegebenen — offensichtlich linearen — Operator $\hat{A}^\dagger$ als den zu $\hat{A}$ **adjungiert**en Operator. Im Falle $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ nennt man $\hat{A}$ **selbstadjungiert**.*

Definition 8.3.8 *Seien $\mathcal{H}$ ein komplexer* EUKLID*ischer Vektorraum und L ein lineares Funktional*[24] *auf $\mathcal{H}$. Dann heißt L **beschränkt**,*[25] *falls*

$$T \textit{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad L(T) \textit{ beschränkt}$$

für alle Teilmengen T von $\mathcal{H}$ gilt.

Lemma 8.3.9 (Satz von RIESZ**)** *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und L ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}$. Dann existiert ein $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $L = \langle \Psi |$.*

Beweisskizze: Zu je zwei linear unabhängigen Vektoren $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$ mit $L(\Psi_1) \neq 0 \neq L(\Psi_2)$ gibt es ein $\Psi_3 \in \mathcal{L}\Big(\{\Psi_1, \Psi_2\}\Big) \setminus \{0\}$ mit $L(\Psi_3) = 0$. Folglich existiert ein $\Psi' \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ mit

$$\mathcal{H} \ominus \{\Psi \in \mathcal{H} : L(\Psi) = 0\} = \{\lambda \, \Psi' : \lambda \in \mathbb{C}\} .$$

Dafür gilt offensichtlich $L \propto \langle \Psi' |$. ∎

Anmerkung: Aus dem Satz von RIESZ — zusammen mit Lemma 8.1.12 und der SCHWARZschen Ungleichung — erkennt man leicht, daß jeder HILBERTRaum auch bzgl. der schwachen Konvergenz vollständig ist.

Folgerung 8.3.10 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann stimmt $D_{\hat{A}^\dagger}$ mit der Menge all derjenigen $\Psi \in \mathcal{H}$ überein, für die*

$$D_{\hat{A}} \ni \Phi \mapsto \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{A} \, \Phi \right\rangle$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf $D_{\hat{A}}$ ist.

[24] Siehe Definition 7.4.1.

[25] Die Begriffe 'stetig' und 'beschränkt' sind für **lineare** Abbildungen äquivalent; siehe Aufgabe E48a).

Beweis: Die Behauptung folgt mit Aufgabe E79 unmittelbar aus dem Satz von Riesz. ∎

Folgerung 8.3.11 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer) Hilbert-Raum und $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist der adjungierte Operator der einzige Operator $\hat{A}^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, für den*

$$\left\langle \Psi_1 \middle| \hat{A}\,\Psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger\,\Psi_1 \middle| \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\,\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H} \tag{8.19}$$

gilt. Dementsprechend gilt u.a.

$$\begin{aligned}
\hat{1}^\dagger &= \hat{1}\,, && (8.20)\\
\left(z\,\hat{A}\right)^\dagger &= z^*\hat{A}^\dagger \quad \forall\,z \in \mathbb{C}\,, && (8.21)\\
\left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger &= \hat{A}\,, && (8.22)\\
\left\|\hat{A}^\dagger\right\| &= \left\|\hat{A}\right\|\,, && (8.23)\\
\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^\dagger &= \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,, && (8.24)\\
\left(\hat{A}\,\hat{B}\right)^\dagger &= \hat{B}^\dagger\,\hat{A}^\dagger \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) && (8.25)
\end{aligned}$$

und

$$\hat{A}^\dagger\,\Psi = \sum_{\iota \in I} \left\langle \hat{A}\,\Phi_\iota \middle| \Psi \right\rangle \Phi_\iota \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{8.26}$$

für jedes MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota \in I}$ von $\mathcal{H}$.

Beweisskizze: Aus Folgerung 8.3.10 ergibt sich $D_{\hat{A}^\dagger} = \mathcal{H}$ und damit

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}^\dagger\,\Psi\right\| &\underset{\text{Schwarz}}{=} \sup_{\substack{\Psi' \in \mathcal{H}\\ \|\Psi'\|=1}} \left|\left\langle \hat{A}^\dagger\,\Psi \middle| \Psi' \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\substack{\Psi' \in \mathcal{H}\\ \|\Psi'\|=1}} \left|\left\langle \Psi \middle| \hat{A}\,\Psi' \right\rangle\right| \\
&\underset{\text{Schwarz}}{\leq} \|\Psi\| \sup_{\substack{\Psi' \in \mathcal{H}\\ \|\Psi'\|=1}} \left\|\hat{A}\,\Psi'\right\| \\
&= \left\|\hat{A}\right\|\,\|\Psi\|\,,
\end{aligned}$$

also $\hat{A}^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definitionsgemäß gilt damit (8.19). Die übrigen Behauptungen folgen fast unmittelbar. ∎

Folgerung 8.3.12 *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{U}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt*[26]

$$\hat{U} \text{ isometrisch} \iff \begin{cases} \hat{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \\ \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1} \end{cases}$$

und[27]

$$\begin{aligned} \hat{U} \text{ unitär} &\iff \begin{cases} \hat{U} \text{ isometrisch} \\ \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1}\,. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \hat{U} \text{ bildet mindestens } \textbf{ein} \text{ MONS von } \mathcal{H} \\ \text{auf ein MONS von } \mathcal{H} \text{ ab} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \hat{U} \text{ bildet } \textbf{jedes} \text{ MONS von } \mathcal{H} \\ \text{auf ein MONS von } \mathcal{H} \text{ ab}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Definition 8.3.13 *Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum. Unter einem (Orthogonal-)* ***Projektionsoperator*** *(kurz:* ***Projektor****) in $\mathcal{H}$ versteht man dann einen linearen Operator $\hat{P}$ auf $\mathcal{H}$ mit*

$$\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger\,.$$

Anmerkungen:

1. Definition 8.3.13 ist eine konsistenten Verallgemeinerung von Definition 7.3.14.
2. Gemäß Lemma 8.3.4 sind alle Projektoren beschränkt.

Folgerung 8.3.14 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\hat{P}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $\hat{P}$ genau dann ein Projektor, wenn ein* HILBERT*scher Teilraum $\mathcal{T}$ von $\mathcal{H}$ existiert mit*

$$\hat{P}\,\Psi = \begin{cases} \Psi & \text{für } \Psi \in \mathcal{T}\,, \\ 0 & \text{für } \Psi \perp \mathcal{T}\,. \end{cases} \tag{8.27}$$

Wenn $\hat{P}$ ein Projektor ist, dann stimmt der Teilraum $\mathcal{T}$ von (8.27) mit $\hat{P}\,\mathcal{H}$ überein und für jedes MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota \in I'}$ von $\mathcal{T}$ gilt

$$\hat{P}\,\Psi = \sum_{\iota \in I'} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle\, \Phi_\iota \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{8.28}$$

[26] Siehe Definition 7.3.9 und Lösungsvorschlag zu Aufgabe E58a).

[27] Denn:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1} \\ D_{\hat{U}^{-1}} = \mathcal{H} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\hat{U}\,\hat{U}^\dagger\right)\Psi \begin{array}{l} = \hat{U}\,\hat{U}^\dagger \hat{U}\,\hat{U}^{-1}\Psi \\ = \Psi \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}\,. \end{array}$$

Beweisskizze: Sei $\hat{P}$ ein Projektor. Dann folgt (8.27) — wie im Beweis zu Folgerung 7.3.15 — für $\Psi \in \mathcal{T} = \hat{P}\,\mathcal{H}$ aus $\hat{P}^2 = \hat{P}$ und für $\Psi \perp \mathcal{T} = \hat{P}\,\mathcal{H}$ aus

$$\left\langle \Psi' \mid \hat{P}\,\Psi \right\rangle \underset{\hat{P}=\hat{P}^\dagger}{=} \left\langle \hat{P}\,\Psi' \mid \Psi \right\rangle = 0 \quad \forall\, \Psi' \in \mathcal{H}\,.$$

Wir müssen nun aber noch zusätzlich zeigen, daß $\hat{P}\,\mathcal{H}$ vollständig ist. Sei also $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\hat{P}\,\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ voraussetzungsgemäß vollständig ist, existiert dann ein $\Psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\text{s-}\lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi\,.$$

Da $\hat{P}$ beschränkt ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} \hat{P}\,\Psi &= \text{s-}\lim\nolimits_{\nu\to\infty} \underbrace{\hat{P}\,\Psi_\nu}_{=\Psi_\nu} \\ &= \Psi \end{aligned}$$

und somit $\Psi \in \hat{P}\,\mathcal{H}$. Damit ist die Vollständigkeit von $\hat{P}\,\mathcal{H}$ gezeigt.

Umgekehrt, falls (8.27) für einen geeigneten Hilbertschen Teilraum $\mathcal{T} \subset \mathcal{H}$ gilt, dann folgt mit Lemma 8.1.4 daraus[28] $\mathcal{T} = \hat{P}\,\mathcal{H}$ und (8.28). Aus letzterem folgt aber $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$. ∎

Anmerkungen:

1. Nach Folgerung 8.3.14 existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen Projektoren $\hat{P}$ und Hilbertschen Teilräumen $\mathcal{T}$ von $\mathcal{H}$. Dementsprechend bezeichnet man mit $\hat{P}_{\mathcal{T}}$ jeweils den Projektor mit $\hat{P}\,\mathcal{H} = \mathcal{T}$. Im Falle $\mathcal{T} = \{\lambda\,\Psi : \lambda \in C\}$ schreibt man dafür — wie für endlichdimensionales $\mathcal{H}$ bereits eingeführt — auch kürzer $\hat{P}_\Psi$.
2. Aus (8.27) folgt für alle Projektoren $\hat{P}$:
$$\left\|\hat{P}\right\| = \begin{cases} 0 & \text{falls } \hat{P} = 0\,, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$
3. Für separable Hilbert-Räume läßt sich Lemma 8.1.4 auch ohne Berufung auf das Zornsche Lemma beweisen:

   Sei $\{\Phi'_\iota\}_{\iota\in I}$ ein ONS von $\mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ separabel (und O.B.d.A. unendlichdimensional) ist, können wir ein MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ wählen und
$$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\Phi'_\iota : \iota \in I\}\,,$$
   sowie iterativ
$$S_{\mu+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S_\mu & \text{falls } \Phi_{\mu+1} \in \overline{\mathcal{L}(S_\mu)}\,, \\ S_\mu \cup \left\{ \frac{\Phi_{\mu+1} - \hat{P}_{\overline{\mathcal{L}(S_\mu)}}\,\Phi_{\mu+1}}{\left\|\Phi_{\mu+1} - \hat{P}_{\overline{\mathcal{L}(S_\mu)}}\,\Phi_{\mu+1}\right\|} \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$
   für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ definieren. Gemäß Lemma 8.1.8 ist dann $\cup_{\mu=0}^\infty S_\mu$ ein MONS des gewünschten Typs. ∎

[28]Man ergänze $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I'}$ zu einem MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ von $\mathcal{H}$ (falls $\mathcal{T} \neq \mathcal{H}$).

8.3.2 Kompakte Operatoren

Definition 8.3.15 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\hat{A} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$. Dann heißt $\hat{A}$ **kompakt** (=**vollstetig**), falls zu jeder beschränkten Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine (stark) konvergente Teilfolge*[29] *von $\left\{\hat{A}\,\Psi_\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ existiert.*

Anmerkung: Wenn $\mathcal{H}$ endlichdimensional ist, dann sind alle $\hat{A} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ kompakt.

Lemma 8.3.16 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein kompakter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $\hat{A}$ beschränkt.*

Beweis: Wäre $\hat{A}$ unbeschränkt, gäbe es eine Folge $\{\Psi'_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit

$$\|\Psi'_\nu\| = 1\,, \quad \left\|\hat{A}\,\Psi'_\nu\right\| > \nu \qquad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,,$$

also eine beschränkte Folge, deren Bildfolge keine konvergente Teilfolge besitzt. ∎

Lemma 8.3.17 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein kompakter* HERMITE*scher Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist mindestens $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von $\hat{A}$.*

Beweisskizze: Wir betrachten nur den nichttrivialen Fall $\hat{A} \neq 0$:
Wir wählen eine Folge $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\|\hat{A}\,\psi_\nu\right\| = \left\|\hat{A}\right\| \neq 0\,, \quad \|\psi_\nu\| = 1 \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Aufgrund der Kompaktheit von $\hat{A}$ existiert dann eine Teilfolge $\{\psi'_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, für die

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\hat{A}\,\psi'_\nu$$

konvergiert. Dabei gilt natürlich

$$\|\phi\| = \left\|\hat{A}\right\|\,. \tag{8.29}$$

Version vom 26. März 2009

[29] Man bezeichnet $\{\Psi'_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ als eine ***Teilfolge*** von $\left\{\hat{A}\,\Psi_\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, wenn eine streng monoton wachsende Abbildung j von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ existiert mit

$$\Psi'_\nu = \hat{A}\,\Psi_{j(\nu)} \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Aus

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}\right\|^2 &\geq \left\|\hat{A}\,\frac{\hat{A}\phi}{\left\|\hat{A}\phi\right\|}\right\| \|\phi\| \\
&\underset{\text{Schwarz}}{\geq} \left\langle \hat{A}\,\frac{\hat{A}\phi}{\left\|\hat{A}\phi\right\|} \,\middle|\, \phi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\hat{A}\phi}{\left\|\hat{A}\phi\right\|} \,\middle|\, \hat{A}\phi \right\rangle \\
&= \left\|\hat{A}\,\phi\right\| \\
&= \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H} \\ \|\Psi\|=1}} \left|\left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{A}\phi \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H} \\ \|\Psi\|=1}} \left|\left\langle \hat{A}\,\Psi \,\middle|\, \phi \right\rangle\right| \\
&\geq \lim_{\nu\to\infty} \left\langle \hat{A}\,\psi'_\nu \,\middle|\, \phi \right\rangle \\
&= \langle \phi \mid \phi \rangle \\
&\underset{(8.29)}{=} \left\|\hat{A}\right\|^2
\end{aligned}$$

folgt

$$\left\langle \hat{A}\,\frac{\hat{A}\phi}{\left\|\hat{A}\phi\right\|} \,\middle|\, \phi \right\rangle = \left\|\hat{A}\,\frac{\hat{A}\phi}{\left\|\hat{A}\phi\right\|}\right\| \|\phi\| = \|\phi\|^2$$

sowie

$$\left\|\hat{A}\,\phi\right\| = \left\|\hat{A}\right\|^2$$

und somit

$$\hat{A}^2\,\phi = \left\|\hat{A}\right\|^2 \phi\,.$$

Da letzteres äquivalent ist zu

$$\hat{A}\left(\hat{A}\,\phi + \left\|\hat{A}\right\|\phi\right) = \left\|\hat{A}\right\|\left(\hat{A}\,\phi + \left\|\hat{A}\right\|\phi\right)\,,$$

ist also entweder $\hat{A}\,\phi$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert $-\left\|\hat{A}\right\|$, oder $\hat{A}\,\phi + \left\|\hat{A}\right\|\phi$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert $+\left\|\hat{A}\right\|$. ∎

Folgerung 8.3.18 (HILBERT-SCHMIDT-**Theorem**) *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum und $\hat{A}$ ein kompakter* HERMITE*scher Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

1. *Es existiert ein MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ von $\mathcal{H}$ mit*

$$\hat{A}\,\Phi_\iota \propto \Phi_\iota \quad \forall\,\iota \in I\,.$$

2. *Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\dim \mathcal{L}\Big(\Big\{\Psi \in \mathcal{H}:\ \hat{A}\,\Psi = a\,\Psi \text{ für geeignetes } a \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| > 1/\nu\Big\}\Big) < \infty\,.$$

Beweisskizze: Wir bezeichnen mit $\sigma(\hat{A})$ die Menge aller Eigenwerte von $\hat{A}$. Gemäß Lemma 8.1.4 existiert dann zu jedem Eigenwert $a \in \sigma(\hat{A})$ ein MONS $\left\{\Phi_\nu^{(a)}\right\}_{\nu\in I_a}$ von

$$T_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Psi \in \mathcal{H}:\ \hat{A}\,\Psi = a\Psi\right\}.$$

Die Einschränkung von $\hat{A}$ auf den HILBERTschen Teilraum$\mathcal{H} \ominus \left(\bigcup_{0\neq a\in\sigma(\hat{A})} T_a\right)$ ist ein kompakter HERMITEscher Operator, der jedoch keinen von Null verschiedenen Eigenwert hat und deshalb nach Lemma 8.3.17 mit dem Nulloperator übereinstimmen muß:

$$\Big(\Psi \perp T_a \quad \forall\,a \in \sigma(\hat{A}) \setminus \{0\}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \hat{A}\,\Psi = 0\,. \tag{8.30}$$

Gemäß Lemma 8.3.2 ist $\bigcup_{0\neq a\in\sigma(\hat{A})} \left\{\Phi_\nu^{(a)} : \nu \in I_a\right\}$ ein ONS von $\mathcal{H}$, läßt sich also gemäß Lemma 8.1.4 zu einem MONS von $\mathcal{H}$ erweitern. Gemäß (8.30) müssen aber alle Zusatzelemente Eigenvektoren von $\hat{A}$ zum Eigenwert 0 sein. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Die zweite folgt fast unmittelbar aus der Definition der Kompaktheit. ∎

Anmerkungen:

1. Zu jedem kompakten HERMITEschen Operator $\hat{A}$ auf einem unendlichdimensionalen HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ existieren also ein ein MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ und eine Folge $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit:

$$\hat{A}\,\Psi = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu \,\langle\Phi_\nu \mid \Psi\rangle\, \Phi_\nu \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}\,, \quad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0\,.$$

2. Umgekehrt sieht man leicht,[30] daß jeder Operator mit solchen Eigenwerten und Eigenvektoren kompakt und HERMITEsch ist.

[30] Siehe auch Aufgabe E68b).

3. Mithilfe der Zerlegung
$$\hat{A} = \hat{A}_+ + i\,\hat{A}_- \,,$$
wobei
$$\hat{A}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{A} + \hat{A}^\dagger}{2}\,, \quad \hat{A}_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{A} - \hat{A}^\dagger}{2\,i}\,,$$
sieht man leicht, daß die Behauptungen von Folgerung 8.3.18 für alle normalen kompakten Operatoren $\hat{A}$ gelten.[31]

Definition 8.3.19 *Sei $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* Hilbert*-Raum. Die Menge $\mathcal{T}_1(\mathcal{L})$ aller **Spurklasse**-Operatoren auf $\mathcal{H}$ ist dann die Menge aller kompakten* Hermite*schen Operatoren $\hat{A}$ auf $\mathcal{H}$, für die*
$$\operatorname{Spur}\left(\hat{A} \pm \hat{A}^\dagger\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda \dim\left\{\Psi \in \mathcal{H} : \left(\hat{A} \pm \hat{A}^\dagger\right)\Psi = \lambda\,\Psi\right\}$$
*absolut konvergiert. Dafür definiert man die **Spur***[32]
$$\operatorname{Spur}\left(\hat{A}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(\hat{A} \pm \hat{A}^\dagger\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(\hat{A} \pm \hat{A}^\dagger\right) \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{T}_1(\mathcal{L})\,.$$
*Unter einem **statistischen Operator** (**Dichteoperator**) versteht man einen Operator $\hat{T} \in \mathcal{T}_1(\mathcal{L})$ mit $\operatorname{Spur}\left(\hat{T}\right) = 1$, der keinen negativen Eigenwert besitzt.*

Anmerkung: Z.B. ist
$$\hat{T}_U^{\text{mik}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\rho}_U^{\text{mik}} \Big/ \underbrace{\operatorname{Spur}(\rho_U^{\text{mik}})}_{\text{„Zustandssumme“}}\,,$$
wobei
$$\rho_U^{\text{mik}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}\\ E_\nu \le U}} |\Psi_{E_\nu}\rangle\langle\Psi_{E_\nu}|\,,$$
der statistische Operator der sog. ***mikrokanonischen Gesamtheit*** zur inneren Energie U, wenn $\{\Psi_{E_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein (i.a. nicht eindeutiges) MONS von Eigenvektoren der Energie-Observablen $\hat{H}$ ist, wobei Ψ_{E_ν} jeweils zum Eigenwert E_ν gehört:
$$\hat{H}\,\Psi_{E_\nu} = E_\nu\,\Psi_{E_\nu} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[31] Für normales $\hat{A}$ sind nämlich $\hat{A}_+, \hat{A}_-$ vertauschbare Hermitesche Operatoren.
[32] Man beachte die Konsistenz mit Definition 7.4.3.

Lemma 8.3.20 *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler* Hilbert-*Raum,* $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *und* $\hat{T} \in \mathcal{T}_1(\mathcal{L})$ *. Dann gilt* $\hat{T}\,\hat{B}\,,\ \hat{B}\,\hat{T} \in \mathcal{T}_1(\mathcal{L})$ *und*

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{T}\hat{B}\right) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left\langle \Phi_\nu \mid \hat{T}\hat{B}\,\Phi_\nu \right\rangle \quad \textit{für jedes MONS } \{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \textit{ von } \mathcal{H}\,.$$

sowie

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{T}\hat{B}\right) = \operatorname{Spur}\left(\hat{B}\,\hat{T}\right)\,.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 3.1.3 von (Lücke, fuan). ∎

Lemma 8.3.21 *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler* Hilbert-*Raum und* $\hat{T}_1\,,\hat{T}_2 \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ *. Dann gilt*

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{T}_1\,\hat{B}\right) = \operatorname{Spur}\left(\hat{T}_2\,\hat{B}\right) \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{T}_1 = \hat{T}_2\,.$$

Beweisskizze: Sei $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathcal{H}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Spur}\left(\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)\hat{B}\right) = 0 \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
\Longrightarrow \quad & \operatorname{Spur}\left(\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)^\dagger\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)\right) = 0 \\
\underset{\text{Lemma 8.3.20}}{\Longrightarrow} \quad & \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)^\dagger\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)\Phi_\nu \right\rangle}_{=\left\|\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)\Phi_\nu\right\|^2} = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right)\Phi_\nu = 0 \quad \forall\,\nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. ∎

Folgerung 8.3.22 *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler* Hilbert-*Raum und $\hat{T}$ ein statistischer Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt für normiertes $\Psi \in \mathcal{H}$:*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Spur}\left(\hat{T}\hat{B}\right) = \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
\Longleftrightarrow \quad & \hat{T} = \hat{P}_\Psi\,.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Beweisskizze: Gemäß Lemma 8.1.4 können wir $\Psi_1 = \Psi$ zu einem MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ ergänzen. Gemäß Lemma 8.3.20 gilt dafür

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{T}\,\hat{B}\right) = \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{T}\,\hat{B}\,\Psi \right\rangle + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{T}\,\hat{B}\,\Phi_\nu \right\rangle \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,,$$

wegen

$$\Phi_n u \perp \Psi \quad \forall \nu > 1$$

also

$$\hat{T} = \hat{P}_\psi \quad \Longrightarrow \quad \text{Spur}\left(\hat{T}\,\hat{B}\right) = \left\langle \Psi \middle| \hat{T}\,\hat{B}\,\Psi \right\rangle \quad \forall\,\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\ .$$

Mit Lemma 8.3.21 folgt daraus die Behauptung. ∎

Gemäß den Regeln der Quantenmechanik gilt:

- Der ***Zustandsraum*** eines quantenmechanischen Systems ist stets ein HILBERT-Raum $\mathcal{H}$.
- Der Zustand eines quantenmechanischen Systems ist stets durch einen statistischen Operator $\hat{T}$ auf seinem Zustandsraum gegeben.
- Jeder möglichen Eigenschaft E eines quantenmechanischen Systems entspricht genau ein Projektionsoperator $\hat{P}_E$ seines Zustandsraumes.
- Die Wahrscheinlichkeit für den positiven Ausgang eines optimalen Tests[33] der Eigenschaft E eines quantenmechanischen Systems im $\hat{T}$ entsprechenden Zustand ist[34]
$$\omega_{\hat{T}}(\hat{P}_E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spur}\left(\hat{T}\hat{P}_E\right)\ .$$

Alle grundsätzlichen Strukturen der Quantenmechanik lassen sich daraus ableiten.

Anmerkungen:

1. Gemäß dem HILBERT-SCHMIDT-Theorem existieren zu jedem statistischen Operator $\hat{T}$ ein MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ und eine Zahlenfolge $\{p_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit
$$\hat{T} = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \,|\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\nu|\ , \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{p_\nu}_{\geq 0} = 1\,,$$
und somit
$$\omega_{\hat{T}}(\hat{P}_E) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \left\langle \Phi_\nu \middle| \hat{P}_E\,\Phi_\nu \right\rangle\ .$$
2. Eine einfache — in der Regel aber unangemessene — Beschreibung der durch $\hat{T}$ entsprechenden Situation ist folgende:
   (a) ‘Tatsächlich’ liegt ein reiner Zustand $\hat{=}\ \Psi \in \{\Phi_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ vor.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit für $\Psi \propto \Phi_\nu$ ist jeweils p_ν.

Version vom 26. März 2009

[33] Man beachte jedoch, daß die gefundene Eigenschaft u.U. erst das Resultat des Tests ist, was in der klassischen Physik nicht beachtet wird.

[34] In diesem Zusammenhang sei an Folgerung 7.4.5, insbesondere Gleichung (7.53), erinnert.

3. Für normierte $\Psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\omega_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}\left(\hat{P}_E\right) &= \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{P}_E \, \Psi \right\rangle \\
&= \left| \underbrace{\left\langle \Psi \,\middle|\, \frac{\hat{P}\,\Psi}{\left\|\hat{P}\,\Psi\right\|} \right\rangle}_{\text{„Wahrscheinlichkeitsamplitude“}} \right|^2 \\
&= \begin{cases} \text{Wahrscheinlichkeit für } \Psi \to \hat{P}\,\Psi \Big/ \left\|\hat{P}\,\Psi\right\| \\ \text{bei optimaler Überprüfung von } E\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Für nicht notwendig normierte $\psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\omega_{\hat{P}_\Psi}\left(\hat{P}_E\right) &= \left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \,\middle|\, \hat{P}_E \, \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \right\rangle \\
&= \frac{\left\|\hat{P}_E\,\Psi\right\|^2}{\|\Psi\|^2}\,.
\end{aligned}$$

Satz 8.3.23 (Gleason) *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler* HILBERT*-Raum der Dimension > 2 und ω eine Abbildung von der Menge aller Projektoren $\hat{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ mit folgender Eigenschaft:*

> *Für jede Folge von Projektionsoperatoren $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \ldots \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt*

$$\hat{P}_\nu \hat{P}_\mu = 0 \text{ für } \nu \neq \mu \quad \Longrightarrow \quad \omega\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{P}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega\left(\hat{P}_\nu\right)\,.$$

Dann existiert ein statistischer Operator $\hat{T}$ auf $\mathcal{H}$ mit $\omega = \omega_{\hat{T}}$.

Beweis: Siehe z.B. (Gleason, 1957), (Cooke et al., 1985), oder (Fuchs, 2002, pp. 17/18). ∎

8.3.3 Unbeschränkte Operatoren

Satz 8.3.24 (Spektralsatz) *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann ist $\hat{A}$ genau dann selbstadjungiert, wenn dafür eine **Spektralschar** existiert, d.h. eine Schar $\left\{\hat{E}^{\hat{A}}_\lambda\right\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von Projektionsoperatoren mit folgenden Eigenschaften:*[35]

1.
$$\left(\lambda_1 \le \lambda_2 \implies \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_1} \Psi \right\rangle \le \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_2} \Psi \right\rangle\right) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2.
$$\lim_{\lambda \to -\infty} \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda} \Psi \right\rangle = 0 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

3.
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda} \Psi \right\rangle = \langle \Psi \mid \Psi \rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

4.
$$\lim_{\epsilon \to +0} \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda+\epsilon} \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda} \Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

5.
$$D_{\hat{A}} = \left\{ \Psi \in \mathcal{H} : \int |\lambda|^2 \, \mathrm{d}\left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda} \Psi \right\rangle < \infty \right\}\,.$$

6.
$$\left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{A}\, \Psi \right\rangle = \int \lambda \, \mathrm{d}\left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda} \Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,.$$

Wenn $\hat{A}$ selbstadjungiert ist, dann ist die zugehörige Spektralschar $\left\{\hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda}\right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ eindeutig.[36]

Beweis: Siehe z.B. Sätze 3.1.2 und 3.2.7 von (Lücke, fuan). ∎

Anmerkung: In der Quantenmechanik interpretiert man — im Sinne der vor Satz 8.3.23 angegebenen Regeln — selbstadjungierte Operatoren $\hat{A}$ folgendermaßen als ***Observable*** physikalischer Größen A :

$$E \mathrel{\widehat{=}} \text{„Wert von } A \in (\lambda_1, \lambda_2]\text{“} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{P}_E = \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_2} - \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_1}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[35]Wenn g eine monotone und f eine stetige (komplexwertige) Funktion über $\mathbb{R}$ ist, dann ist für beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$\int_{(\lambda_1,\lambda_2]} f(\lambda)\, \mathrm{d}g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=2}^{n+1} f\left(\lambda_1 + \nu\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{n}\right)\left(g\left(\lambda_1 + \nu\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{n}\right) - g\left(\lambda_1 + (\nu-1)\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{n}\right)\right)$$

(Riemann-Stieltjes-***Integral***).

[36]Das (i.a. nicht diskrete) Komplement der Vereinigung aller offenen Intervalle, über denen $\hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda}$ (als Funktion von λ) konstant ist, bezeichnet man als das ***Spektrum*** von $\hat{A}$.

Dementsprechend gilt <u>für $\Psi \in D_{\hat{A}}$:</u>

$$\left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \middle| \hat{A}\, \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \right\rangle = \begin{cases} \text{Erwartungswert für } A \text{ in dem} \\ \text{dem statistischen Operator } \hat{P}_\Psi \\ \text{entsprechenden Zustand.} \end{cases}$$

Daß dieser Ausdruck i.a. nicht für alle $\Psi \in \mathcal{H}$ existiert, ist physikalisch verständlich.

Folgerung 8.3.25 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum, $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$ und $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dann ist der durch*

$$D_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi \in \mathcal{H} : \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left| a_\nu \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle \right|^2 < \infty \right\}$$

und

$$\hat{A}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\nu \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}$$

gegebene Operator selbstadjungiert und seine Spektralschar ist

$$\left\{ \hat{E}^{\hat{A}}_\lambda = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N} \\ a_\nu \le \lambda}} \hat{P}_{\Phi_\nu} \right\}_{\lambda\in\mathbb{R}} .$$

Definition 8.3.26 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann nennt man $\hat{A}$ sei* ***im wesentlichen selbstadjungiert****, wenn genau eine selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{A}$ existiert.*

Anmerkung: In der Quantenmechanik werden die Observablen üblicherweise mithilfe HERMITEscher Operatoren identifiziert, die nur im wesentlichen selbstadjungiert sind.

Folgerung 8.3.27 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT*-Raum und $\hat{A}$ ein beschränkter linearer Operatoren in $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann existiert genau ein $\overline{\hat{A}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, das eine Erweiterung von $\hat{A}$ ist.*

Beweisskizze: Da $\hat{A}$ beschränkt ist, existiert gemäß den Definitionen 8.3.3 und 8.1.11 ein $C > 0$ mit

$$\|\Psi\| = 1 \implies \left\| \hat{A}\,\Psi \right\| \le C \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}} .$$

Aufgrund der Linearität von $\hat{A}$ folgt daraus

$$\left\|\hat{A}\,\Psi\right\| \leq C\,\|\Psi\| \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}}\,.$$

Seien nun $\Psi \in \mathcal{H}$ beliebig vorgegeben. Da $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, existiert dazu eine Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset D_{\hat{A}}$ mit

$$\Psi = \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu\,.$$

Die Definition

$$\overline{\hat{A}}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \hat{A}\,\Psi_\nu$$

ist aber offensichtlich von der Wahl der Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ unabhängig und liefert somit den gesuchten Operator $\overline{\hat{A}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dessen Eindeutigkeit offensichtlich ist. ∎

Satz 8.3.28 *Seien $\mathcal{H}$ ein* Hilbert*-Raum und $\hat{A}$ ein symmetrischer Operator $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$, also ein* Hermite*scher Operator, dessen Definitionsbereich in $\mathcal{H}$ dicht liegt. Dann besitzt $\hat{A}$ genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn seine* ***Defektindizes***

$$n_\pm(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim\left(\left\{\Psi \in D_{\hat{A}^\dagger} : \hat{A}^\dagger\,\Psi = \pm i\,\Psi\right\}\right)$$

übereinstimmen (also $n_-(\hat{A}) = n_+(\hat{A})$). $\hat{A}$ ist genau dann im wesentlichen selbstadjungiert, wenn $n_-(\hat{A}) = n_+(\hat{A}) = 0$ gilt.

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.2). ∎

Definition 8.3.29 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* Hilbert*-Raum und $\hat{A}, \hat{B}$ selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann nennt man $\hat{A}$ und $\hat{B}$ (miteinander)* ***vertauschbar****, falls ihre Spektraloperatoren im naiven Sinne vertauschbar sind; d.h. falls*

$$\hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_1}\,\hat{E}^{\hat{B}}_{\lambda_2} = \hat{E}^{\hat{B}}_{\lambda_2}\,\hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_1} \quad \forall\,\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

gilt.

Anmerkung: In der Quantenmechanik nennt man vertauschbare Observable auch ***kommensurabel***, da sie physikalischen Größen entsprechen, die gemeinsam „meßbar“ sind.[37]

[37]Vgl. Aufgabe E65.

Definition 8.3.30 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* Hilbert-*Raum, $\hat{A}$ ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ und f eine stetige (komplexwertige) Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist die entsprechende Funktion von $\hat{A}$ durch*

$$D_{f(\hat{A})} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2 \, \mathrm{d} \left\langle \Psi \mid \hat{E}^{\hat{A}}_\lambda \, \Psi \right\rangle < \infty \right\}$$

und

$$\left\langle \Psi \mid f(\hat{A}) \, \Psi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int f(\lambda) \, \mathrm{d} \left\langle \Psi \mid \hat{E}^{\hat{A}}_\lambda \, \Psi \right\rangle \quad \forall \, \Psi \in D_{f(\hat{A})}$$

gegeben.

Lemma 8.3.31 *Unter den Voraussetzungen von Definition 8.3.30 gelten folgende Aussagen:*

$$\begin{aligned} f(\lambda) \in \mathbb{R} \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} \quad &\Longrightarrow \quad f(\hat{A}) \text{ selbstadjungiert}\,, \\ f \text{ beschränkt} \quad &\Longrightarrow \quad f(\hat{A}) \text{ beschränkt}\,, \\ |f(\lambda)| = 1 \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} \quad &\Longrightarrow \quad f(\hat{A}) \text{ unitär}\,. \end{aligned}$$

Beweisskizze zur 1. Behauptung: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine höchstens abzählbare Menge $\mathcal{Z}_\lambda$ paarweise disjunkter, links offener, rechts abgeschlossener Intervalle mit

$$f^{-1}\Big((-\infty, \lambda) \Big) = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{Z}_\lambda} \mathcal{I} \,.$$

Damit ergibt sich der entsprechende Spektraloperator von $f(\hat{A})$ gemäß

$$\hat{E}^{f(\hat{A})}_\lambda \, \Psi = \text{s-}\lim_{\epsilon \to +0} \sum_{(\lambda_1, \lambda_2] \in \mathcal{Z}_{\lambda+\epsilon}} \left(\hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_2} - \hat{E}^{\hat{A}}_{\lambda_1} \right) \Psi \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} \,, \, \Psi \in \mathcal{H} \,. \qquad \blacksquare$$

Anmerkungen:

1. In der Quantenmechanik abgeschlossener Systeme ist die Zeitentwicklung (im Schrödinger-***Bild***) stets mithilfe eines selbstadjungierten Hamilton-***Operator***s $\hat{H}$, der Observablen der Energie, durch
$$\hat{T}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \, t} \, \hat{T}(0) \, e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{H} \, t}$$
gegeben, wobei $\hat{T}(t)$ jeweils den statistischen Operator zum Zeitpunkt t beschreibt.[38] Das entspricht formal der sog. Liouville-***Gleichung***
$$i\hbar \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{T}(t) = [\hat{H} \,, \hat{T}(t)]_- \quad \forall \, t \in \mathbb{R} \,.$$

[38] Ein eventueller Meßeingriff würde die Abgeschlossenheit natürlich stören.

Insbesondere für Vektorzustände gilt also

$$\hat{T}(0) = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| \quad \Longrightarrow \quad \hat{T}(t) = |\Psi_t\rangle\langle\Psi_t| \;,$$

wobei

$$\Psi_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\,\Psi_0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

der ***zeitabhängigen*** SCHRÖDINGER-***Gleichung***

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi_t = \hat{H}\,\Psi_t$$

genügt, die — ohne distributionstheoretische Interpretation[39] — allerdings bestenfalls für $\Psi_0 \in D_{\hat{H}}$ Sinn macht.

2. Wenn man ein solches System (mit geeigneten Randbedingungen) auf ein endliches Volumen V beschränkt, dann gehört der Operator

$$\hat{\rho}^{\text{kan}}_{T,V} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{\hat{H}}{kT}}$$

(k =BOLTZMANN-Konstante, T =absolute Temperatur) i.d. Regel zu Spurklasse und damit ist der statistische Operator

$$\hat{T}^{\text{kan}}_{T,V} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{\hat{H}}{kT}} \Big/ \operatorname{Spur}\left(e^{-\frac{\hat{H}}{kT}}\right)$$

der sog. ***kanonischen Gesamtheit***[40] wohldefiniert. Der damit gegebenen Zustand entspricht — makroskopisch betrachtet — dem thermodynamischen Gleichgewicht des Systems bei der absoluten Temperatur T. Die ***freie Energie*** in diesem Zustand ist

$$F^{\text{kan}}(T,V) \stackrel{\text{def}}{=} -kT\,\ln Z^{\text{kan}}(T,V)\,,$$

wobei

$$Z^{\text{kan}}(T,V) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spur}\left(e^{-\frac{\hat{H}}{kT}}\right)$$

die sog. ***kanonische Zustandssumme*** bezeichnet. Die zugehörige ***Entropie*** ist

$$\begin{aligned} S^{\text{kan}}(T,V) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial T}F^{\text{kan}}(T,V) \\ &= -k\,\operatorname{Spur}\left(\hat{T}^{\text{kan}}_{T,V}\,\ln \hat{T}^{\text{kan}}_{T,V}\right)\,. \end{aligned}$$

[39] Siehe dazu Abschnitt 9.1.1.

[40] Siehe z.B. (Lücke, tdst, Abschn. 3.2).

stimmt also in diesem Falle[41] bis auf den Faktor $k\ \ln(2)$ mit der sog. VON NEUMANN-***Entropie***

$$S_1(\hat{T}^{\mathrm{kan}}_{T,V}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{Spur}\Big(\hat{T}^{\mathrm{kan}}_{T,V} \log_2\left(\hat{T}^{\mathrm{kan}}_{T,V}\right)\Big)$$

überein, die ihrerseits für

$$\hat{T}^{\mathrm{kan}}_{T,V} = \sum_{\nu=1} p_\nu \, \Phi_\nu \;, \quad \{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ MONS von } \mathcal{H} \,,$$

mit der sog. SHANNON-***Entropie***

$$H\big(\{p_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \, \log_2(p_\nu)$$

der klassischen Informationstheorie[42] übereinstimmt.

Lemma 8.3.32 *Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer)* HILBERT-*Raum, $\hat{A}$ selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ und f,g stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann gilt*[43]

$$\begin{aligned} f(\hat{A}) + g(\hat{A}) &\subset (f+g)(\hat{A})\,, \\ f(\hat{A})\, g(\hat{A}) &\subset (f\,g)(\hat{A})\,, \end{aligned}$$

und[44]

$$f\Big(g(\hat{A})\Big) \subset (f\circ g)(\hat{A})\,.$$

Beweis: Übungsvorschlag. ∎

[41]Man beachte aber, daß die thermodynamische Entropie — im Gegensatz zur VON NEUMANN-Entropie — für abgeschlossene Systeme wachsen, kann solange das thermodynamische Gleichgewicht noch nicht erreicht ist! Siehe dazu z.B. (Adami, 2004, Sect. 1.4).

[42]Siehe (Shannon, 1949b).

[43]Wenn $\hat{B}$ eine Erweiterung von $\hat{A}$ ist, wird das üblicherweise durch $\hat{A} \subset \hat{B}$ mitgeteilt. Mit $f\circ g$ bezeichnet man üblicherweise die ***Komposition*** der Funktionen g und f:

$$(f\circ g)(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f\big(g(\lambda)\big) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

[44]Die linke Seite ist bisher, streng genommen, allerdings nur für reell-wertiges g erklärt.

8.3.4 Symmetrien

Eine konkrete Quantentheorie mit dem Zustandsraum $\mathcal{H}$ verlangt eine Zuordnung der Observablen $\hat{A}$ zu den physikalischen Größen, für die man sich interessiert. Erst dadurch bekommt ein Zustandsvektor — im Sinne der vor Satz 8.3.23 angegebenen Regeln — seine physikalische Bedeutung. Dabei spielt es aber aus rein physikalischer Sicht keine Rolle, welche der beiden in Tabelle 8.1 angegebenen Zuordnungen man wählt, wenn $\hat{U}$ ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$ ist.

	Zuordnung 1	Zuordnung 2
Zustandsvektor	Ψ	$\hat{U}\,\Psi$
Observable von A	$\hat{A}$	$\hat{U}\,\hat{A}\,\hat{U}^{-1}$

Tabelle 8.1: Wirkung eines unitären Symmetrieoperators $\hat{U}$

In diesem Sinne entspricht jedem unitären Operator auf $\mathcal{H}$ eine Symmetrieoperation (Wigner-***Symmetrie***). Das wird z.B. bei dem in Tabelle 8.2 beschriebenen Wechsel zwischen Schrödinger- und Heisenberg-Bild ausgenutzt. Dabei ist jedem Zeitpunkt t ein Symmetrieoperator $\hat{U}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}$ zugeordnet. Die gesamte Schar bildet offensichtlich eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren,[45] obwohl $\hat{H}$ i.a. unbeschränkt ist.

Anmerkung: Aus

$$\begin{aligned}\left\|\hat{U}(t')\,\Psi - \hat{U}(t)\,\Psi\right\|^2 &= \left\langle \hat{U}(t')\,\Psi \mid \hat{U}(t')\,\Psi\right\rangle + \left\langle \hat{U}(t)\,\Psi \mid \hat{U}(t)\,\Psi\right\rangle \\ &\quad - \left\langle \hat{U}(t')\,\Psi \mid \hat{U}(t)\,\Psi\right\rangle - \left\langle \hat{U}(t)\,\Psi \mid \hat{U}(t')\,\Psi\right\rangle \\ &= 2\,\|\Psi\|^2 - 2\,\Re\langle\Psi \mid \underbrace{\hat{U}(t')^{-1}}_{\hat{U}(-t')}\hat{U}(t)\,\Psi\rangle\end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

[45]Siehe Definition 7.3.23.

	Schrödinger-Bild	Heisenberg-Bild
Zustandsvektor	$\Psi(t)$	$\Psi(0) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\,\Psi(t)$
Observable von A	$\hat{A}(0)$	$\hat{A}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\,\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}$

Tabelle 8.2: Schrödinger- und Heisenberg-Bild zum Zeitpunkt t

erkennt man leicht, daß die in Definition 7.3.23 geforderte schwache Stetigkeit (Bedingung 3) starke Stetigkeit impliziert:

$$\text{s-}\lim_{t'\to t} \hat{U}(t')\,\Psi = \hat{U}(t)\,\Psi \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Satz 8.3.33 (Satz von Stone) *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Dann ist eine Familie $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{|t\in\mathbb{R}}$ von Operatoren auf $\mathcal{H}$ genau dann eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren auf $\mathcal{H}$, wenn sie einen selbstadjungierten* ***Generator*** *besitzt, d.h. einen selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ mit*

$$\hat{U}(t) = e^{i\,\hat{A}\,t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{8.32}$$

Falls ein solcher Generator existiert, ist er durch

$$D_{\hat{A}} = \left\{\Psi \in \mathcal{H} :\ \hat{U}(t)\,\Psi\ \textit{(stark) differenzierbar}\right\} \tag{8.33}$$

und

$$\hat{A}\,\Psi = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t)\,\Psi\right)_{|t=0} \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}} \tag{8.34}$$

gegeben.

Beweis: Siehe z.B. (Reed und Simon, 1972, Theorem VIII,8). ∎

8.4 Multilineare Funktionale

8.4.1 Beschränkte lineare Funktionale

Lemma 8.4.1 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Dann ist auch $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ ein Hilbert-Raum,*[46] *denn für jede Konjugation*[47] *K auf $\mathcal{H}$ definiert*

$$\hat{U}(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle K(\Psi)| \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}$$

eine lineare Abbildung $\hat{U}$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ mit

$$\left\|\hat{U}(\Psi)\right\| = \|\Psi\| \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Als Menge stimmt $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ mit der Gesamtheit aller beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{H}$ überein.

Version vom 26. März 2009

[46] Der Euklidische Vektorraum $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ wurde direkt im Anschluß an Lemma 7.4.9 eingeführt.

[47] Der Begriff der „Konjugation“ wurde in Definition 7.4.7 eingeführt.

Beweis: Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Lemma 7.4.8 und dem Satz von Riesz. ▮

Anmerkungen:

1. Den Hilbert-Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ nennt man auch den (topologischen) ***Dualraum*** von $\mathcal{H}$.
2. Die Elemente des Dualraums nennt man auch ***Kovektoren***.

Folgerung 8.4.2 *Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und L' ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. Dann existiert genau $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ mit $L' = |\Psi_0\rangle$, wobei*[48]

$$|\Psi_0\rangle \left(\langle\Psi|\right) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\Psi \mid \Psi_0\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{8.35}$$

Beweis: Nach Lemma 8.4.1 ist $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ ein Hilbert-Raum. Deshalb gilt auch für $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ der Satz von Riesz, d.h. es existiert ein $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ mit

$$L'(L_0) = \left\langle L_0 \,\middle|\, L \right\rangle \quad \forall\, L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})\,.$$

Da nach dem Satz von Riesz andererseits zu je zwei beschränkten linearen Funktionalen L, L_0 auf $\mathcal{H}$ eindeutige Vektoren $\Psi, \Psi_0 \in \mathcal{H}$ existieren mit[49]

$$L = \langle\Psi|\;, \quad L_0 = \langle\Psi_0|\;, \quad \left\langle L_0 \,\middle|\, L \right\rangle = \langle\Psi \mid \Psi_0\rangle\;,$$

folgt daraus die Behauptung. ▮

Lemma 8.4.3 *Seien $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbert-Raum und K eine Konjugation auf $\mathcal{H}$. Dann existiert ein MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ mit*[50]

$$K\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} z_\nu\, \Phi_\nu\right) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} z_\nu^*\, \Phi_\nu \quad \forall\, z \in \ell^2\,. \tag{8.36}$$

Beweis: Analog demjenigen von Lemma 7.4.9. ▮

[48] Gleichung (8.35) ist die direkte Verallgemeinerung von (7.61).

[49] Es sei daran erinnert, daß

$$\lambda_1 \langle\Psi_1| + \lambda_2 \langle\Psi_2| = \langle\lambda_1^* \Psi_1 + \lambda_2^* \Psi_2| \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,.$$

[50] Der Folgenraum ℓ^2 wurde in Lemma 8.1.17 eingeführt.

Definition 8.4.4 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und ω ein lineares Funktional auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Man nennt ω* ***positiv****, wenn*

$$\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \geq 0 \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

gilt. Man nennt ω ***normiert****, wenn $\omega(\hat{1}) = 1$ gilt. Unter einem* ***Zustand*** *versteht man normiertes, positives, lineares Funktional ω auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Einen Zustand ω nennt man* ***normal****, wenn ein statistischer Operator $\hat{T} \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ existiert mit*

$$\omega(\hat{A}) = \mathrm{Spur}(\hat{T}\hat{A}) \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Lemma 8.4.5 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und ω ein* **positives***, lineares Funktional auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $$\omega(\hat{A}^\dagger) = \left(\omega(\hat{A})\right)^* \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad (\textit{\textbf{Hermitezität}})\,.$$

(ii) $$\left|\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\right|^2 \leq \omega(\hat{A}^\dagger \hat{A})\, \omega(\hat{B}^\dagger \hat{B}) \quad \forall\, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
(SCHWARZ***sche Ungleichung***) .

(iii) $$\omega(\hat{A}) \leq \left\|\hat{A}\right\| \omega(\hat{1}) \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad (\rightsquigarrow \textbf{Beschränktheit})\,.$$

Beweisskizze zu (i): Aus

$$0 \leq \omega\big((\hat{1} + \hat{A}^\dagger)(\hat{1} + \hat{A})\big) = \underbrace{\omega(\hat{1})}_{\geq 0} + \underbrace{\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A})}_{\geq 0} + \underbrace{\omega(\hat{A}) + \omega(\hat{A}^\dagger)}_{\text{also reell}}$$

folgt

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad \Longrightarrow \quad \omega(\hat{A}) = \omega(\hat{A})^*$$

und daraus mit

$$\hat{A} = \underbrace{\frac{\hat{A} + \hat{A}^\dagger}{2}}_{\text{selbstadj.}} - i \underbrace{\left(i\, \frac{\hat{A} - \hat{A}^\dagger}{2}\right)}_{\text{selbstadj.}} \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}\,(\mathcal{H})$$

die Behauptung. ▮

Beweisskizze zu (ii): Im Falle $\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \neq 0$ läßt sich die Behauptung wie die gewöhnliche Schwarzsche Ungleichung beweisen:Mit den Definitionen

$$\hat{B}_\parallel \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})}{\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A})}\, \hat{A}\,, \quad \hat{B}_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B} - \hat{B}_\parallel$$

gilt

$$\omega(\hat{B}_\parallel^\dagger \hat{B}_\perp) = \omega(\hat{B}_\perp^\dagger \hat{B}_\parallel) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned}\omega(\hat{B}^\dagger \hat{B}) &= \omega(\hat{B}_\|^\dagger \hat{B}_\|) + \omega(\hat{B}_\perp^\dagger \hat{B}_\perp) \\ &\geq \omega(\hat{B}_\|^\dagger \hat{B}_\|) \\ &= \left|\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\right| / \omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \,.\end{aligned}$$

Aufgrund der HERMITEzität von ω folgt damit (ii) auch für $\omega(\hat{B}^\dagger \hat{B}) \neq 0$. Im Falle $\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) = \omega(\hat{B}^\dagger \hat{B}) = 0$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}0 &\leq \omega\Big((\hat{A} \pm \hat{B})^\dagger (\hat{A} \pm \hat{B})\Big) \\ &= \underbrace{\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) + \omega(\hat{B}^\dagger \hat{B})}_{=0} \pm \Big(\omega(\hat{B}^\dagger \hat{A}) + \omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\Big) \\ &\underset{\text{(i)}}{=} \pm 2\,\Re\Big(\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\Big)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}0 &\leq \omega\Big((\hat{A} \pm i\,\hat{B})^\dagger (\hat{A} \pm i\,\hat{B})\Big) \\ &= \underbrace{\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) + \omega(\hat{B}^\dagger \hat{B})}_{=0} \pm i\Big(\omega(\hat{B}^\dagger \hat{A}) - \omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\Big) \\ &\underset{\text{(i)}}{=} \pm 2\,\Im\Big(\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B})\Big)\end{aligned}$$

und somit $\omega(\hat{A}^\dagger \hat{B}) = 0$. ∎

Beweisskizze zu (iii): Wegen

$$\left\langle \Psi \,\middle|\, \left(\left\|\hat{A}\right\|\,\hat{1} - \hat{A}\right) \Psi \right\rangle \geq 0 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}$$

ist $\hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\hat{A}\right\|\,\hat{1} - \hat{A}$ selbstadjungiert[51] und für die zugehörige Spektralschar muß

$$\hat{E}_\lambda^{\hat{C}} = 0 \quad \forall\, \lambda < 0$$

gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq \omega\left(\sqrt[+]{\hat{C}}^{\,\dagger}\,\sqrt[+]{\hat{C}}\right) \\ &= \omega(\hat{C}) \\ &= \left\|\hat{A}\right\| \underbrace{\omega(\hat{1})}_{=1} - \omega(\hat{A}) \,.\end{aligned}$$ ∎

8.4.2 Beschränkte bilineare Funktionale

Definition 8.4.6 *Seien $\mathcal{H}$ ein EUKLIDischer Raum und B eine Bilinearform auf $\mathcal{H}$. Dann nennt man B* ***beschränkt****, falls*

$$T \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad B(T \times T) \text{ beschränkt}$$

für jede Teilmenge T von $\mathcal{H}$ gilt.

[51] Man beachte Aufgabe E57.2.

Lemma 8.4.7 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum, B eine beschränkte Bilinearform auf $\mathcal{H}$ und K eine Konjugation auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

1. *Es existiert genau ein $\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit*
$$B(\Psi_1, \Psi_2) = \left\langle K(\Psi_1) \mid \hat{B}\,\Psi_2 \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}\,.$$

2. *Genau dann, wenn $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ gilt, definiert*
$$Q(\Psi_1, \Psi_2) \stackrel{\text{def}}{=} B\Big(K(\Psi_1), \Psi_2\Big) \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$$
eine HERMITE*sche Semibilinearform*[52] *auf $\mathcal{H}$.*

Beweisskizze: Für jedes feste $\Psi_2 \in \mathcal{H}$ ist
$$\mathcal{H} \ni \Psi_1 \longmapsto B(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{C}$$
ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}$. Nach dem Satz von RIESZ existiert deshalb zu jedem $\Psi_2 \in \mathcal{H}$ genau ein $\Psi_2^B \in \mathcal{H}$ mit
$$\begin{aligned} B(\Psi_1, \Psi_2) &= \left\langle \Psi_2^B \mid \Psi_1 \right\rangle \\ &= \left\langle K(\Psi_1) \mid K(\Psi_2^B) \right\rangle \qquad \forall\, \Psi_1 \in \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$
Mit
$$\hat{B}\,\Psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} K(\Psi_2^B) \quad \forall\, \Psi_2 \in \mathcal{H}$$
und der Antilinearität der Abbildung $\Psi_2 \mapsto \Psi_2^B$ folgt daraus die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung ergibt sich mit Folgerung 8.3.11 aus
$$\begin{aligned} Q(\Psi_1, \Psi_2) &= \left\langle K\Big(K(\Psi_1)\Big) \,\Big|\, \hat{B}\,\Psi_2 \right\rangle \\ &\underset{(7.56)}{=} \left\langle \Psi_1 \mid \hat{B}\,\Psi_2 \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$
∎

Lemma 8.4.8 *Seien $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Dann ist durch*
$$\|B'\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\nu,\mu\in\mathbb{N}} \left| B'\Big(\langle\Phi_\nu|\,,\langle\Phi_\mu|\Big)\right|^2}$$
eine EUKLID*ische Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ aller beschränkten Bilinearformen B' auf $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ gegeben, die nicht von der Wahl des MONS $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ abhängt. Bzgl. dieser Norm ist $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum, das sog. (topologische)* ***Tensorprodukt*** *von $\mathcal{H}$ mit sich selbst, und*[53]
$$\{\Phi_\nu \otimes \Phi_\mu\}_{\nu,\mu\in\mathbb{N}} \quad \text{ist ein MONS von} \quad \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\,.$$

[53]Das Tensorprodukt von Vektoren wurde in Gleichung (7.62) eingeführt.

Beweis: Analog demjenigen von Lemma 7.4.14. ∎

8.4.3 Allgemeinere Tensorprodukte

Definition 8.4.9 *Seien $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$ (komplexe)* Hilbert*-Räume. Dann bezeichnen wir mit $L\Big(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C}), \ldots, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N, \mathbb{C}), \mathbb{C}\Big)$ den komplexen Vektorraum aller Abbildungen von $\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_N$ in $\mathbb{C}$, die in jedem Argument linear sind. Ein $\check{M}_0 \in L\Big(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C}), \ldots, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N, \mathbb{C}), \mathbb{C}\Big)$ nennt man* ***beschränkt****, wenn*

$$L_1, \ldots, L_N \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \check{M}_0(L_1, \ldots, L_N) \text{ beschränkt}$$

für alle $L_1 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C}), \ldots, \check{T}_N \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_N, \mathbb{C})$ gilt. Mit $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$ wird der Teilraum aller beschränkten $\check{M} \in L\Big(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C}), \ldots, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N, \mathbb{C}), \mathbb{C}\Big)$ bezeichnet.

Lemma 8.4.10 *Seien $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$ (komplexe)* Hilbert*-Räume und sei für $j \in \{1, \ldots, N\}$ jeweils $\{\Phi_{j,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}_j$. Dann ist durch*

$$\left\|\check{M}\right\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_N \in \mathbb{N}} \left|\check{M}\Big(\langle\Phi_{1,\nu_1}|, \ldots, \langle\Phi_{N,\nu_N}|\Big)\right|^2} \quad \forall\, \check{M} \in \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N \tag{8.37}$$

eine Euklid*ische Norm auf $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$ gegeben, die nicht von der speziellen Wahl der MONS $\{\Phi_{j,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ abhängt. Bzgl. dieser Norm ist $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$ ein* Hilbert*-Raum und*[54]

$$\{\Phi_{1,\nu_1} \otimes \ldots \Phi_{N,\nu_N}\}_{\nu_1, \ldots, \nu_N \in \mathbb{N}} \quad \text{ein MONS von} \quad \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N\,.$$

Beweis: Direkte Verallgemeinerung des Beweises von Lemma 8.4.8. ∎

Anmerkungen:

1. Den Hilbert-Raum $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$ mit dem (8.37) entsprechenden inneren Produkt bezeichnet man als das (topologische) ***Tensorprodukt der*** Hilbert***-Räume*** $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$.

Version vom 26. März 2009

[54] Das Tensorprodukt mehrerer Vektoren wurde in Lemma 7.4.17 eingeführt.

2. Den linearen Teilraum[55]

$$\mathcal{H}_1 \otimes_{\text{alg}} \ldots \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\Big(\{\Psi_1 \otimes \ldots \otimes \Psi_N : \Psi_j \in \mathcal{H}_j \text{ für } j = 1, \ldots, N\}\Big)$$

   davon bezeichnet man (in Verallgemeinerung von Definition 7.4.16) als das ***algebraische Tensorprodukt*** der linearen Räume $\mathcal{H}_j$.

3. Offensichtlich gilt

$$\langle \Psi_1 \otimes \ldots \otimes \Psi_N \mid \Psi'_1 \otimes \ldots \otimes \Psi'_N \rangle = \prod_{\nu=1}^{N} \langle \Psi_\nu \mid \Psi'_\nu \rangle \tag{8.38}$$

   für beliebige $\Psi_1, \Psi_1 \in \mathcal{H}_1, \ldots, \Psi_N, \Psi_N \in \mathcal{H}_N$.

Definition 8.4.11 *Seien $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$ (komplexe)* HILBERT*-Räume und seien $\hat{A}_j$ für $j = 1, \ldots, N$ jeweils ein linearer Operator in $\mathcal{H}_j$. Dann bezeichnen wir den durch*

$$D_{\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_N} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\left(\left\{\Psi_1 \otimes \ldots \otimes \Psi_N : \Psi_j \in D_{\hat{A}_j} \text{ für } j = 1, \ldots, N\right\}\right)$$

und

$$\left(\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_N\right)(\Psi_1 \otimes \ldots \otimes \Psi_N) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{A}_1 \Psi_1\right) \otimes \ldots \otimes \left(\hat{A}_N \Psi_N\right)$$
$$\forall\, (\Psi_1, \ldots, \Psi_N) \in D_{\hat{A}_1} \times \ldots \times D_{\hat{A}_N}$$

*festgelegten linearen Operator $\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_N$ in $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$ als das **Tensorprodukt der Operatoren** $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_N$.*

Quantenmechanische Bedeutung:

- Wenn jeweils $\mathcal{H}_\nu$ der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems $\mathcal{S}_\nu$ ist und die $\mathcal{S}_\nu$ unterscheidbar sind, dann ist $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$ der Zustandsraum des aus $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ bestehenden (Gesamt-) Systems $\mathcal{S}$.
- Wenn außerdem $\hat{A}_\nu$ jeweils die Observable der physikalischen Größe A_ν von $\mathcal{S}_\nu$ ist , dann ist $\overline{\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_n}$ die Observable der Größe $A_1 \cdots A_n$ von $\mathcal{S}$.

[55] Es sei daran erinnert, daß $\mathcal{L}(T)$ die lineare Hülle von T bezeichnet.

- Dementsprechend gilt dann z.B.

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \Psi \,\middle|\, \left(\hat{P}_{E_1} \otimes \hat{P}_{E_n}\right) \Psi \right\rangle \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei optimaler Überprüfung} \\ \text{im Zustand } \widehat{=} \Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n \text{ für jedes } \nu \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{jeweils die Eigenschaft } E_\nu \text{ an } \mathcal{S}_\nu \text{ festgestellt wird}\,. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

- Speziell für Zustandsvektoren der Form

$$\Psi = \Psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$$

gilt dabei die Beziehung

$$\left\langle \Psi \,\middle|\, \left(\hat{P}_{E_1} \otimes \hat{P}_{E_n}\right) \Psi \right\rangle = \prod_{\nu=1}^{n} \left\langle \Psi_\nu \,\middle|\, \hat{P}_{E_1}\, \Psi_\nu \right\rangle \,,$$

also die statistische Unabhängigkeit der Teilsysteme $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$.

Kapitel 9

Verallgemeinerte Funktionen

9.1 Grundlegendes

9.1.1 Definitionen

Die elementare SCHRÖDINGERGleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}) \right) \Psi_t(\mathbf{x}) \tag{9.1}$$

macht nicht für alle Anfangsbedingungen

$$\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Sinn, wenn man die partiellen Ableitungen im üblichen Sinne als Grenzwerte entsprechender Differenzenquotienten interpretiert. Man kann die Elemente Ψ von $L^2(\mathbb{R}^3)$ aber auch als ***temperierte*** SCHWARTZ-***Distribution***en interpretieren.

Definition 9.1.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann versteht man unter einer **temperierten Distribution** über $\mathbb{R}^n$ eine lineares Funktional F auf dem* SCHWARTZ-*Raum*[1]

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_N < \infty \; \forall \, N \in \mathbb{N}\} \, ,$$

$$\textit{wobei:} \quad \|\varphi\|_N \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (1 + \|\mathbf{x}\|)^N \sup_{\substack{\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha^1 + \ldots + \alpha^n \le N}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha^1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{\alpha^n} \varphi(\mathbf{x}) \right| \, , \tag{9.2}$$

*das **stetig** in folgendem Sinne ist:*

$$\|\varphi_\nu\|_N \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \quad \forall \, N \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad F(\varphi_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \, . \tag{9.3}$$

Version vom 26. März 2009

[1] Für $n = 1$ wurde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bereits in (8.14) definiert. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet die Menge aller beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen über $\mathbb{R}^n$.

Für Distributionen F benutzt man aus mnemotechnischen Gründen die (i.a. nur) **formale** *Schreibweise*[2]

$$\int F(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(\varphi) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{9.4}$$

Wenn $F(\mathbf{x})$ eine gewöhnliche Funktion ist, für die dieses Integral im üblichen Sinne existiert, dann identifiziert man $F(\mathbf{x})$ mit dem im Sinne von (9.4) zugeordneten linearen Funktion F auf $\mathbb{R}^n$. Temperierte Distributionen dieses Typs nennt man ***regulär****. Die Elemente von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nennt man* ***temperierte*** *(Test-)* ***Funktionen*** *über $\mathbb{R}^n$.*

Im Sinne von (9.4) identifiziert man jedes $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gemäß

$$\Psi(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \Psi^* \mid \varphi \rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \tag{9.5}$$

mit einer temperierten Funktion über $\mathbb{R}^n$.

Für polynomial beschränkte[3] differenzierbare Funktionen $F(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\,F(\mathbf{x})\right)\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \int F(\mathbf{x})\left(-\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,. \tag{9.6}$$

Im Sinne von (9.4) liegt es deshalb nahe, (9.6) als Definition für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^j}\,F$ von Distributionen F zu verwenden. Damit bekommt $\Delta_{\mathbf{x}}\,\Psi_t(\mathbf{x})$ in (9.1) auch für (im gewöhnlichen Sinne) nicht differenzierbare $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ die richtige Bedeutung.

Erläuterung: Die eigentliche Aufgabe der Schrödinger-Gleichung (9.1) ist die Festlegung der Zeitabhängigkeit[4]

$$\Psi_t(\mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}\,t}\,\Psi_0(\mathbf{x}) \tag{9.7}$$

für **beliebige** $L^2(\mathbb{R})$-Anfangsbedingungen durch i.w. selbstadjungierte Hamilton-Operatoren $\hat{H}$ mit

$$D_{\hat{H}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

und

$$\hat{H}\,\varphi(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x})\right)\varphi(\mathbf{x}) \quad \forall\,\varphi \in D_{\hat{H}}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[2]Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ meint $\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}$ stets $\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$ in karthesischen Koordinaten.

[3]***Polynomial beschränkt*** meint:

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (1 + \|\mathbf{x}\|)^N\,|F(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall\,N \in \mathbb{N}\,.$$

[4]In (9.7) müßte, streng genommen, eigentlich die eindeutige selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{H}$ eingesetzt werden.

Für solche $\hat{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi_t(\varphi) &= i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \Psi_t^* \mid \varphi \rangle \\
&\underset{(9.7)}{=} i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\, \Psi^* \mid \varphi \right\rangle \\
&= i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle \Psi^* \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi^* \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\, \hat{H}\, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi_t^* \mid \hat{H}\, \varphi \right\rangle \\
&= (V\, \Psi_t)(\varphi) - \frac{\hbar^2}{2m} \Psi_t(\Delta\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)\,,\ \Psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)\,,
\end{aligned}$$

d.h. aus (9.7) folgt (9.1) im distributionstheoretischen Sinne. Umgekehrt folgt (9.7) aus der so interpretierten SCHRÖDINGER-Gleichung, wenn $\Psi_t(\varphi)$ — wie normalerweise der Fall — für eine in $L^2(\mathbb{R})$ dichte Teilmenge von Elementen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ als Funktion von t an jeder Stelle TAYLOR-entwickelbar ist.

Die Definition der partiellen Ableitung von Distributionen ist nur ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Regel:

Definition 9.1.2 *Seien $n \in \mathbb{N}$, F eine temperierte Distribution über $\mathbb{R}^n$ und $\hat{T}$, $\hat{T}'$ stetige*[5] *lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\int (\hat{T}\psi)(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \int \psi(\mathbf{x})\, (\hat{T}'\varphi)(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \quad \forall\, \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Dann definiert man:

$$(\hat{T}F)(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(\hat{T}'\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Anmerkungen:

1. Die formale Schreibweise (9.4) ist in folgendem Sinne konsistent:

   Wenn $F(\mathbf{x})$ eine reguläre temperierte Distribution ist, für die das Integral $\int \left(\hat{T}\psi(\mathbf{x})\right)\varphi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}}$ auch im gewöhnlichen Sinne existiert, dann stimmt der Wert des gewöhnlichen Integrals stets mit dem des formalen distributionstheoretischen Integrals überein.

[5] Im Sinne von Definition 9.1.1 heißt eine lineare Abbildung $\hat{T}$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ***stetig***, wenn

$$\|\varphi_\nu\|_N \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\hat{T}\varphi_\nu\right\|_N \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,.$$

für alle Folgen $\{\varphi\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

2. Die Definition der partiellen Ableitung einer Distribution entspricht offensichtlich dem Fall
$$\hat{T} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\,, \quad \hat{T}' = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$
von Definition 9.1.2.

3. Man sieht leicht, daß temperierte Distribution F beliebig oft partiell differenzierbar und ihre partiellen Ableitungen vertauschbar sind:
$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}F(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \nu,\mu \in \{1,\dots,n\}\,.$$

4. Die in Definition 9.1.2 eingeführten Operationen $\hat{T}$ sind in folgendem Sinne stetig:

   Für jede Folge $\{F_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ temperierter Distributionen über $\mathbb{R}^n$ gilt
$$\begin{aligned} &F_\nu(\varphi) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} F_1(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \Longrightarrow\ &\left(\hat{T}\,F_\nu\right)(\varphi) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \left(\hat{T}\,F_1\right)(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \end{aligned}$$

Natürlich sind die $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ nicht die einzigen temperierten Distributionen über $\mathbb{R}^3$. Ein besonders wichtiges einfaches Gegenbeispiel ist die δ-Funktion (in diesem Falle über $\mathbb{R}^3$):

Definition 9.1.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann versteht man unter der **δ-Funktion** über $\mathbb{R}^n$ die durch*
$$\delta(\varphi) \equiv \int \delta(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$
*gegebene temperierte Distribution ('verallgemeinerte Funktion') δ. Unter einer **δ-Folge** versteht man eine Folge $\{\delta_\iota\}_{\iota\in\mathcal{I}}$ regulärer temperierter Distributionen δ_ι mit*
$$\delta_\iota(\varphi) \underset{\iota\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
(die Anforderungen sind also schwächer als die in Definition B.1.1 an Folgen vom Typ *δ gestellten), wobei $\mathcal{I}$ eine geordnete, unendliche Indexmenge ist.*

Man sieht leicht, daß[6]
$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) \tag{9.8}$$

Version vom 26. März 2009

[6]Auch für Distributionen schreiben wir im Falle $n = 1$ natürlich $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ statt $\frac{\partial}{\partial x}$.

im distributionstheoretischen Sinne gilt, wobei θ die sog. HEAVISIDE-***Funktion***

$$\theta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 1/2 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{9.9}$$

bezeichnet.

Definition 9.1.4 *Seien $n \in \mathbb{N}$, F eine temperierte Distribution über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{O}$ ein offenes*[7] *Teilgebiet von $\mathbb{R}^3$. Dann sagt man, F sei **Null in** $\mathcal{O}$ und teilt dies durch*

$$F(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

mit, wenn $F(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt, die außerhalb einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{O}$ Null sind. Die Vereinigung aller $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, zu denen **kein** *$\epsilon > 0$ mit*

$$F(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in U_\epsilon(\mathbf{y})$$

*existiert, bezeichnet man als den **Träger** $\operatorname{supp} F$ von F.*

> **Anmerkung:** Der Träger der δ-Funktion ist offensichtlich die einelementige Menge $\{0\}$.

Es seien noch zwei weitere Definitionen angefügt:

Definition 9.1.5 *Seien $n \in \mathbb{N}$ und F eine temperierte Distribution über $\mathbb{R}^n$. Dann ist die **komplexe Konjugation** F^* von F durch*

$$F^*(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(F(\varphi^*)\Big)^* \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

gegeben.

Definition 9.1.6 *Seien $n \in \mathbb{N}$, F eine reguläre temperierte Distribution über $\mathbb{R}^n$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnet man die durch*

$$(F * \varphi)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int F(\mathbf{x}')\, \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, dV_{\mathbf{x}'}$$

*gegebene Funktion $F * \varphi$ als die **Faltung** von F mit φ.*

> **Anmerkung:** Durch die Definitionen 9.1.6 (für $F(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) und 9.1.2 ist natürlich auch die Faltung $F * \varphi = \varphi * F$ für nicht reguläre temperierte Distributionen F und 'Testfunktionen' $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ festgelegt.

[7] ***Offen*** meint: Zu jedem Punkt in $\mathcal{O}$ gibt es eine ganze Umgebung, die in $\mathcal{O}$ liegt.

9.1.2 Zerlegungen der Eins[8]

Lemma 9.1.7 *Zu jedem abgeschlossenen endlichen Intervall I und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit*[9]

$$\varphi(x) \begin{cases} = 1 & \text{für } x \in I\,, \\ > 0 & \text{für } x \in U_\epsilon(I)\,, \\ = 0 & \text{für } x \notin U_\epsilon(I)\,. \end{cases}$$

Beweisskizze: Man sieht leicht, daß die Funktion

$$s_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - 4\,x^2}\right) & \text{für } |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

temperiert ist und den Bedingungen

$$s_\epsilon(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genügt. Deshalb ist

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{x' \in U_{\epsilon/2}(I)} s_\epsilon(x - x')\, \mathrm{d}x'}{\int s_\epsilon(x')\, \mathrm{d}x'} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

eine Funktion der gewünschten Art. ∎

Folgerung 9.1.8 *Seien $\{I_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener endlicher Intervalle in $\mathbb{R}$ und $\{\epsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit*

$$\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} U_{\epsilon_\nu}(I_\nu) = \mathbb{R}$$

und

$$\{\nu \in \mathbb{N} :\; x \in U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)\} \;\; \textit{endlich} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dann existiert eine den $U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)$ angepaßte ***Zerlegung der Eins****, d.h. eine Folge $\{\chi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die folgenden drei Bedingungen genügt:*

1. $$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \chi_\nu(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

[8] Der Einfachheit wegen betrachten wir in diesem Abschnitt nur temperierte Distributionen über $\mathbb{R}$. Die Verallgemeinerungen für temperierte Distributionen über $\mathbb{R}^n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ sind offensichtlich.

[9] Wir benutzen die übliche Notation

$$U_\epsilon(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\; |x - x'| < \epsilon \text{ für geeignetes } x' \in I\}\;.$$

2.

$$\chi_\nu(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)\,,\; \nu \in \mathbb{N}\,.$$

3.

$$\chi_\nu(x) \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\; \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Beweisskizze: Gemäß Lemma 9.1.7 existiert zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit

$$\varphi_\nu(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)\,, \\ = 0 & \text{für } x \notin U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)\,. \end{cases}$$

Die Definition

$$\chi_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\varphi_\nu(x)}{\sum_{\mu\in\mathbb{N}} \varphi_\mu(x)} & \text{für } x \in U_{\epsilon_\nu}(I_\nu)\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}\,,\; x \in \mathbb{R}$$

liefert dann eine Folge $\{\chi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ der gewünschten Art. ∎

Lemma 9.1.9 *Zu jeder Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert eine Folge $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die folgenden beiden Bedingungen genügt:*[10]

1.

$$\|\varphi - \varphi_\nu\|_N \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,.$$

2.

$$|x| > \nu + 1 \Longrightarrow \varphi_\nu(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\; \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Beweisskizze: Man sieht leicht, daß die durch

$$\varphi_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{|x|\le\nu} s_1(x-x')\,dx'}{\int s_1(x')\,dx'}\,\varphi(x) \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}\,,\; x \in \mathbb{R}$$

gegebene Folge $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt, wenn $s_1(x)$ die im Beweis von Lemma 9.1.7 eingeführte Funktion bezeichnet. ∎

Aus Folgerung 9.1.8 und Lemma (9.1.9) ergibt sich unmittelbar:

Folgerung 9.1.10 *Sei F eine temperierte Distribution über $\mathbb{R}$. Dann $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} F$ die größte offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, in der F verschwindet.*

Version vom 26. März 2009

[10] Der Einfachheit halber setzen wir x physikalisch dimensionslos voraus.

9.1.3 Beispiele und einfache Resultate

Lemma 9.1.11 *Seien $n \in \mathbb{N}$ und F eine temperierte* SCHWARTZ-*Distribution über $\mathbb{R}^n$. Dann existieren eine polynomial beschränkte, stetige Funktion $G(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$ und $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{Z}_+$ mit*

$$F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha^1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha^n} G(\mathbf{x})$$

(im distributionstheoretischen Sinne).

Beweis: Siehe (Gelfand und Schilow, 1962, Kap. II § 4 Nr. 3). ∎

Anmerkung: Als Spezialfall von Lemma 9.1.11 bestätigt man leicht:

$$\delta(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \int_{-\infty}^{x} \theta(x')\,\mathrm{d}x'\,.$$

Lemma 9.1.12 *Gemäß Definition 9.1.2 gelten u.a. folgende Beziehungen für temperierte Distributionen F über $\mathbb{R}^3$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$:*

1. *Für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$:*

$$\int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \int F(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,.$$

2. *Für jede invertierbare 3×3-Matrix $\hat{M}$:*

$$\int F(\hat{M}\,\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \left|\det \hat{M}^{-1}\right| \int F(\mathbf{x})\,\varphi(\hat{M}^{-1}\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,.$$

3. *Für die 3-dimensionale* FOURIER-***Transformation***:[11]

$$\int F(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}} = \int \widetilde{F}(\mathbf{p}) \underbrace{\widetilde{\varphi}(-\mathbf{p})}_{\stackrel{\text{def}}{=} (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \varphi(\mathbf{x})\, e^{+\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}V_{\mathbf{x}}} \mathrm{d}V_{\mathbf{p}}$$

und

$$\widetilde{\delta}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-3/2}\,.$$

4. *Für jedes $k(\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, dessen Ableitungen alle polynomial beschränkt sind:*

$$\int \Big(k(\mathbf{x})\,F(\mathbf{x})\Big)\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \int F(\mathbf{x})\,\Big(k(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\Big)\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,.$$

[11] Siehe Aufgabe E1.

5. *Für jedes* $\widetilde{h}(\mathbf{p}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *, dessen Ableitungen alle polynomial beschränkt sind:*

$$\int (h * F)(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \int F(\mathbf{x})\, (h * \varphi)(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \,.$$

Beweis: Aufgabe E81. ∎

Lemma 9.1.13 *Durch*

$$\delta_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(n\,x)}{\pi\,x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}$$

ist eine δ*-Folge* $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *über* $\mathbb{R}$ *gegeben.*

Beweisskizze (siehe auch Satz B.2.3)**:** Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(n\,x)}{\pi\,x}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{-i\,p\,x}\, \mathrm{d}p \right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} \left(\int e^{-i\,p\,x}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} \widetilde{\varphi}(p)\, \mathrm{d}p \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widetilde{\varphi}(p)\, e^{+i\,p\,x}\, \mathrm{d}p \right)_{|x=0} = \varphi(0)\,.
\end{aligned}$$
∎

Lemma 9.1.14 *Seien* $\mathcal{O}$ *ein offenes (nicht unbedingt endliches) Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* F *eine temperierte Distribution über* $\mathbb{R}$ *mit*[12]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O}\,.$$

Dann existiert ein $c \in \mathbb{C}$ *mit*[13]

$$F(x) - c = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O}\,.$$

[12] Übrigens folgt aus Lemma 9.1.11, daß jede temperierte Distribution eine Stammfunktion besitzt.

[13] Hierbei ist die Konstante c natürlich als reguläre Distribution (siehe Definition 9.1.1) aufzufassen.

Beweisskizze: Man wähle ein[14] $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ mit $\int \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \int F'(x)\left(\int_{-\infty}^{x}\left(\varphi(x') - \varphi_0(x')\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x'\right)\mathrm{d}x \\ &= \int F(x)\left(\varphi_0(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \varphi(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= F(\varphi_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,\mathrm{d}y - F(\varphi)\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 9.1.15 *Seien $\mathcal{O}$ ein offenes (nicht unbedingt endliches) Intervall in $\mathbb{R}$ und $\hat{M}(x)$ eine komplexe, stetig von x-abhängige $N \times N$-Matrix, $N \in \mathbb{N}$. Zu jeder N-komponentigen temperierten Distribution $\mathbf{F}(x)$ über $\mathbb{R}$ mit*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{F}(x) - \hat{M}(x)\,\mathbf{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O} \tag{9.10}$$

existiert dann eine gewöhnliche Lösung $\mathbf{F}_{\mathrm{reg}}(x)$ von (9.10) mit

$$\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}_{\mathrm{reg}}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O}\,.$$

Beweisskizze: Man wähle ein gewöhnliches fundamentales Lösungssystem

$$\{\mathbf{F}_1(x), \ldots, \mathbf{F}_N(x)\} \tag{9.11}$$

von (9.10), d.h. gewöhnliche Lösungen $\mathbf{F}_j(x)$ derart, daß (9.11) für jedes feste $x \in \mathcal{O}$ eine (nicht notwendig orthonormierte) Basis von $\mathbb{C}^N$ ist (vgl. 5.3.1). Dann ist die komplexe $N \times N$-Matrix

$$\hat{U}(x) = \begin{pmatrix} F_1^1(x) & \cdots & F_N^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ F_1^N(x) & \cdots & F_N^N(x) \end{pmatrix}$$

für jedes $x \in \mathcal{O}$ invertierbar. Sei nun $\mathbf{F}(x)$ eine temperierte Distribution über $\mathbb{R}$, für die (9.10) gilt. Dann gilt im distributionstheoretischen Sinne

$$\begin{aligned} \hat{M}(x)\,\mathbf{F}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat{U}(x)\left(\hat{U}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{U}(x)\right)}_{=\hat{M}(x)\,\hat{U}(x)}\hat{U}(x)^{-1}\mathbf{F}(x) + \hat{U}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat{U}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)\right) \\ &= \hat{M}(x)\,\mathbf{F}(x) + \hat{U}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat{U}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)\right) \quad \forall\, x \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat{U}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)\right) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O}\,.$$

Mit Lemma 9.1.14 folgt daraus die Behauptung. $\blacksquare$

Version vom 26. März 2009

[14] Mit $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ bezeichen wir die Menge aller temperierten Funktionen über $\mathbb{R}$, die außerhalb einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{O}$ verschwinden.

Aus Lemma 9.1.15 und Satz 8.3.28 erkennt man z.B. sofort, daß der durch

$$D_{\hat{H}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

und

$$\left(\hat{H}_0\,\varphi\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \varphi(x) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,,\; x \in \mathbb{R}$$

gegebene HAMILTON-Operator $\hat{H}_0$ in $L^2(\mathbb{R})$ im wesentlichen selbstadjungiert ist.

Erläuterung: Sei $\Psi \in D_{\hat{H}_0^\dagger}$ und gelte $\hat{H}_0^\dagger\,\Psi = \pm i\,\Psi$. Dann gilt gemäß Definition 8.3.7

$$\left\langle \Psi \mid \hat{H}_0\,\varphi \right\rangle = \mp i\,\langle \Psi \mid \varphi \rangle\;,$$

d.h. es gilt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \Psi(x) = \mp i\,\Psi(x)$$

im distributionstheoretischen und somit nach Lemma 9.1.15 auch im gewöhnlichen Sinne. Da keine der nichttrivialen klassischen Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen zu $L^2(\mathbb{R})$ gehört,[15] muß also $\Psi = 0$ sein. Nach Satz 8.3.28 ist $\hat{H}_0$ somit im wesentlichen selbstadjungiert, da $n_\pm(\hat{H}_0) = 0$.

9.2 GREENsche Funktionen

9.2.1 Fundamentallösungen partieller Differentialgleichungen

Sei $\hat{D}_{\mathbf{x}}$ ein ***linearer partieller Differentialoperator*** über $\mathbb{R}^n$, d.h. eine endliche Summe von Ausdrücken der Form

$$a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha^1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha^n}\;, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^n\,,$$

mit (hinreichend gutartigen) Funktionen $a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$. Statt die entsprechende partielle Differentialgleichung

$$\hat{D}_{\mathbf{x}}\,\Phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \tag{9.12}$$

[15] Die allgemeinsten Lösungen sind ja

$$\Psi(x) = c_+\,e^{+\sqrt{\pm 2mi}\,x/\hbar} + c_-\,e^{-\sqrt{\pm 2mi}\,x/\hbar}\,.$$

direkt zu lösen, sucht man i.a. eine zugehörige GREEN***sche Funktion***, d.h. eine (hinreichend gutartig) von $\mathbf{x}'$ abhängige temperierte Distribution $G_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x};\mathbf{x}')$ über $\mathbb{R}^n$ mit

$$\hat{D}_{\mathbf{x}}\, G(\mathbf{x};\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{9.13}$$

Denn mit (9.13) ist

$$\Phi_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int G(\mathbf{x};\mathbf{x}')\,\rho(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'} \tag{9.14}$$

für jedes $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (9.12).

Wenn zusätzlich zu (9.12) gewisse Randbedingungen zu erfüllen sind, müssen diese natürlich bei der Wahl der GREENschen Funktione entsprechend berücksichtigt werden. In typischen Anwendungfällen legen die geforderten Randbedingungen die Lösungen von (9.12) eindeutig (in Abhängigkeit von $\rho(\mathbf{x})$) fest.

Beispiele:

(i) Das elektrostatische Potential $\Phi_\rho(\mathbf{x})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist durch die inhomogene LAPLACE-Gleichung

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Phi_\rho(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\mathbf{x})$$

und die Randbedingung

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \Phi_\rho(\mathbf{x}) = 0$$

eindeutig festgelegt, wie der Satz von EARNSHAW zeigt. Gemäß Aufgabe E82 ist

$$G(\mathbf{x};\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

die diesem Problem entsprechende GREENsche Funktion:[16]

$$\Phi_\rho(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\,\epsilon_0\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'} \qquad (\text{COULOMB-}\textbf{\textit{Potential}})\,.$$

(ii) Die sog. ***retardiert***en Lösungen $\Psi^{\text{ret}}_{\jmath}(\mathbf{x},t)$ der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box_{\mathbf{x},t}\Psi(\mathbf{x},t) = \jmath(\mathbf{x},t)\,, \quad \Box_{\mathbf{x},t} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \Delta_{\mathbf{x}}\,,$$

zu $\jmath(\mathbf{x},t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit

$$t < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \jmath(\mathbf{x},t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Version vom 26. März 2009

[16]Entsprechendes gilt natürlich für das Gravitationspotential Φ_μ einer Massenverteilung $\mu(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ mit $-\frac{1}{4\pi\,\gamma}$ statt ϵ_0 .

sind durch die Randbedingung

$$t < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

(*no output before input*) eindeutig festgelegt, wie die Betrachtungen in 6.3.1 zeigen. Hier ist

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{2\pi}\,\theta(t-t')\,\delta\Big(c^2(t-t')^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2\Big)$$

die entsprechende GREENsche Funktion:

$$\begin{aligned}\Psi_\jmath^{\mathrm{ret}}(\mathbf{x}, t) \quad &= \quad \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')\,\jmath(\mathbf{x}', t')\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}\,\mathrm{d}t' \\ &\underset{\text{Aufgabe E83}}{=} \int \frac{\jmath(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{4\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 4.1.1 von (Lücke, edyn)).

9.2.2 Quantenmechanische Propagatoren

Statt die nichtrelativistische SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\mathbf{x}, t)\right)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{9.15}$$

direkt zu lösen, ist es vielfach zweckmäßiger die zugehörige retardierte GREENsche Funktion $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ zu bestimmen, d.h. die durch folgende Bedingungen eindeutig[17] charakterisierte, (hinreichend gutartig) von $(\mathbf{x}', t')$-abhängige temperierte Distribution über $\mathbb{R}$:

1. Für alle $(\mathbf{x}', t') \in \mathbb{R}^4$ genügt $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ der patiellen Differentialgleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\mathbf{x}, t)\right)G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta(t-t') \tag{9.16}$$

2. Für alle $(\mathbf{x}', t') \in \mathbb{R}^4$ erfüllt $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ die Randbedingung

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad \text{verschwindet in } \left\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4 : t < t'\right\}. \tag{9.17}$$

3. $$F_{\Psi,t'}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')\,\Psi(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}$$

   ist eine hinreichend gutartig von $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $t' \in \mathbb{R}$ abhängige temperierte Distribution über $\mathbb{R}^4$, die einer (hinreichend gutartig) von t abhängigen Schar von $L^2(\mathbb{R}^3)$-Elementen entspricht.

Version vom 26. März 2009

[17] Die Eindeutigkeit läßt sich auch hier auf die Energieerhaltung der Lösungen der homogenen Gleichung (9.15) zurückführen.

Damit ist nämlich die Lösung des Anfangswertproblems

$$\Psi(\mathbf{x}, t_0) = \Psi_0(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{9.18}$$

zu (9.15) für $t > t_0$ durch

$$\boxed{\theta(t - t_0)\, \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0)\, \Psi(\mathbf{x}', t_0)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}} \tag{9.19}$$

gegeben, weshalb man $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0)$ auch als ***Propagator*** bezeichnet.

Beweisskizze zu (9.19): Für die Lösung $\Psi(x, t)$ von (9.15)/(9.18) gilt offensichtlich

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\mathbf{x}, t)\right) \theta(t - t_0)\Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\, \delta(t - t_0)\, \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\, \delta(t - t_0)\, \Psi(\mathbf{x}, t_0)\,.$$

Da andererseits auch

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\mathbf{x}, t)\right) i\hbar \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0)\, \Psi(\mathbf{x}', t_0)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'} \underset{(9.16)}{=} i\hbar\, \delta(t - t_0)\, \Psi(\mathbf{x}, t_0)$$

gilt, ist

$$\Psi_{\mathrm{diff}}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta(t - t_0)\Psi(\mathbf{x}, t) - i\hbar \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0)\, \Psi(\mathbf{x}', t_0)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}$$

eine Lösung von (9.15). Da $\Psi_{\mathrm{diff}}(\mathbf{x}, t)$ für $t < t_0$ verschwindet, muß $\Psi_{\mathrm{diff}}(\mathbf{x}, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verschwinden,[18] d.h. es gilt (9.19). ∎

Für die freie Schrödinger-Gleichung, also für

$$\hat{H}(\mathbf{x}, t) = \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \Delta_{\mathbf{x}} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \tag{9.20}$$

ergibt sich der der Propagator zu[19]

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \\ &= G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{i}{\hbar}\, \theta(t - t') \left(\sqrt[+]{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\, (t - t')}}\right)^3 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, \frac{m\, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{2\, (t - t')}\right). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Beweisskizze: Für Lösungen $\Psi(\mathbf{x}, t)$ von (9.15) gilt

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \widetilde{\Psi}(\mathbf{p}, t_0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}(t - t_0)}\, e^{+\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{p}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ t, t_0 \in \mathbb{R}$$

mit

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p}, t_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \Psi(\mathbf{x}, t_0) e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \quad \forall\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\,,\ t_0 \in \mathbb{R}\,,$$

Version vom 26. März 2009

[18] Durch Verschmieren in t_0 mit einer temperierten Funktion mit beschränktem Träger ergibt sich (für hinreichend gutartiges $\Psi_0(\mathbf{x})$) eine eine Lösung von (9.15) im gewöhnlichen Sinne.

[19] Mit $\sqrt[+]{z}$ bezeichnen wir die Wurzel aus $z \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil.

gemäß (9.19) und Regel 11 zur FOURIER-Transformation (vgl. Aufgabe E1) also

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t_0) = -\frac{i}{\hbar}\,(2\pi\hbar)^{-3}\,\theta(t-t_0)\lim_{\epsilon\to+0}\int e^{-\frac{\epsilon+i(t-t_0)}{2m\hbar}|\mathbf{p}|^2}e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,dV_{\mathbf{p}}\,.$$

Mit

$$\begin{aligned}&\int e^{-\frac{\epsilon+i(t-t_0)}{2m\hbar}|\mathbf{p}|^2}e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,dV_{\mathbf{p}}\\ &= e^{-\frac{m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{2\hbar(\epsilon+i\,(t-t_0))}}\underbrace{\int e^{-\left(\sqrt[+]{\frac{\epsilon+i(t-t_0)}{2m\hbar}}\,\mathbf{p}-\frac{i}{2\hbar}\sqrt[+]{\frac{2m\hbar}{\epsilon+i(t-t_0)}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)^2}dV_{\mathbf{p}}}_{\underset{(4.99)}{=}\left(\sqrt[+]{\frac{2\pi\hbar m}{\epsilon+i(t-t_0)}}\right)^3}\end{aligned}$$

folgt daraus (9.21). ∎

Für

$$\hat{H}(\mathbf{x},t) = \hat{H}_0 + V(\mathbf{x})$$

folgt aus (9.16)

$$\begin{aligned}&\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_0\right)G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\\ &=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t')+V(\mathbf{x})\,G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\\ &=\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')\delta(t-t'')\left(\delta(\mathbf{x}''-\mathbf{x}')\delta(t''-t')+V(\mathbf{x}'')\,G(\mathbf{x}'',t'';\mathbf{x}',t')\right)dV_{\mathbf{x}''}\,dt''\\ &=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_0\right)\int G_0(\mathbf{x},t;\mathbf{x}'',t'')\Big(\delta(\mathbf{x}''-\mathbf{x}')\delta(t''-t')\\ &\qquad\qquad +V(\mathbf{x}'')\,G(\mathbf{x}'',t'';\mathbf{x}',t')\Big)dV_{\mathbf{x}''}\,dt''\end{aligned}$$

und somit

$$\boxed{G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = G_0(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')+\int G_0(\mathbf{x},t;\mathbf{x}'',t'')V(\mathbf{x}'')\,G(\mathbf{x}'',t'';\mathbf{x}',t')\,dV_{\mathbf{x}''}\,dt''\,,}$$

da beide Seiten für $t<t'$ verschwinden. Oft ist die sog. BORN***sche Näherung***

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\approx G_0(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')+\int G_0(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_1,t_1)V(\mathbf{x}_1)\,G_0(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}',t')\,dV_{\mathbf{x}_1}\,dt_1$$

ausreichend.

9.2.3 Das STURM-LIOUVILLE-Problem

Siehe (Kemble, 1937, Abschn. 23–25) und (Fischer und Kaul, 2004, §4.2).

Anhang E

Ergänzende Übungsaufgaben

Übungsaufgabe E1 Man zeige für hinreichend gutartige (komplexwertige) Funktionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 über $\mathbb{R}^3$ die Gültigkeit folgenden (der Quantenmechanik angepaßten) 'FOURIER-Vokabulars':

$\Psi(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{p}}$	$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \Psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}}$	
$c\,\Psi(\mathbf{x})$	$c\,\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})$	(F1)
$\Psi_1(\mathbf{x}) + \Psi_2(\mathbf{x})$	$\widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}) + \widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p})$	(F2)
$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Psi(\mathbf{x})$	$p_\nu\,\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})$	(F3)
$x_\nu\,\Psi(\mathbf{x})$	$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})$	(F4)
$\Psi(\mathbf{x}+\mathbf{a})$	$e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}\,\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})$	(F5)
$e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}\,\Psi(\mathbf{x})$	$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p}+\mathbf{a})$	(F6)
$\left(\Psi(\mathbf{x})\right)^*$	$\left(\widetilde{\Psi}(-\mathbf{p})\right)^*$	(F7)
$\left(\Psi(-\mathbf{x})\right)^*$	$\left(\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})\right)^*$	(F8)
$\Psi(\mathbf{x}) = e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|^2}$	$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) = (2\lambda\hbar)^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{4\lambda\hbar^2}\|\mathbf{p}\|^2}$	(F9)
$(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\,\Psi_1(\mathbf{x})\,\Psi_2(\mathbf{x})$	$\int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}')\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}'}$	(F10)
$\int \Psi_1(\mathbf{x}')\,\Psi_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}$	$(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\,\widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p})\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p})$	(F11)
$\int \Psi_1(\mathbf{x})\,\Psi_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \underset{\text{PARSEVAL}}{=} \int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p})\,\widetilde{\Psi}_2(-\mathbf{p})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}}$		(F12)
$\int \|\Psi(\mathbf{x})\|^2\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \underset{\text{PLANCHEREL}}{=} \int \left\|\widetilde{\Psi}(\mathbf{p})\right\|^2\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}}$		(F13)

Hinweis: Man verwende Gleichung (4.99) der Vorlesung.

Übungsaufgabe E2 Auf der Menge X aller komplexwertigen Funktionen von $x \in [-1,+1]$ seien in natürliche Weise die Multiplikation mit komplexen Zahlen und die Addition eingeführt:

$$(\lambda\, f)\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, f(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,,\; f \in X\,,\; x \in [-1,+1]\,,$$

$$(f+g)\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \quad \forall\, f,g \in X\,,\; x \in [-1,+1]\,.$$

Man zeige, daß X mit dieser *linearen Struktur* ein komplexer Vektorraum ist.

Übungsaufgabe E3 Für den in Aufgabe E2 eingeführten Vektorraum X zeige man:

a) Die Menge aller Monome x^ν, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, ist linear unabhängig.

b) Für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ bildet die Menge X_n^{pol} aller Polynome vom Grad[1] $\leq n$ (mit der induzierten linearen Struktur) einen Teilraum der Dimension $n+1$.

Übungsaufgabe E4 Seien $n \in \mathbb{Z}_+$ und X_n^{pol} der in Aufgabe E3b) eingeführte komplexe Vektorraum.

a) Man zeige, daß

$$\langle p_1 \mid p_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} \Big(p_1(x)\Big)^* p_2(x)\, \mathrm{d}x \quad \forall\, p_1, p_2 \in X_n^{\text{pol}}$$

ein inneres Produkt $\langle . \mid . \rangle$ auf X_n^{pol} definiert.

b) Man zeige für $n \geq 2$, daß die Legendre-***Polynome***

$$\begin{aligned} P_0(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 1\,, \\ P_1(x) &\stackrel{\text{def}}{=} x\,, \\ P_2(x) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, x^2 \end{aligned}$$

(nach Normierung) ein Orthonormalsystem $\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\, P_0\,,\; \sqrt{\frac{3}{2}}\, P_1,\, \sqrt{\frac{5}{2}}\, P_2\right\} \subset X_n^{\text{pol}}$ bzgl. dieses inneren Produkts bilden.

Übungsaufgabe E5 Man zeige, daß der Polarisationszustand des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \Re\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\, \mathbf{s}\cdot\mathbf{x}\right)}\right)\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}^3\,, \quad \omega > 0\,,$$

durch seinen Jones-Vektor

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mathcal{E}} \Big/ |\boldsymbol{\mathcal{E}}|$$

[1]Der ***Grad*** eines Polynoms $\lambda_0 + \lambda_1\, x^1 + \ldots + \lambda_n\, x^n$ ist die größte Zahl $\nu \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\lambda_\nu \neq 0$.

(bzgl. $\mathbf{x} = 0$) für eine **feste** rechtshändige Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{s}, \mathbf{e}_3\}$ von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ stets entsprechend folgender Tabelle charakterisiert wird:

Polarisation	$\mathbf{J}$ bzgl. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$
linear $\parallel (\cos\alpha\,\mathbf{e}_3 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_1)$	$e^{i\varphi}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$
rechtszirkular	$\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$
linkszirkular	$\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$
elliptisch	sonst

Übungsaufgabe E6 Sei $\mathbf{J}$ ein Jones Vektor. Man zeige:

a) Es existieren $\vartheta, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{J} = e^{i\psi}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,\cos\frac{\vartheta}{2}\\ e^{+i\frac{\varphi}{2}}\,\sin\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}\,,\quad \vartheta \in [0,\pi].$$

b) Damit gilt

$$\left(\sin\vartheta\,\cos\varphi\,\hat{\tau}^1 + \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\hat{\tau}^2 + \cos\vartheta\,\hat{\tau}^3\right)\mathbf{J} = \mathbf{J}\,,$$

wobei die $\hat{\tau}^j$ die Pauli-Matrizen

$$\hat{\tau}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,,\quad \hat{\tau}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}0 & -i\\ +i & 0\end{pmatrix}\,,\quad \hat{\tau}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

bezeichnen.

c) Es existieren eindeutige $\rho, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{R} + \lambda\,\mathbf{L}\,,$$

wobei

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\,,\quad \mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\,.$$

d) Dabei sind ρ und λ durch $|\rho| + |\lambda|$, $|\rho| - |\lambda|$ und $\arg(\rho^*\lambda)$ bis auf einen gemeinsamen Phasenfaktor eindeutig festgelegt.

Übungsaufgabe E7 Für die Polarisationsschwingung der monochromatischen ebenen Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \Re\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\,e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{x}\right)}\right)$$

mit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \underbrace{E_0}_{>0}\,(\rho\,\mathbf{R} + \lambda\,\mathbf{L})\qquad |\rho|^2 + |\lambda|^2 = 1\,,$$

an der Stelle $\mathbf{x} = 0$ zeige man:

a) Für die Schwingungsellipse gilt:

$$\begin{aligned} \text{Länge der großen Halbachse } &= (|\rho| + |\lambda|)\, E_0\,, \\ \text{Länge der kleinen Halbachse } &= \Big| |\rho| - |\lambda| \Big|\, E_0\,. \end{aligned}$$

b) Die Schwingung ist (relativ zu $\mathbf{e}_2$):

$$\begin{aligned} &\text{rechtshändig für } |\rho| > |\lambda|\,, \\ &\text{linksshändig für } |\rho| < |\lambda|\,. \end{aligned}$$

c) Die große Halbachse der Schwingungsellipse ist parallel zu

$$\pm\left(\cos\delta\,\mathbf{e}_3 + \sin\delta\,\mathbf{e}_1\right)\,, \qquad \text{wobei} \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\arg\lambda - \arg\rho}{2}\,.$$

Übungsaufgabe E8 Gegeben seien die JONES-Vektoren

$$\mathbf{J}_1 = \rho_1\,\mathbf{R} + \lambda_1\,\mathbf{L}\,, \quad \mathbf{J}_2 = \rho_2\,\mathbf{R} + \lambda_2\,\mathbf{L}\,.$$

a) Man zeige, daß $\langle \mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2 \rangle = 0$ genau gilt, wenn die drei Bedingungen

$$|\rho_1| + |\lambda_1| = |\rho_2| + |\lambda_2|\,, \quad |\rho_1| - |\lambda_1| = -\,|\rho_2| + |\lambda_2|\,, \quad \delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

erfüllt sind, wobei

$$\delta_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\arg\lambda_j - \arg\rho_j}{2} \quad \forall\, j \in \{1, 2\}\,.$$

b) Man diskutiere die Bedeutung dieser drei Orthogonalitätsbedingungen für die entsprechenden Polarisationsschwingungen.

Übungsaufgabe E9 Man zeige, daß die JONES-Matrizen der Filter für rechts- und linkszirkulares Licht nicht von der Wahl der rechtshändigen Basis $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{s})$ abhängen.

Übungsaufgabe E10 Man zeige, daß

$$\hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi}\,\mathbf{n}_\varphi = +\mathbf{n}_\varphi\,, \quad \hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi}\,\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi} = -\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$$

und

$$\hat{R}_{\mathbf{n}_{\frac{\varphi}{2}}}\,\hat{R}_{\mathbf{e}_1} = \hat{D}_{-\varphi}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, wobei:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi} &\stackrel{\text{def}}{=} -\hat{D}_{-\varphi}\,\hat{S}_\pi\,\hat{D}_\varphi \\
\mathbf{n}_\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_3\,, \\
\hat{D}_{\pm\varphi} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \\
\hat{S}_\psi &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\,\psi} \end{pmatrix} \qquad \forall \psi \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe E11 Man zeige, daß sich zu jedem $\varphi \in \mathbb{R}$ zwei $\frac{\lambda}{2}$-Blättchen stets so kombinieren lassen daß sich eine optische Komponente mit der Jones-Matrix $\hat{D}_{-\varphi}$ ergibt.

Übungsaufgabe E12 Für beliebig vorgegebene $\alpha, \varphi_R, \varphi_L \in \mathbb{R}$ zeige man:

1. $$\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\left(\cos\alpha\,e^{i\,\varphi_R}\,\mathbf{R} + \sin\alpha\,e^{i\,\varphi_L}\,\mathbf{L}\right) = e^{i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\,\mathbf{n}_{\frac{3}{4}\pi-\alpha}\,.$$

2. $$\hat{D}_{\frac{\varphi_L-\varphi_R}{2}}\left(\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\right)^3\mathbf{n}_{\frac{3}{4}\pi-\alpha} = e^{-i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\left(\cos\alpha\,e^{i\,\varphi_R}\,\mathbf{R} + \sin\alpha\,e^{i\,\varphi_L}\,\mathbf{L}\right)\,.$$

3. Für alle Jones-Vektoren $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ gilt

$$\langle \mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2 \rangle = 0 \implies \left\langle \hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\,\mathbf{J}_1 \,\middle|\, \hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\,\mathbf{J}_2 \right\rangle = 0\,.$$

Übungsaufgabe E13 Man zeige, daß sich zu jedem Jones-Vektor aus $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen und einem Linearpolarisationsfilter eine optische Komponente kombinieren läßt, deren Jones Matrix der Projektor $|\mathbf{J}\rangle\langle\mathbf{J}|$ ist.

Übungsaufgabe E14 Für

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

bestimme man $\hat{D}^{-1}$, $\hat{D}^2$, $\left(\hat{D} - \hat{1}\right)^2$ und zeige:

$$\hat{D} = \exp\left(\hat{D} - \hat{1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\hat{D} - \hat{1}\right)^\nu\,.$$

Übungsaufgabe E15 Für

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

zeige man:

a)
$$\hat{U}^{-1} \hat{M} \, \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b)
$$\hat{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} .$$

c) $\mathbf{v} \neq 0$ ist genau dann Eigenvektor von $\hat{M}$, wenn $\mathbf{v} \propto \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Es existiert eine komplexe 2×2-Matrix $\hat{A}$ mit $\hat{M} = \hat{A}^2$.

e) Es existiert eine komplexe 2×2-Matrix $\hat{B}$ mit $\hat{M} = \exp\left(\hat{B}\right)$.

Übungsaufgabe E16 Seien $1 < n \in \mathbb{N}$, sei V ein komplexer Vektorraum und $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine Basis von V bzgl. der die Vektoren von V in Spaltenschreibweise dargestellt werden sollen. Man zeige:

a) Die Abbildung
$$(\mathbf{z}_1 \,,\, \mathbf{z}_2) \longmapsto \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2$$
von $V \times V$ in $\mathbb{C}$, wobei
$$\begin{pmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_2^1 \\ \vdots \\ z_2^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} z_1^\nu \, z_2^\nu \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \,,$$
ist eine symmetrische Bilinearform, d.h.[2] sie besitzt die Eigenschaften
$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_1 \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$$
und
$$\mathbf{z}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_3 \mathbf{z}_3) = \lambda_2 \, (\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2) + \lambda_3 \, (\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_3) \quad \forall \, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V \,,\; \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \,.$$

Version vom 26. März 2009

[2]Siehe Definition 7.4.11.

b) Das Vektorprodukt

$$[\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \det\left(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{e}_\nu\right) \mathbf{e}_\nu \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1} \in V$$

ist genau dann von Null verschieden, wenn die $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}$ linear unabhängig sind.

c) Es gilt

$$[\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}] \cdot \mathbf{z}_n = \det\left(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\right) \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in V\,.$$

d) Wenn $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ eine Basis von V ist, dann bilden die

$$\mathbf{b}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{n-\nu} \left[\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n\right]}{\det\left(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\right)} \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

die dazu ***reziproke Basis***, d.h. es gilt

$$\mathbf{b}^\nu \cdot \mathbf{b}_\mu = \delta_{\nu\mu} \quad \forall\, \nu, \mu \in \{1, \ldots, n\}$$

e) Damit gilt die CRAMER***sche Regel***:

$$\boxed{\begin{aligned} & b_1^\nu\, x^1 + \ldots + b_n^\nu\, x^n = y^\nu \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\} \\ & \Longrightarrow\; x^\nu = \frac{\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \overbrace{\mathbf{y}}^{\nu\text{-te Stelle}}, \ldots, \mathbf{b}_n)}{\det\left(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\right)} \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}\,. \end{aligned}}$$

Übungsaufgabe E17 Man zeige, daß aus der CRAMERschen Regel tatsächlich

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ folgt.

Übungsaufgabe E18 Sei $\hat{D}$ eine reelle isometrische $n \times n$-Matrix. Man zeige:

a) $\hat{D}^{\mathrm{T}} = \hat{D}^{-1}$.

b) $\det\left(\hat{D}^{\mathrm{T}}\right) = \det(\hat{D})$.

c) $\det(\hat{D}) \in \{+1, -1\}$.

d) Für ungerades n gilt:

$$\det(\hat{D}) = +1 \;\Longrightarrow\; \det\left(\hat{D} - \hat{1}\right) = 0\,.$$

Übungsaufgabe E19 Man zeige, daß jede (reelle) 3×3-Drehmatrix einen (reellen) Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt und interpretiere diesen Sachverhalt geometrisch.

Übungsaufgabe E20 Man zeige für beliebiges

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$$

mit Eigenwert E :

a)
$$\hat{A} \begin{pmatrix} \delta - E \\ -\gamma \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \delta - E \\ -\gamma \end{pmatrix} , \quad \hat{A} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha - E \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha - E \end{pmatrix} .$$

b) Im Falle $\operatorname{Spur}(\hat{A} - E) \neq 0$ ist mindestens einer der beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} \delta - E \\ -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha - E \end{pmatrix}$$

von Null verschieden und somit (gemäß a)) Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert E .

Übungsaufgabe E21 Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der

$$\text{Hadamard-}\boldsymbol{Matrix} \quad \mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

interpretiere die normierten Eigenvektoren als Jones-Vektoren und diskutiere die entsprechenden Polarisationszustände.[3]

Übungsaufgabe E22 Seien V ein endlichdimensionaler Euklidischer komplexer Vektorraum und $\hat{B}$ ein linearer Operator auf V . Man zeige:

a) Wenn $\hat{B}$ unitär ist, dann existiert ein selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ auf V mit $\hat{B} = e^{i\hat{A}}$.

b) Es gilt:[4]
$$\hat{B} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\langle \mathbf{z} \middle| \hat{B}\, \mathbf{z} \right\rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V .$$

c) Wenn $\hat{B}$ ***positiv*** ist, d.h. wenn $\hat{B} \geq 0$ gilt, und wenn $\hat{B}$ außerdem invertierbar ist, dann existiert genau ein selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ auf V mit $\hat{B} = e^{\hat{A}}$.

[3]**Hinweis:** $\mathbb{H} = \hat{\tau}^1\, D(\pi/4)$.

[4]Es sei daran erinnert, daß $\hat{B} \geq 0$ definitionsgemäß genau dann gilt, wenn $\hat{B}$ selbstadjungiert ist und nur nichtnegative Eigenwerte besitzt (siehe Fußnote 41 von Kapitel 7).

d) Für jeden linearen Operator $\hat{A}$ auf V gilt

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad \Longrightarrow \quad \det\left(e^{z\,\hat{A}}\right) = e^{z\,\mathrm{Spur}(\hat{A})} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Übungsaufgabe E23 Man zeige:

a) Jede der Mengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{A} \in L\left(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2\right) : \hat{A} \text{ invertierbar}\right\}\,,\\
\mathrm{U}(2) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{U} \in L\left(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2\right) : \hat{U} \text{ unitär}\right\}\,,\\
\mathrm{SU}(2) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{U} \in \mathrm{U}(2) : \det\left(\hat{U}\right) = 1\right\}\,,\\
\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{A} \in L\left(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2\right) : \det\left(\hat{A}\right) = 1\right\}
\end{aligned}$$

ist eine Gruppe[5] bzgl. der Matrizen-Multiplikation.

b)

$$\mathrm{U}(2) = \left\{e^{i\varphi}\,\hat{U} : \varphi \in \mathbb{R}\,,\, \hat{U} \in \mathrm{SU}(2)\right\}\,.$$

c)

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{\sigma\, e^{-i\,\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}} : \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^3\,,\, \sigma \in \{-1,+1\}\right\}\,.$$

d)

$$\left\{\hat{B} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : \hat{B} \geq 0\right\} = \left\{\lambda\, e^{-\boldsymbol{\chi}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}} : \lambda > 0\,,\, \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^3\right\}\,.$$

e)

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{\hat{U}\, e^{-\frac{\chi}{2}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{e}} : \hat{U} \in \mathrm{SU}(2)\,,\, \chi \in \mathbb{R}\,,\, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3\,,\, \|\mathbf{e}\| = 1\right\}\,.$$

Übungsaufgabe E24 Man zeige[6] für alle $x_0,\ldots,x_3 \in \mathbb{C}$ und jede 2×2-Matrix $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \sum_{\nu=0}^{3} x_\nu\,\hat{\tau}^\nu \quad \Longleftrightarrow \quad x_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\hat{x}\,\hat{\tau}^\mu\right) \quad \forall\,\mu \in \{0,\ldots,3\}\,.$$

Übungsaufgabe E25 Man zeige für alle $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\mathbf{e}| = 1$:

[5] Eine Menge G ist eine ***Gruppe*** bzgl. der Verknüpfung $\cdot$, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
&1.: \quad g_1 \cdot g_2 \in G \quad \forall\, g_1, g_2 \in G\,.\\
&2.: \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \quad \forall\, g_1, g_2, g_3 \in G\,.\\
&3.: \quad \exists\, e \in G : e \cdot g = g \cdot e \quad \forall\, g \in G\,.\\
&4.: \quad \forall\, g \in G\; \exists\, g^{-1} \in G : g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1}\,.
\end{aligned}$$

[6] Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

a) $\left(\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right)^2 = \hat{1}\,.$

b) $e^{-i\,\varphi\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}} = \cos\varphi\,\hat{1} - i\,\sin\varphi\;\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\,\varphi\in\mathbb{C}\,.$

c) $e^{-\chi\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}} = \cosh\chi\,\hat{1} - \sinh\chi\;\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\,\chi\in\mathbb{C}\,.$

Hinweis zu b) und c): Allgemein zeige man mithilfe von a) für Potenzreihen $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, z^\nu$ mit unendlichem Konvergenzradius:

$$f\left(\theta\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = \frac{f(\theta)+f(-\theta)}{2}\,\hat{1} + \frac{f(\theta)-f(-\theta)}{2}\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\,.$$

Zur Erinnerung (siehe Fußnote 9 von Kapitel 3):

$$\sinh\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(\lambda)-\exp(-\lambda)}{2}\,, \quad \cosh\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(\lambda)+\exp(-\lambda)}{2}\,.$$

Übungsaufgabe E26 Man zeige für alle $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\hat{D}_{-\frac{\alpha}{2}}\,\hat{\tau}^j\,\hat{D}_{+\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} \sin\alpha\,\hat{\tau}^3 + \cos\alpha\,\hat{\tau}^1 & \text{für } j=1\,,\\ \hat{\tau}^2 & \text{für } j=2\,,\\ \cos\alpha\,\hat{\tau}^3 - \sin\alpha\,\hat{\tau}^1 & \text{für } j=3\,.\end{cases}$$

Übungsaufgabe E27 Man zeige für alle $\varphi\in\mathbb{R}$:

$$e^{+i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\,\hat{\tau}^j e^{-i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3} = \begin{cases} \cos\varphi\,\hat{\tau}^1 - \sin\varphi\,\hat{\tau}^2 & \text{für } j=1\,,\\ \sin\varphi\,\hat{\tau}^1 + \cos\varphi\,\hat{\tau}^2 & \text{für } j=2\,,\\ \hat{\tau}^3 & \text{für } j=3\,.\end{cases}$$

Übungsaufgabe E28 Sei $\hat{U}\in\mathrm{SU}(2)$ und sei $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Man zeige:

a) Es existieren $\alpha,\psi_1,\psi_2\in\mathbb{R}$ mit[7]

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{+i\psi_1}\cos\frac{\alpha}{2} & -e^{-i\psi_2}\sin\frac{\alpha}{2}\\ e^{+i\psi_2}\sin\frac{\alpha}{2} & e^{-i\psi_1}\cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}\,.$$

b) Es existieren EULER***sche Winkel*** $\varphi_1,\varphi_2,\alpha\in\mathbb{R}$ mit[8]

$$\hat{U} = e^{-i\,\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\,\hat{S}_{\varphi_1}\,\hat{D}_{\frac{\alpha}{2}}\,\hat{S}_{\varphi_2}\,.$$

[7]**Hinweis:** Man beachte, daß isometrische Matrizen Orthonormalsysteme auf Orthonormalsysteme abbilden und überlege, was das für die Spalten solcher Matrizen bedeutet.

[8]Siehe auch (Tilma und Sudarshan, 2002).

Übungsaufgabe E29 Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\hat{A}\,,\hat{B}$ lineare Operatoren auf V mit

$$\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-,\hat{A}\right]_- = \left[\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-,\hat{B}\right]_- = 0\,.$$

Man zeige für alle $N \in \mathbb{N}$:

a)
$$\left[\hat{B}^N,\hat{A}\right]_- = -\left[\hat{A},\hat{B}\right]_- \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^N\right)_{|x=\hat{B}}\,.$$

b)
$$:\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^N:\left(\hat{A}+\hat{B}\right) \quad = \quad :\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N+1}: -N\left[\hat{A},\hat{B}\right]_- :\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N-1}:,$$

wobei:
$$:\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^n: \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\hat{A}^\nu\,\hat{B}^{n-\nu} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

c)
$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^N = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^\nu :\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu}x^N\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}}:\,.$$

d) Es gilt die BAKER-HAUSDORFF-***Formel***:
$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]_-}\,e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}$$
(siehe auch Gleichung 3.55 von (Lücke, qip)).

Übungsaufgabe E30 Sei $\hat{A}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Man zeige, daß mindestens vier verschiedene selbstadjungierte $\hat{B}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $\hat{B}^2 = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ existieren.

Übungsaufgabe E31 Man bestimme die Polarzerlegung von $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0\end{pmatrix}$.

Übungsaufgabe E32 Man bestimme alle Polarzerlegungen von $\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Übungsaufgabe E33 Man zeige[9] für alle $a,b,c,d\in\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& +d^*\,,\\ b &=& -c^*\,,\\ 1 &=& |a|^2+|b|^2\,.\end{array}\right.$$

[9]**Hinweis:** Man beachte Aufgabe E28a).

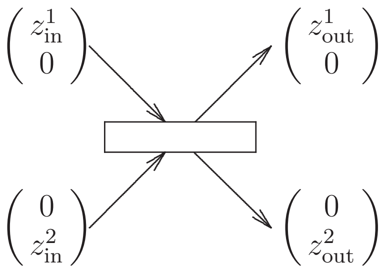
Übungsaufgabe E34 Man denke sich die Wirkung eines einfachen (linearen, verlustfreien, polarisationsunabhängigen) Strahlteilers mithilfe der unitären Matrix

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}$$

durch

$$\begin{pmatrix} z^1_{\text{in}} \\ z^2_{\text{in}} \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} z^1_{\text{out}} \\ z^2_{\text{out}} \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} z^1_{\text{in}} \\ z^2_{\text{in}} \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei sich das vom Strahlteiler transformierte System im 'Zustand' $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oberhalb, im 'Zustand' $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dagegen unterhalb des Strahlteiler befindet:



a) Man zeige, daß für

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \arg(r) - \arg(t) \ , \quad \delta' \stackrel{\text{def}}{=} \arg(r') - \arg(t')$$

stets

$$\delta + \delta' = \pi \bmod 2\pi$$

gilt.

b) Man bestimme die allgemeine Form von $\hat{S}$ für symmetrische Strahlteiler, d.h. für $r' = r$ und $t = t'$.

c) Man bestimme die allgemeine Form von $\hat{S}$ für symmetrische 50/50-Strahlteiler, d.h. für symmetrische Strahlteiler mit $|r| = |t|$.

Übungsaufgabe E35 Sei $\hat{S}$ die Matrix eines 50/50-Strahlteilers $\big(|r| = |t|\big)$ im Sinne von Aufgabe E34.

a) Man zeige

$$r\,r' + t\,t' = 0\,.$$

b) Man zeige, daß $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\hat{S} = e^{i\varphi_0}\, \hat{S}_{\varphi_1} \hat{H}\, \hat{S}_{\varphi_2}\,,$$

wobei

$$\hat{S}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \,, \quad \hat{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \,.$$

c) Welche Werte können φ_1 und φ_2 für symmetrische 50/50-Strahlteiler annehmen?

Übungsaufgabe E36 Seien $n \in \mathbb{N}$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis des komplexen EUKLIDischen Vektorraumes V und $\hat{A}$ ein normaler Operator auf V.

Man zeige mithilfe des Spektralsatzes, daß ein — i.a. nicht eindeutiger — unitärer Operator $\hat{U}$ auf V existiert mit

$$\left(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\right)\mathbf{e}_\nu \propto \mathbf{e}_\nu \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\} \,.$$

Übungsaufgabe E37 Sei $\hat{A}$ eine ***normale***, d.h. der Bedingung

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{A}\,\hat{A}^\dagger$$

genügende $n \times n$-Matrix.

Man zeige, daß eine ***unitäre***, also der Bedingung

$$\hat{U}^\dagger\,\hat{U} = \hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{1}$$

genügende, $n \times n$-Matrix $\hat{U}$ existiert, die $\hat{A}$ ***diagonalisiert***, d.h. mit der

$$\hat{U}\,\hat{A}\,\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_n \end{pmatrix} .$$

für geeignete $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{C}$ gilt.

Übungsaufgabe E38 Seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum mit dem inneren Produkt $\langle . \mid . \rangle$ und $\hat{A}$ ein normaler Operator auf V. Man zeige:

a) Folgende drei Aussagen sind zueinander äquivalent:

1. $\hat{A}$ hat nur positive Eigenwerte.
2. Es existiert ein invertierbarer linearer Operator $\hat{B}$ auf V mit $\hat{A} = \hat{B}^\dagger \hat{B}$.
3. Es gilt
$$\left\langle \mathbf{z} \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z} \right\rangle > 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in V \setminus \{0\} \,.$$

b) **Falls** $\hat{A} \geq 0$, dann gilt bzgl. jeder Basis von V

$$A^1{}_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^1{}_\nu = A^\nu{}_1 = 0 \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\} \; .$$

Übungsaufgabe E39 Seien V ein endlichdimensionaler, komplexer, EUKLIDischer Vektorraum und $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V.

Man zeige, daß folgende beiden Aussagen zueinander äquivalent sind:

1. $\hat{A}$ ist selbstadjungiert und zu sich selbst invers.

2. $\hat{A}$ ist unitär und seine Eigenwerte können nur +1 und/oder -1 sein.

Übungsaufgabe E40 Man zeige: Die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer m-elementigen Menge auszuwählen, entspricht folgender Tabelle:[10]

Anzahl	Beachtung der Reihenfolge	Wiederholungen
m^k	mit	mit
$\binom{m}{k} k! = \prod_{j=0}^{k-1} (m-j)$	mit	ohne
$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$	ohne	ohne
$\binom{m+k-1}{m-1} = \binom{m+k-1}{k}$	ohne	mit

Übungsaufgabe E41

Die Wahrscheinlichkeitstheorie bezieht sich stets auf eine ausgewählte Menge Ω von ***Elementarereignisse***n ω, deren („meßbare") Teilmengen E als ***Ereignisse*** bezeichnet werden. Die ***Wahrscheinlichkeit*** $p_\mu(E)$ dafür, daß $\omega \in E$ für ein *zufällig* ausgewähltes Elementarereignis ω gilt, ist für endliches $\Omega \neq \emptyset$ definitionsgemäß

$$p_\mu(E) = \sum_{\omega \in E} \mu(\omega) \quad \forall\, E \subset \Omega \,,$$

[10] Man beachte die Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{m}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}\,,\ k \in \{0, \ldots, m\} \; .$$

Z.B. die Anzahl aller möglichen Lottotipps (6 aus 49) ist dementsprechend $\binom{49}{6} = 13983816$.

wobei μ eine (dem statistischen Modell entsprechend[11]) vorgegebene ***Wahrscheinlichkeitsverteilung*** ist, d.h.[12] eine Abbildung von Ω in die nichtnegativen Zahlen mit

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) = 1\,.$$

Dafür zeige man:

a) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$p_\mu(\emptyset) = 0\,, \quad p_\mu(\Omega) = 1$$

und

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \implies p_\mu(E_1 \cup E_2) = p_\mu(E_1) + p_\mu(E_2) \qquad \forall\, E_1, E_2 \subset \Omega\,.$$

b) Es gilt

$$p_\mu(\{\omega\}) = \mu(\omega) \in [0,1] \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

und

$$\mu \text{ konstant } \implies p_\mu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|E|}{|\Omega|} \qquad \forall\, E \subset \Omega\,,$$

wobei $|E|$ jeweils die Anzahl der Elemente von E bezeichnet.

Übungsaufgabe E42 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Lottotipp (6 aus 49) genau 5 der Ergebniszahlen einer Lottoziehung enthält?

Übungsaufgabe E43 Das sog. ***Monty-Hall-Problem*** besteht darin, sich für eine von zwei Strategien A oder B für folgende Variante eines Spiels der amerikanischen TV-Show „Let's Make A Deal" zu entscheiden:

- Der Spielleiter Monty Hall wählt rein zufällig eine von drei Türen aus, hinter der er unbeobachtet einen Preis deponiert, den ein Spieler erhält, wenn er die richtige Tür errät.
- Der Spieler wird aufgefordert, sich für eine Tür zu entscheiden.
- Nachdem der Spieler sich für eine Tür entschieden hat, öffnet Monty eine der beiden anderen Türen, hinter der der Preis nicht deponiert ist, und gibt dem Spieler die Chance, sich eventuell noch umzuentscheiden.

[11] Bei N-facher Wiederholung der Zufallsauswahl sollte die relative Anzahl der Fälle, in denen ein vorgegebenes $\omega \in \Omega$ resultiert, für $N \to \infty$ gegen $\mu(\omega)$ konvergieren.

[12] Für unendliche *Wahrscheinlichkeitsräume* sind die Wahrscheinlichkeitsmaße i.a. nicht mehr für einzelne Elementarereignisse definiert.

Für welche der folgenden beiden Strategien[13] ist die Wahrscheinlichkeit größer, den Preis zu gewinnen?

Strategie A: Der Spieler entscheidet sich für Tür 1 und bleibt dabei, ganz gleich, welche der beiden anderen Türen Monty öffnet.

Strategie B: Der Spieler entscheidet sich zunächst für Tür 1, entscheidet sich danach aber auf jeden Fall um für diejenige der Türen 2 oder 3, die Monty nicht öffnet.

Übungsaufgabe E44 Seien Ω und μ wie in Aufgabe E41 und $E_1, E_2 \subset \Omega$. Man nennt die (Zufalls-)Ereignisse E_1, E_2 ***(statistisch) unabhängig*** voneinander, wenn $p_\mu(E_1 \cap E_2) = p_\mu(E_1)\, p_\mu(E_2)$ gilt. Im Falle $p_\mu(E_2) \neq 0$ bezeichnet man

$$p_\mu(E_1|E_2) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_\mu(E_1 \cap E_2)}{p_\mu(E_2)}$$

als die ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** dafür, daß auch E_1 eintritt, wenn E_2 eintritt.

Man zeige:[14]

a)
$$p_\mu(E_1 \cap E_2) = \begin{cases} p_\mu(E_1|E_2)\, p_\mu(E_2)\,, & \text{falls } p_\mu(E_2) \neq 0\,, \\ p_\mu(E_2|E_1)\, p_\mu(E_1)\,, & \text{falls } p_\mu(E_1) \neq 0\,. \end{cases}$$

b)
$$p_\mu(E_1) = p_\mu(E_1|E_2)\, p_\mu(E_2) + p_\mu(E_1|\Omega \setminus E_2)\, p_\mu(\Omega \setminus E_2)\,,$$
falls $p_\mu(E_2) \in (0,1)$.

c)
$$E_1, E_2 \text{ unabhängig} \iff \begin{cases} p_\mu(E_1|E_2) = p_\mu(E_1)\,, & \text{falls } p_\mu(E_2) \neq 0\,, \\ p_\mu(E_2|E_1) = p_\mu(E_2)\,, & \text{falls } p_\mu(E_1) \neq 0\,. \end{cases}$$

d)
$$E_1\,,\, E_2 \text{ unabhängig} \implies E_1\,,\, \Omega \setminus E_2 \text{ unabhängig}\,.$$

e)
$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \Omega_{\mathrm{A}} \times \Omega_{\mathrm{B}} \\ E_{\mathrm{A}} \in \Omega_{\mathrm{A}} \\ E_{\mathrm{B}} \in \Omega_{\mathrm{B}} \\ \mu \text{ konstant} \end{array}\right\} \implies E_{\mathrm{A}} \times \Omega_{\mathrm{B}}, \Omega_{\mathrm{A}} \times E_{\mathrm{B}} \text{ unabhängig}\,.$$

[13] **Hinweis:** Man beachte, daß hier das Wahrscheinlichkeitsmodell in der Bezeichnungsweise von Aufgabe E41 durch $\Omega = \{$Tür 1,Tür 2,Tür 3$\}$ mit konstantem μ gegeben ist und überlege sich, auf welche Ereignisse $E_{\mathrm{A}}, E_{\mathrm{B}}$ die beiden Strategien abzielen. Sie können das Ergebnis testen unter `http://people.hofstra.edu/staff/steven_r_costenoble/MontyHall/MontyHallSim.html`

[14] Die Aussage $p_\mu(E_1|E_2)\, p_\mu(E_2) = p_\mu(E_2|E_1)\, p_\mu(E_1)$ wird auch als ***Satz von*** BAYES bezeichnet.

Übungsaufgabe E45 Wenn jedem $\omega \in \Omega$ der Wert $a(\omega)$ einer physikalischen Größe A zugeordnet ist, dann bezeichnet man — unter den Voraussetzungen von Aufgabe E41 — a als ***Zufallsvariable***,[15]

$$\langle A \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} a(\omega)\,\mu(\omega)$$

als ***Erwartungswert*** von A (für die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ) und

$$(\Delta A)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} \Big(a(\omega) - \langle A \rangle\Big)^2 \mu(\omega)$$

als ***mittlere quadratische Abweichung*** der Größe A von ihrem Erwartungswert.

Man zeige:

a)

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \Big(\langle A \rangle\Big)^2 .$$

b)

$$\Delta A = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\mu(\omega) \neq 0 \implies a(\omega) = \langle A \rangle\Big) \quad \forall\, \omega \in \Omega\,.$$

c) Im Grenzfall $N \to \infty$ sollte der Mittelwert von A für die Zufallsauswahl $\omega_1, \ldots, \omega_N \in \Omega$ in den Erwartungswert übergehen:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a(\omega_n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \langle A \rangle \;.$$

d) Wenn a_1, a_2 Zufallsvariable der Größen A_1, A_2 gleicher physikalischer Dimension sind (z.B. kinetische und potentielle Energie), dann ist $a = a_1 + a_2$ die Zufallsvariable von $A = A_1 + A_2$ und dafür gilt

$$\langle A_1 + A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle \;.$$

Übungsaufgabe E46 Seien $N \in \mathbb{N}\,, \overline{n} \in [0, N]\,, \Omega = \Big\{\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N) \in \{0,1\}^N\Big\}$ und es gelte

$$p_\mu(E_\nu) = \frac{\overline{n}}{N} \qquad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, N\} \;,$$

Version vom 26. März 2009

[15] Zwei solche Zufallsvariable nennt man in dem durch μ charakterisierten Zustand ***unkorreliert*** (miteinander), falls

$$p_\mu\Big(\{\omega \in \Omega :\; a_j(\omega) = \lambda_j \text{ für } j = 1,2\}\Big) = \prod_{j=1}^{2} p_\mu\Big(\{\omega \in \Omega :\; a_j(\omega) = \lambda_j\}\Big) \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2\,.$$

wobei

$$E_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \in \Omega :\, b_\nu = 1\} \quad \forall\, \nu \in \{1, \dots, N\}\ .$$

Für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ sowie für jedes $E \subset \Omega$ mit[16]

$$\mathbf{b} \in E \implies (b_1, \dots, b_\nu \oplus 1, \dots, b_N) \in E \quad \forall\, \mathbf{b} \in \Omega$$

seien die Ereignisse E_ν, E statistisch unabhängig.

Man zeige:

a)

$$\mu(\mathbf{b}) = \prod_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\overline{n}}{N}\, \delta_{1\, b_\nu} + \left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right) \delta_{0\, b_\nu} \right) \quad \forall\, \mathbf{b} \in \Omega\, .$$

b)

$$\begin{aligned} \mu'_N(n) &\stackrel{\text{def}}{=} p_\mu\Big(\{\mathbf{b} \in \Omega :\, b_1 + \ldots + b_N = n\}\Big) \\ &= \binom{N}{n} \left(\frac{\overline{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{N-n} \qquad \forall\, n \in \{0, \dots, N\}\ . \end{aligned}$$

c) Es gilt tatsächlich

$$\sum_{\mathbf{b} \in \Omega} \mu(\mathbf{b}) = 1\, .$$

d)

$$F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} (1+\xi)^n\, \mu'_N(n) = \left(1 + \xi\, \frac{\overline{n}}{N}\right)^N \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\, .$$

e) Für die Zufallsvariable

$$n(\mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} b_1 + \ldots + b_N \quad \forall\, \mathbf{b} \in \Omega$$

gilt[17]

$$\langle n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{b} \in \Omega} n(\mathbf{b})\, \mu(\mathbf{b}) = \sum_{n=0}^{N} n\, \mu'_N(n) = \overline{n}\, .$$

Version vom 26. März 2009

[16] Mit $b_\nu \oplus 1$ bezeichnet man i.a. die Modulo-2-Addition:

$$b_\nu \oplus 1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } b_\nu = 0\, , \\ 0 & \text{für } b_\nu = 1\, . \end{cases}$$

[17] **Hinweis:** Man untersuche die Ableitung von $F(\xi)$ an der Stelle $\xi = 0$.

f) Die ***Binomialverteilung*** (Bernoulli-***Verteilung***) $\mu'_N(n)$ auf $\{1,\ldots,N\}$ geht für $N\to\infty$ bei festem $\langle n\rangle$ in eine Poisson-***Verteilung*** über:[18]

$$\mu'_N(n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\langle n\rangle\, e^{-\langle n\rangle}}{n!} \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}_+\,.$$

Übungsaufgabe E47 Gegeben sei eine Massendichte-Verteilung $\mu(\mathbf{x})$ mit

$$\mu(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } |\mathbf{x}| > R.$$

Das zugehörige Gravitationspotential ist dann

$$\Phi(\mathbf{x}') = -\mathrm{G}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R \frac{\mu\Big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)|} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi\,,$$

wobei r,ϑ,φ die Polarkoordinaten von $\mathbf{x}$ bezeichnen.

a) Man zeige, daß für $r'\gg R$ die Reihenentwicklung

$$\Phi\left(r'\mathbf{e}_3\right) = -\frac{\mathrm{G}}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q_l}{(r')^l}\,,$$

$$Q_l \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R r^{2+l}\sin\vartheta\,P_l(\cos\vartheta)\,\mu\Big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi\,,$$

(***Multipolentwicklung***) mit geeigneten Polynomen P_l gilt.[19] Man bestimme P_0, P_1, P_2 und diskutiere das Ergebnis.

b) Man zeige, daß für kugelsymmetrisches μ nur Q_0 von Null verschieden ist:[20]

$$\mu(\mathbf{x}) = \check{\mu}(|\mathbf{x}|) \implies Q_l = 0 \quad \forall\, l\in\mathbb{N}\,.$$

Übungsaufgabe E48 Seien $\mathcal{H}_1$ resp. $\mathcal{H}_2$ (komplexe) Euklidische Vektorräume mit den Normen $\|.\|_1$ resp. $\|.\|_2$ und sei f eine **lineare** Abbildung von $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$. Man zeige:

[18]**Hinweis:** Man beachte, daß

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\xi}{N}\right)^N = e^{\xi} \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\,.$$

[19]**Hinweis:** Man untersuche die Taylor-Entwicklung von $\dfrac{r'}{|r'\,\mathbf{e}_3-\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)|}$ nach $\dfrac{r}{r'}$.

[20]**Hinweis:** Man berechne zunächst $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{(r')^2-2\,r\,r'\,\cos\vartheta+r^2}}\,\mathrm{d}\vartheta$ für $r'>r$.

a) Die Abbildung f ist genau dann stetig (im Sinne von Definition 7.1.11), wenn sie ***beschränkt*** ist, d.h. wenn zu jedem $A > 0$ ein $C > 0$ existiert mit

$$\|\Psi\|_1 < A \implies \|f(\Psi)\|_2 < C \qquad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}_1 \,.$$

b) Wenn $\mathcal{H}_1$ endlichdimensional ist, dann ist f beschränkt.

Übungsaufgabe E49 Seien $\mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler EUKLIDischer Vektorraum und B eine Bilinearform auf $\mathcal{H}$. Man zeige, daß B beschränkt ist, d.h. daß zu jedem $A > 0$ ein $C > 0$ existiert mit

$$\|\Psi_1\| < A > \|\Psi_2\| \implies |B(\Psi_1, \Psi_2)| < C \qquad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in V \,.$$

Übungsaufgabe E50 Seien N eine natürliche Zahl und $\varphi > 0$.

a) Man bestimme die FOURIER-Reihenentwicklung

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle e_\nu \mid f \rangle \; e_\nu$$

der Funktion

$$f(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\varphi)\,\cos(N\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}\,,$$

wobei definitionsgemäß

$$\langle e_\nu \mid f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(e_\nu(\varphi)\Big)^* f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

und

$$e_\nu(\varphi) = e^{+i\,\nu\,\varphi}$$

gilt (siehe Abschnitt 8.1.1 der Vorlesung).

b) Man gebe eine physikalische Interpretation des Ergebnisses für den Fall, daß φ linear von der Zeit abhängt.

Übungsaufgabe E51 Sei $f(\varphi)$ eine 2π-periodische stetige Funktion über $\mathbb{R}^1$. Gemäß Abschnitt der 8.1.1 Vorlesung gilt dafür

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{\nu=-N}^{+N} \langle e_\nu \mid f \rangle \, e_\nu \right\|^2 \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\varphi) - \sum_{\nu=-N}^{+N} \langle e_\nu \mid f \rangle \, e^{i\nu\varphi} \right|^2 \mathrm{d}\varphi \\ &\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Sei weiterhin $g(\varphi)$ eine beschränkte 2π-periodische Funktion $g(\varphi)$ über $\mathbb{R}^1$, die in dem offenen Intervall $(-\pi, \pi)$ stetig ist und dort mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} f(\varphi)$ übereinstimmt. Man zeige:

a) Für alle $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt[21]

$$\langle e_\nu \mid f \rangle = \frac{1}{i\,\nu} \langle e_\nu \mid g \rangle \,.$$

b) Für jede endliche Teilmenge M von $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$\sum_{\nu \in M} |\langle e_\nu \mid f \rangle| \le \sqrt[+]{\sum_{\nu \in M} \left(\frac{1}{\nu}\right)^2} \sqrt[+]{\sum_{\nu \in M} |\langle e_\nu \mid g \rangle|^2} \,.$$

und

$$\sum_{\nu \in M} |\langle e_\nu \mid g \rangle|^2 \le \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\langle e_\nu \mid g \rangle|^2 < \infty \,.$$

c) Es gilt die punktweise Fourier-Reihenentwicklung

$$f(\varphi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle e_\nu \mid f \rangle \, e^{i\nu\varphi} \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R} \,,$$

wobei die Reihe absolut (und somit auch gleichmäßig) konvergiert.

Übungsaufgabe E52 Mithilfe der punktweisen Fourier-Reihenentwicklung zeige man:

a)

$$\varphi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\varphi) \quad \forall\, \varphi \in [-\pi, +\pi] \,.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \,.$$

Version vom 26. März 2009

[21] Wir verwenden die Schreibweise

$$\langle f \mid g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\varphi)\, g(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

für alle hinreichend gutartigen Funktionen $f(\varphi), g(\varphi)$.

Übungsaufgabe E53 Seien $\mathcal{H}$ ein **endlich**dimensionaler EUKLIDischer Vektorraum, $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $\psi \in \mathcal{H}$. Man zeige:

$$w - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad s - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi\,.$$

Übungsaufgabe E54 Man zeige, daß jeder **endlich**dimensionale EUKLIDische Vektorraum vollständig, also ein HILBERT-Raum ist.

Übungsaufgabe E55 Seien $\mathcal{H}$ ein **endlich**dimensionaler EUKLIDischer Vektorraum und $\Psi(t)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$. Man zeige:

$$\Psi(t) \text{ schwach differenzierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(t) \text{ stark differenzierbar}\,.$$

Übungsaufgabe E56 Seien $\mathcal{H}$ ein separabler HILBERT-Raum und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Man zeige:

a) Es existiert genau ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\Psi = \mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu\,.$$

b) Damit ist $\{\Phi_\nu\}_{\nu\geq 2}$ ein MONS des EUKLIDischen Teilraums

$$\check{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\Big(\{\Psi, \Phi_2, \Phi_3, \ldots\}\Big)$$

von $\mathcal{H}$.

c) Trotzdem ist

$$\Psi \neq \sum_{\nu\geq 2} \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\nu\,.$$

Übungsaufgabe E57 Seien $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $\hat{A}$ ein (eventuell unbeschränkter) Operator **in** $\mathcal{H}$. Man zeige:

a) Es gilt die Verallgemeinerung

$$\left.\begin{aligned}
\Big\langle \Psi_1 \Big| \hat{A}\,\Psi_2 \Big\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k} \Big\langle \Psi_1 + i^k \Psi_2 \Big| \hat{A}\left(\Psi_1 + i^k \Psi_2\right) \Big\rangle \\
\Big\langle \hat{A}\,\Psi_1 \Big| \Psi_2 \Big\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k} \Big\langle \hat{A}\left(\Psi_1 + i^k \Psi_2\right) \Big| \Psi_1 + i^k \Psi_2 \Big\rangle
\end{aligned}\right\} \quad \forall\, \Psi_j \in D_{\hat{A}}$$

der Polarisationsidentität (Gleichung (7.22) der Vorlesung).

b) $\hat{A}$ ist genau dann HERMITEsch, wenn

$$\mathbb{R} \ni \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi \right\rangle \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}}$$

gilt.

Übungsaufgabe E58 Seien $\mathcal{H}$ ein separabler HILBERT-Raum und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Für den durch

$$D_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}$$

und

$$\hat{A}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle\, \Phi_{\nu+1} \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}}$$

gegebenen Operator zeige man:

a) $\hat{A}$ ist isometrisch und genügt somit der Bedingung

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{1}\,.$$

b) $\hat{A}$ ist invertierbar, d.h. es existiert genau ein Operator $\hat{A}^{-1}$ in $\mathcal{H}$ mit $D_{\hat{A}^{-1}} = R_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \hat{A}\,\Phi :\, \Phi \in D_{\hat{A}} \right\}$ und:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1}\hat{A}\,\Psi &= \Psi \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}}\,, \\ \hat{A}\,\hat{A}^{-1}\Psi &= \Psi \quad \forall\,\Psi \in R_{\hat{A}}\,. \end{aligned}$$

c) $\hat{A}$ ist aber **nicht unitär**, denn es gilt $R_{\hat{A}} \neq \mathcal{H} = D_{\hat{A}^\dagger}$ und somit

$$\hat{A}^\dagger \neq \hat{A}^{-1} \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})\,.$$

Übungsaufgabe E59 Seien m eine Masse, L eine Länge und $C_0^\infty([0,L])$ die Menge aller auf $[0,L]$ beliebig oft ableitbaren komplexwertigen Funktionen Ψ, die in einer (jeweils von Ψ abhängigen) Umgebung von 0 und 1 verschwinden. Man zeige für den durch

$$D_{\hat{H}} \stackrel{\text{def}}{=} C_0^\infty([0,L]) \subset L^2([0,L])$$

und

$$\left(\hat{H}\,\Psi\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \Psi(x) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{H}}\,,\ x \in [0,L]$$

gegebenen HAMILTON-Operator $\hat{H}$:

a) $\hat{H}$ läßt sich **nicht** zu einem auf ganz $L^2([0,L])$ definierten HERMITEschen Operator fortsetzen.[22]

b) Es existiert eine eindeutige HERMITEsche Erweiterung $\hat{H}_{\text{per}}$ von $\hat{H}$ auf den Teilraum $C^\infty_{\text{per}}([0,L])$ all derjenigen Funktionen über $[0,L]$, die sich durch Einschränkung beliebig oft differenzierbarer Funktionen über $\mathbb{R}$ der Periode L ergeben.

c) Es existiert eine eindeutige HERMITEsche Erweiterung $\hat{H}_{\text{ref}}$ von $\hat{H}$ auf den Teilraum $C^\infty_{\text{ref}}([0,L])$ all derjenigen beliebig oft differenzierbarer Funktionen über $[0,L]$, die bei 0 und L verschwinden.

d) Es existiert ein MONS von $L^2([0,L])$, das nur aus Eigenfunktionen von $\hat{H}_{\text{per}}$ besteht.

e) Es existiert ein MONS von $L^2([0,L])$, das nur aus Eigenfunktionen von $\hat{H}_{\text{ref}}$ besteht.

f) $\hat{H}_{\text{per}}$ und $\hat{H}_{\text{ref}}$ besitzen keine gemeinsame Eigenfunktion.

Übungsaufgabe E60 Man zeige, daß der in Aufgabe E59 definierte Operator $\hat{H}$ zwar HERMITEsch aber **nicht** im wesentlichen selbstadjungiert ist.

Übungsaufgabe E61 Für $\mathcal{H} = \overline{C(S^1)}$ und den durch

$$
\begin{aligned}
D_{\hat{L}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in C(S^1) :\, f \text{ stetig differenzierbar} \right\} , \\
\left(\hat{L}\, f\right)(\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} f(\varphi) \quad \forall\, f \in D_{\hat{L}} \,,\, \varphi \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

gegebenen linearen Operator $\hat{L}$ in $\mathcal{H}$ zeige man:

a) $\hat{L}$ ist HERMITEsch.

b) Es existiert ein MONS von $\mathcal{H}$, das nur aus Eigenvektoren von $\hat{L}$ besteht.

c) Die Menge aller Eigenwerte von $\hat{L}$ ist $\{\hbar m :\, m \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\hat{L}$ ist unbeschränkt.

e) $D_{\hat{L}}$ und $D_{\hat{L}\hat{L}}$ liegen dicht in $\mathcal{H}$.

Version vom 26. März 2009

[22]**Hinweis:** Man untersuche

$$
\lim_{\lambda \to +\infty} \left\langle \Psi_\lambda \mid \hat{H}\, \Psi_\lambda \right\rangle \,, \quad \Psi_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}\, \Psi(\lambda\, x) \,,
$$

für $0 \neq \Psi \in D_{\hat{H}}$.

f)
$$D_{\hat{L}\hat{L}} \subset D_{\hat{L}} \not\subset D_{\hat{L}\hat{L}}\,.$$

g)
$$D_{\hat{L}^\dagger} = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m :\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hbar m\, \lambda^m|^2 < \infty \right\}.$$

h)
$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m \in D_{\hat{L}^\dagger} \quad \Longrightarrow \quad \hat{L}^\dagger \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m\, \lambda^m\, e_m\,.$$

i)
$$D_{\hat{L}} \subset D_{\hat{L}^\dagger} \not\subset D_{\hat{L}}\,.$$

j) $\hat{L}^\dagger$ ist selbstadjungiert.

k)
$$\hat{L}^\dagger = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m\, |e_m\rangle\langle e_m| \qquad (\textit{Spektralzerlegung}).$$

l)
$$\begin{aligned} \left\langle f \,\middle|\, \hat{L}^\dagger f \right\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m \left\langle f \,\middle|\, \hat{P}_{e_m} f \right\rangle \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m \left| \langle e_m \mid f \rangle \right|^2 \quad \forall\, f \in D_{\hat{L}^\dagger}\,. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe E62 Seien m eine Masse und ω eine Kreisfrequenz. Man zeige für
$$\Omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{m\,\omega}{\pi\,\hbar}\right) e^{-\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
und die durch
$$D_{\hat{H}_{\text{osc}}} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{A}^\dagger} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$
und
$$\left.\begin{aligned} \left(\hat{H}_{\text{osc}}\,\Psi\right)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^2 + \frac{m}{2}\,\omega^2\, x^2 \right) \Psi(x)\,, \\ \left(\hat{A}\,\Psi\right)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - i\, m\, \omega\, x}{\sqrt{2\, m\, \hbar\, \omega}}\, \Psi(x)\,, \\ \left(\hat{A}^\dagger\,\Psi\right)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + i\, m\, \omega\, x}{\sqrt{2\, m\, \hbar\, \omega}}\, \Psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad \forall\, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
gegebenen Operatoren $\hat{H}_{\text{osc}}$, $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ in $L^2(\mathbb{R})$:

a)
$$\hat{H}_{\text{osc}} = \hbar\,\omega \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) .$$

b)
$$\hat{H}_{\text{osc}}\,\Omega = \frac{\hbar\,\omega}{2}\,\Omega\,.$$

c)
$$\left[\hat{H}_{\text{osc}}\,, \left(\hat{A}^\dagger \right)^n \right]_- = n\,\hbar\,\omega \left(\hat{A}^\dagger \right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+\,.$$

d) Mit den in Folgerung 8.2.3 eingeführten HERMITEschen Polynomen
$$H_\nu(z) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\nu\, e^{z^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^\nu e^{-z^2} \quad \forall\, z \in \mathbb{R}\,,\ \nu \in \mathbb{Z}_+$$
gilt
$$H_n\!\left(x \sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}} \right) \Omega(x) \propto \left(\left(\hat{A}^\dagger \right)^n \Omega \right)(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+\,.$$

e) Es existiert ein MONS von $L^2(\mathbb{R})$, das nur aus Eigenfunktionen des HAMILTON-Operators $\hat{H}_{\text{osc}}$ besteht.

Übungsaufgabe E63 Für beliebige Vektoren Ψ, Φ des (komplexen) HILBERT-Raums $\mathcal{H}$ bezeichnet jeweils $|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|$ den durch
$$D_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}$$
und
$$|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|\,\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Psi_2 \mid \Phi \rangle\, \Psi_1 \quad \forall\, \Phi \in D_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|}$$
definierten Operator. Man zeige:
$$\Big(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| \Big)^\dagger = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_1| \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}\,.$$

Übungsaufgabe E64 Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer) HILBERT-Raum, $\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. Man zeige:
$$\hat{B}\,\Psi = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Phi_\mu \right\rangle |\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\mu| \right) \Psi \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

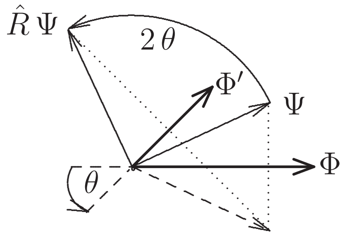
Übungsaufgabe E65 Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer) HILBERT-Raum und $\hat{P}_1, \hat{P}_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Projektionsoperatoren. Man zeige:

a)
$$\hat{P}_1 \hat{P}_2 \text{ Projektionsoperator } \iff \hat{P}_1 \hat{P}_2 = \hat{P}_2 \hat{P}_1 \,.$$

b)
$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 \text{ Projektionsoperator } \iff \hat{P}_1 \hat{P}_2 = 0 \,.$$

Übungsaufgabe E66 Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $\Phi, \Phi' \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Man zeige, daß $\hat{R} = \left(2\,\hat{P}_{\Phi'} - \hat{1}\right)\left(2\,\hat{P}_{\Phi} - \hat{1}\right)$ in dem von Φ und Φ' aufgespannten reellen Vektorraum entsprechend folgender Skizze wirkt:



Übungsaufgabe E67 Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer) Hilbert-Raum und $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Man zeige:

a) $\hat{A}\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und es gilt die ***Produkt-Ungleichung***
$$\left\|\hat{A}\hat{B}\right\| \le \left\|\hat{A}\right\| \cdot \left\|\hat{B}\right\| \,.$$

b) Es gilt
$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{\substack{\Phi,\Psi\in\mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left|\left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi \right\rangle\right|$$
und somit auch
$$\left\|\hat{A}\right\| = \left\|\hat{A}^\dagger\right\| \,.$$

c) Es gilt[23]
$$\hat{C}^\dagger = \hat{C} \quad \Longrightarrow \quad \left\|\hat{C}\right\| = \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H} \\ \Psi=1}} \left|\left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle\right| \qquad \forall\, \hat{C} \in \mathcal{B}\,(\mathcal{H})$$

[23]**Hinweis:** Man zeige zunächst für beliebige $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$:
$$\hat{C}^\dagger = \hat{C} \quad \Longrightarrow \quad \Re\left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle (\Phi+\Psi) \,\middle|\, \hat{C}\,(\Phi+\Psi)\right\rangle - \left\langle (\Phi-\Psi) \,\middle|\, \hat{C}\,(\Phi-\Psi)\right\rangle\right) \,.$$
Außerdem beachte man die sog. ***Parallelogramm-Gleichung***:
$$\|\Phi+\Psi\|^2 + \|\Phi-\Psi\|^2 = 2\left(\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2\right) \quad \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \,.$$

und somit die C^****-Identität***

$$\left\|\hat{A}^\dagger \hat{A}\right\| = \left\|\hat{A}\right\|^2$$

sowie

$$\left\|\hat{A}\hat{A}^\dagger\right\| = \left\|\hat{A}\right\|^2 .$$

Übungsaufgabe E68 Sei $\mathcal{H}$ (komplexer) HILBERT-Raum. Dann nennt man einen Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bzgl. der Operator-Norm ***vollständig***, wenn zu jeder Folge $\left\{\hat{A}_\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\nu,\mu\geq N} \left\|\hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu\right\| = 0$$

ein $\hat{A} \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\|\hat{A} - \hat{A}_\nu\right\| = 0 .$$

Man zeige:

a) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist vollständig bzgl. der Operator-Norm.

b) Der Teilraum $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ aller kompakten Operatoren ist vollständig bzgl. der Operator-Norm.

c) Die Operator-Norm ist im Falle $\dim(\mathcal{H}) > 1$ **nicht**[24] EUKLIDisch.

Übungsaufgabe E69 Seien $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Spektralschar für $\lambda_0 \hat{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Übungsaufgabe E70 Seien $\mathcal{H}$ ein (komplexer) HILBERT-Raum, $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ (nicht notwendig miteinander vertauschbare) Projektionsoperatoren auf $\mathcal{H}$ und $\Psi \in \mathcal{H}$. Man zeige:[25]

a)
$$\lim_{\nu\to\infty} \left\|\left(\hat{P}_1 \hat{P}_2\right)^\nu \Psi\right\| \quad \text{existiert} .$$

Version vom 26. März 2009

[24]**Hinweis:** Man zeige, daß Projektionsoperatoren $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ existieren mit

$$\left\|\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right\|^2 + \left\|\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right\|^2 \neq 2\left(\left\|\hat{P}_1\right\|^2 + \left\|\hat{P}_2\right\|^2\right) .$$

[25]**Hinweis zu d)–f):** Man zeige zunächst:

$$\left\|\hat{P}_1\hat{P}_2\Phi\right\| = \|\Phi\| \implies \Phi = \hat{P}_2\Phi = \hat{P}_1\hat{P}_2\Phi \qquad \forall\, \Phi \in \mathcal{H} .$$

b)

$$\left\langle \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \,\middle|\, \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\mu+1}\Psi \right\rangle = \left\langle \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu+1}\Psi \,\middle|\, \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\mu}\Psi \right\rangle \quad \forall\,\nu,\mu\in\mathbb{N}\,.$$

c)

$$\text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{2\nu}\Psi \quad \text{existiert}\,.$$

d)

$$\text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \quad \text{existiert}\,.$$

e)

$$\text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi = \text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\,.$$

f)

$$\boxed{\text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi = \left(\hat{P}_1\wedge\hat{P}_2\right)\Psi\,,}$$

wobei $\hat{P}_1\wedge\hat{P}_2$ den Projektionsoperator mit

$$\boxed{\left(\hat{P}_1\wedge\hat{P}_2\right)\mathcal{H} = \left(\hat{P}_1\,\mathcal{H}\right)\cap\left(\hat{P}_2\,\mathcal{H}\right)}$$

bezeichnet.

Übungsaufgabe E71 Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $\hat{A},\hat{B}$ Hermitesche Operatoren in $\mathcal{H}$. Man beweise mithilfe der Schwarzschen Ungleichung[26] die verschärfte Heisenbergsche Unschärferelation

$$\begin{aligned}
&\left\|(\hat{A}-a)\Psi\right\|^2\,\left\|(\hat{B}-b)\Psi\right\|^2\\
&\ge\;\frac{1}{4}\left|\left\langle\Psi\,\middle|\,[\hat{A},\hat{B}]_-\,\Psi\right\rangle\right|^2+\frac{1}{4}\left|\left\langle\Psi\,\middle|\,[\hat{A}-a,\hat{B}-b]_+\,\Psi\right\rangle\right|^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\forall\,\Psi\in D_{\hat{B}\hat{A}}\cap D_{\hat{A}\hat{B}}\,,\;a,b\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe E72 Sei $r>0$ eine beliebig vorgegebene Länge. Man zeige, daß die durch

$$D_{\hat{F}}\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

[26] Man beachte $\Im\left(\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\,\middle|\,(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right)=\frac{1}{2i}\left\langle\Psi\,\middle|\,\left[\hat{A}-a,\hat{B}-b\right]_-\,\Psi\right\rangle$ und die entsprechende Beziehung für $\Re\left(\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\,\middle|\,(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right)$.

und

$$\left(\hat{F}\,\Psi\right)(\mathbf{x}') \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi\, r^2)^{-\frac{3}{2}} \int \Psi(\mathbf{x})\, e^{-i\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{r^2}}\, dV_{\mathbf{x}} \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{F}}\,,\ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$$

gegebene (zur Angleichung der physikalischen Dimensionen) modifizierte FOURIER-Transformation $\hat{F}$ eine eindeutige Erweiterung zu einem unitären Operator $\overline{\hat{\mathrm{F}}}$ auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ besitzt.[27]

Übungsaufgabe E73 Man bestimme für den durch[28]

$$D_{\hat{p}_+} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}\Big((0,+\infty)\Big)$$

und

$$(\hat{p}_+\,\Psi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi(x) \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{p}_+}\,,\ x > 0$$

gegebenen Operator $\hat{p}_+$ in $L^2\Big((0,+\infty)\Big)$ die ***Defektindizes***[29]

$$n_\pm(\hat{p}_+) \stackrel{\text{def}}{=} \dim\left(\left\{\Psi \in D_{\hat{p}_+^\dagger} : \hat{p}_+^\dagger\,\Psi = \pm i\,\Psi\right\}\right).$$

Übungsaufgabe E74 Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ HILBERT-Räume, $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ ein ONS in $\mathcal{H}$ und $\{\Psi_1', \Psi_2'\}$ ein ONS in $\mathcal{H}'$. Man zeige:

a) Für

$$\check{\Psi}_{\text{sep}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1 \otimes \Psi_1'$$

und alle $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ gilt

$$\left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{A}\otimes\hat{A}'\right)\check{\Psi}_{\text{sep}}\right\rangle = \left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{A}\otimes\hat{1}\right)\check{\Psi}_{\text{sep}}\right\rangle\left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{1}\otimes\hat{A}'\right)\check{\Psi}_{\text{sep}}\right\rangle.$$

b) Für

$$\check{\Psi}_{\text{BELL}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1\otimes\Psi_2' - \Psi_2\otimes\Psi_1'\right)$$

existieren $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit

$$\left\langle \check{\Psi}_{\text{BELL}} \mid \left(\hat{A}\otimes\hat{A}'\right)\check{\Psi}_{\text{BELL}}\right\rangle \neq \left\langle \check{\Psi}_{\text{BELL}} \mid \left(\hat{A}\otimes\hat{1}\right)\check{\Psi}_{\text{BELL}}\right\rangle\left\langle \check{\Psi}_{\text{BELL}} \mid \left(\hat{1}\otimes\hat{A}'\right)\check{\Psi}_{\text{BELL}}\right\rangle.$$

Version vom 26. März 2009

[27]Der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wurde für $n = 1$ bereits in (8.14), für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ in Definition 9.1.1 eingeführt. Der HILBERT-Raum $L^2(\mathbb{R}^3)$ wurde zu Beginn von 8.2 definiert.

[28]Mit $\mathcal{D}\Big((0,+\infty)\Big)$ bezeichnen wir, wie allgemeine üblich, die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen über $(0,+\infty)$, die außerhalb eines endlichen abgeschlossenen Teilintervalls von $(0,+\infty)$ verschwinden.

[29]**Hinweis:** Man beachte die Erläuterung am Schluß von 9.1.3.

Übungsaufgabe E75 Gegeben seien zwei endlichdimensionale HILBERT-Räume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$, ein normierter Vektor $\Psi \in \mathcal{H}$ und ein normierter Vektor $\check{\Psi} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$. Man zeige, daß

$$\left\langle \check{\Psi} \mid \hat{A} \otimes \hat{1}\, \check{\Psi} \right\rangle = \left\langle \Psi \mid \hat{A}\, \Psi \right\rangle \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

genau dann gilt, wenn ein normierter Vektor $\Psi' \in \mathcal{H}'$ existiert mit

$$\check{\Psi} = \Psi \otimes \Psi' .$$

Man diskutiere die Bedeutung dieses Sachverhalts für quantenmechanische Zustände.

Übungsaufgabe E76 Sei $C^1(S^1)$ der Teilraum von $L^2\Big((0, 2\pi)\Big)$ der stetig differenzierbar mit der Periode 2π auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbaren Funktionen. Man zeige für die durch

$$D_{\hat{P}} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} C^1\big(S^1\big)$$

und

$$\left.\begin{array}{lcl} \left(\hat{P}\,\Psi\right)(\varphi) & \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Psi(\varphi) \\ \left(\hat{Q}\,\Psi\right)(\varphi) & \stackrel{\text{def}}{=} & \varphi\,\Psi(\varphi) \end{array}\right\} \quad \forall\, \Psi \in C^1\big(S^1\big)$$

gegebenen Operatoren in $L^2\Big((0, 2\pi)\Big)$:

a) $\hat{P}$ und $\hat{Q}$ sind HERMITEsch.

b) Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{P}, \hat{Q}\right]_- \Psi = \frac{\hbar}{i}\Psi \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{P}\hat{Q}} \cap D_{\hat{Q}\hat{P}} .$$

c) Trotzdem gilt:

$$\begin{array}{lcl} \min\limits_{\substack{\Psi \in C^1(S^1) \\ \|\Psi\|=1}} \left\| \left(\hat{P} - \left\langle \Psi \mid \hat{P}\,\Psi \right\rangle\right)\Psi \right\| & = & 0 , \\ \sup\limits_{\substack{\Psi \in C^1(S^1) \\ \|\Psi\|=1}} \left\| \left(\hat{Q} - \left\langle \Psi \mid \hat{Q}\,\Psi \right\rangle\right)\Psi \right\| & \leq & 2\pi . \end{array}$$

Übungsaufgabe E77 Seien $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $\hat{A}, \hat{B}$ HERMITEsche Operatoren auf $\mathcal{H}$ (also $D_{\hat{A}} = D_{\hat{B}} = \mathcal{H}$).

a) Man zeige,[30]

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]_- \neq \frac{\hbar}{i}\,\hat{1}\,.$$

b) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenzustände von $i\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-$ für den Fall

$$\hat{A} = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\ , \quad \hat{B} = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\ ,$$

mit normierten $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$.

Übungsaufgabe E78 Durch formale Anwendung der BAKER-HAUSDORFF-Formel[31] zeige man, daß die WEYL***schen Vertauschungsrelationen***

$$e^{\tau \frac{\partial}{\partial x^j}}\, e^{is\, x^k} = e^{i\tau s\, \delta_{jk}}\, e^{is\, x^k}\, e^{\tau \frac{\partial}{\partial x^j}}$$

auf dem HILBERT-Raum der quadratintegrablen Funktionen über $\mathbb{R}^3$ gelten.

Man überprüfe die Formel durch Anwendung auf TAYLOR-entwickelbare Funktionen.

Übungsaufgabe E79 Seien $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum, $\mathcal{T}$ ein EUKLIDischer Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\check{L}$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{T}$. Man zeige:

a) Es existiert ein beschränktes lineares Funktional L auf $\mathcal{H}$, für das

$$L(\Psi) = \check{L}(\Psi) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{T}$$

gilt.

b) Wenn $\mathcal{T}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, ist L eindeutig.

Übungsaufgabe E80 Seien $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$. $\mathcal{T}_\Phi$ bezeichne die Menge aller $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ für die

$$\omega(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{Spur}\left(\hat{P}_{\Phi_\nu}\hat{A}\right)$$

existiert. Man zeige:

[30] **Hinweis:** Man untersuche die Konsequenzen, die sich für Funktionen vom Typ

$$f(\lambda) = \left\langle e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi \mid \hat{A}\, e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi\right\rangle$$

aus $\left[\hat{A},\hat{B}\right]_- = \frac{\hbar}{i}\,\hat{1}$ ergeben würden.

[31] Siehe Aufgabe E29d).

a) $\mathcal{T}_\Phi$ ist ein echter linearer Teilraum von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und ω ein lineares Funktional auf $\mathcal{T}_\Phi$.

b) $\hat{1} \in \mathcal{T}_\Phi$ und $\omega(\hat{1}) = 1$.

c) Für alle $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\hat{A}^\dagger \hat{A} \in \mathcal{H}_\Phi$ gilt $\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \geq 0$.

d) Es existiert **kein** statistischer Operator $\hat{T}$ mit

$$\omega(\hat{A}) = \operatorname{Spur}\left(\hat{T}\,\hat{A}\right) \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{T}_\Phi\,.$$

Übungsaufgabe E81 Man beweise Lemma 9.1.12 der Vorlesung.

Übungsaufgabe E82 Man zeige mithilfe der Poissonschen Gleichung (4.63) der Vorlesung, daß

$$\Delta\,\frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\,\delta(\mathbf{x})$$

als Gleichung für temperierte Distributionen über $\mathbb{R}^3$ gilt.

Übungsaufgabe E83 Man zeige für beliebig vorgegebenes $R > 0$, daß gemäß Definition 9.1.2 der Vorlesung

$$\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } |x| \geq R^2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow\ \chi\bigl(x^2 - R^2\bigr)\,\underline{\underline{\delta\bigl(x^2 - R^2\bigr) = \frac{1}{2R}\Bigl(\delta(x - R) + \delta(x + R)\Bigr)}}$$

gilt.[32]

[32] Wegen $\chi(x)\,\delta(x) = \delta(x)$ identifiziert man i.a. $\chi\bigl(x^2 - R^2\bigr)\,\delta\bigl(x^2 - R^2\bigr)$ mit $\delta\bigl(x^2 - R^2\bigr)$.

Anhang F

Lösungsvorschläge zu den ergänzenden Übungsaufgaben

Zu Aufgabe E1: Daß aus

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \Psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, dV_{\mathbf{x}} \tag{F.1}$$

für beliebiges $\Psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\Psi(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, dV_{\mathbf{p}} \tag{F.2}$$

folgt, läßt sich z.B. folgendermaßen zeigen (siehe auch B.4):

$$\begin{aligned}
&(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \widetilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'}\, dV_{\mathbf{p}} \\
\underset{(F.1)}{=}\quad & (2\pi\hbar)^{-3} \int \left(\int \Psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, dV_{\mathbf{x}} \right) e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'}\, dV_{\mathbf{p}} \\
=\quad & (2\pi\hbar)^{-3} \lim_{\epsilon\to+0} \int e^{-\epsilon|\mathbf{p}|^2} \left(\int \Psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, dV_{\mathbf{x}} \right) e^{+\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'}\, dV_{\mathbf{p}} \\
=\quad & (2\pi\hbar)^{-3} \lim_{\epsilon\to+0} \int \Psi(\mathbf{x}) \underbrace{\left(\int e^{-\left(\sqrt{\epsilon}\,\mathbf{p} + i\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{2\hbar\sqrt{\epsilon}}\right)^2} dV_{\mathbf{p}} \right)}_{\underset{(4.99)}{=}\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{2\hbar\sqrt{\epsilon}}\right|^2} dV_{\mathbf{x}} \\
\underset{\lambda=2\hbar\sqrt{\epsilon}}{=}\quad & \lim_{\lambda\to+0} \int \Psi(\mathbf{x}) \left(\lambda\sqrt{\pi}\right)^{-3} e^{-\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\lambda}\right|^2} dV_{\mathbf{x}} \\
=\quad & \lim_{\delta\to+0} \lim_{\lambda\to+0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|<\delta} \Psi(\mathbf{x}) \left(\lambda\sqrt{\pi}\right)^{-3} e^{-\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\lambda}\right|^2} dV_{\mathbf{x}} \\
\underset{\text{Mittelw.-S.}}{=}\quad & \lim_{\delta\to+0} \Psi(\mathbf{x}_\delta) \lim_{\lambda\to+0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|<\delta} \left(\lambda\sqrt{\pi}\right)^{-3} e^{-\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\lambda}\right|^2} dV_{\mathbf{x}} \\
& \qquad \text{für geeignete } \mathbf{x}_\delta \text{ mit } |\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}'| \le \delta \\
\underset{(4.99)}{=}\quad & \lim_{\delta\to+0} \Psi(\mathbf{x}_\delta) \\
=\quad & \Psi(\mathbf{x}')\,.
\end{aligned}$$

Diese Ableitung zeigt gleichzeitig:

$$\left(\lambda\sqrt{\pi}\right)^{-3} e^{-\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\lambda}\right|^2} \underset{\lambda\to+0}{\longrightarrow} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{F.3}$$

Die Regeln (F1) und (F2) folgen direkt aus der linearen Abhängigkeit des Integrals vom Integranden. Die Regeln (F2)–(F8) folgen alle direkt aus (F.1) bzw. (F.2). Die Regel (F9) folgt mit (F.1) für $\lambda > 0$ aus

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-\lambda|\mathbf{x}|^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, dV_{\mathbf{x}} = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|\mathbf{p}|^2}{4\lambda\hbar^2}} \underbrace{\int e^{-\left|\sqrt{\lambda}\,\mathbf{x}+i\,\frac{\mathbf{p}}{2\hbar\sqrt{\lambda}}\right|^2} dV_{\mathbf{x}}}_{\underset{(4.99)}{=}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Die Regel (F10) folgt mit (F.1) gemäß

$$\begin{aligned}
&\int \Psi_1(\mathbf{x})\,\Psi_2(\mathbf{x})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,dV_{\mathbf{x}} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int \Psi_1(\mathbf{x})\,\Psi_2(\mathbf{x})\,e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,dV_{\mathbf{x}} \\
&\underset{(F.2)}{=} \lim_{\epsilon\to+0}(2\pi\hbar)^{-3}\int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}_1)\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p}_2)\left(\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)}\,e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2}\,dV_{\mathbf{x}}\right) dV_{\mathbf{p}_1}dV_{\mathbf{p}_2} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}(2\pi\hbar)^{-3}\int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}_1)\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p}_2)\,e^{\left|\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}{2\hbar\sqrt{\epsilon}}\right|^2}\underbrace{\left(\int e^{-\left|\sqrt{\epsilon}\,\mathbf{x}+i\,\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}{2\hbar\sqrt{\epsilon}}\right|^2} dV_{\mathbf{x}}\right)}_{\underset{(4.99)}{=}\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}}} dV_{\mathbf{p}_1}dV_{\mathbf{p}_2} \\
&\underset{\lambda=2\hbar\sqrt{\epsilon}}{=} \lim_{\lambda\to+0}\int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}_1)\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p}_2)\,\left(\lambda\sqrt{\pi}\right)^{-3} e^{\left|\frac{\mathbf{p}_2-(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)}{2\hbar\sqrt{\epsilon}}\right|^2} dV_{\mathbf{p}_1}dV_{\mathbf{p}_2} \\
&\underset{(F.3)}{=} \int \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{p}_1)\,\widetilde{\Psi}_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,dV_{\mathbf{p}_1}\,.
\end{aligned}$$

Die Regel (F11) folgt entsprechend mit (F.2). Dank

$$\Psi(0) \underset{(F.2)}{=} (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\int \widetilde{\Psi}(\mathbf{p})\,dV_{\mathbf{p}} \quad \forall\,\Psi(\mathbf{x})\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \tag{F.4}$$

folgt damit (F12) und daraus mit (F7) schließlich auch (F13).

Zu Aufgabe E2: Die Vektorregeln (V1)–(V7) (siehe 1.1.2) folgen direkt aus den entsprechenden Regeln für komplexe Zahlen.

Zu Aufgabe E3a): Wären die Monome x^ν nicht linear unabhängig, müßten ein $n \in \mathbb{Z}_+$ und ein nichttrivialer Satz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ komplexer Zahlen existieren mit

$$\lambda_0 + \lambda_1\,x^1 + \ldots + \lambda_n\,x^n = 0 \quad \forall\,x \in [-1,+1]\,.$$

Für $x \to 0$ folgt daraus $\lambda_0 = 0$ und somit

$$x \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 + \lambda_2\, x^{2-1} + \ldots + \lambda_{n-1}\, x^n = 0 \quad \forall\, x \in [-1, +1]\,.$$

Daraus wiederum folgt für $x \to 0$, daß auch $\lambda_1 = 0$ gilt. So fortfahrend erkennt man, daß $\lambda_\nu = 0$ für $\nu = 0, \ldots, n$ gilt — im Widerspruch zur Annahme.

Zu Aufgabe E3b): Daß $X_n^{\mathrm{pol}} = \mathcal{L}\left(X_n^{\mathrm{pol}}\right)$ gilt, ist offensichtlich. Also ist X_n^{pol} ein linearer Teilraum von X. Da die Monome $x^0, \ldots, x^n$ gemäß a) linear unabhängig sind, folgt daraus mit Lemma 7.1.6 die Behauptung.

Zu Aufgabe E4a): Gemäß Definition 7.1.7 ist zu zeigen:

1. $\langle p \mid p \rangle > 0 \quad \forall\, p \in X_n^{\mathrm{pol}} \setminus \{0\}\,.$
2. $\langle p_1 \mid p_2 \rangle = \Big(\langle p_2 \mid p_1 \rangle\Big)^* \quad \forall\, p_1, p_2 \in X_n^{\mathrm{pol}}\,.$
3. $\langle p \mid \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 \rangle = \lambda_1 \langle p \mid p_1 \rangle + \lambda_2 \langle p \mid p_2 \rangle \quad \forall\, p, p_1, p_2 \in X_n^{\mathrm{pol}}\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,.$

Zu 1.:

$$\begin{aligned} \langle p \mid p \rangle \ &\underset{\text{Def.}}{=} \int_{-1}^{+1} |p(x)|^2\, \mathrm{d}x \\ &> \ 0\,,\ \text{falls ein } x \in [-1,+1] \text{ existiert mit } p(x) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Zu 2.:

$$\begin{aligned} \langle p_1 \mid p_2 \rangle \ &\underset{\text{Def.}}{=} \int_{-1}^{+1} \underbrace{\Big(p_1(x)\Big)^* p_2(x)}_{=\left(p_1(x)\left(p_2(x)\right)^*\right)^*}\, \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\left(\int_{-1}^{+1} \Big(p_1(x)\Big)^* p_2(x)\, \mathrm{d}x\right)^*}_{\underset{\text{Def.}}{=} \langle p_2 | p_1 \rangle}\,. \end{aligned}$$

Zu3.:

$$\begin{aligned} \langle p \mid \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 \rangle \ &\underset{\text{Def.}}{=} \int_{-1}^{+1} \Big(p(x)\Big)^* \left(\lambda_1\, p_1(x) + \lambda_2\, p_2(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^{+1} \Big(p(x)\Big)^* p_1(x)\, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{-1}^{+1} \Big(p(x)\Big)^* p_2(x)\, \mathrm{d}x \\ &\underset{\text{Def.}}{=} \lambda_1 \langle p \mid p_1 \rangle + \lambda_2 \langle p \mid p_2 \rangle\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E4b): Zu zeigen ist:

1. $\left\langle \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, P_0 \;\middle|\; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, P_0 \right\rangle = 1\,.$

2. $\left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, P_1 \mid \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, P_1 \right\rangle = 1\,.$

3. $\left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\, P_2 \mid \sqrt{\tfrac{5}{2}}\, P_2 \right\rangle = 1\,.$

4. $\langle P_0 \mid P_1 \rangle = 0\,.$

5. $\langle P_0 \mid P_2 \rangle = 0\,.$

6. $\langle P_1 \mid P_2 \rangle = 0\,.$

Zu 1.:

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, P_0 \mid \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, P_0 \right\rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Zu 2.:

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, P_1 \mid \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, P_1 \right\rangle &= \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{2} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Zu 3.:

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\, P_2 \mid \sqrt{\tfrac{5}{2}}\, P_2 \right\rangle &= \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, x^2 \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\, x^2 + \frac{9}{4}\, x^4 \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{4}\, x - \frac{1}{2}\, x^3 + \frac{9}{20}\, x^5 \right) \Big|_{-1}^{+1} \\ &= 5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{9}{20} \right) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Zu 4.:

$$\begin{aligned} \langle P_0 \mid P_1 \rangle &= \int_{-1}^{+1} x \, \mathrm{d}x \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Zu 5.:

$$\begin{aligned} \langle P_0 \mid P_2 \rangle &= \int_{-1}^{+1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, x^2 \right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\, x^3 \right) \Big|_{-1}^{+1} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Zu 6.:

$$\begin{aligned}\langle P_1 \mid P_2 \rangle &= \int_{-1}^{+1} \underbrace{x\left(-\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,x^3\right)}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}x \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E5: Linear $\parallel \mathbf{e}_3'$ polarisiert meint gemäß 7.2.2

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_1')\ ,$$

also

$$\mathbf{J} = e^{i\varphi}\,\mathbf{e}_3'$$

für geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$ und eine geeignete rechtshändige Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_1', \mathbf{s})$ von $\mathbb{C}^3$. Für

$$\mathbf{e}_3' = \cos\alpha\,\mathbf{e}_3 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_1$$

bedeutet das

$$\mathbf{J} = e^{i\varphi}\cos\alpha\,\mathbf{e}_3 + e^{i\varphi}\sin\alpha\,\mathbf{e}_1\ ,$$

d.h.:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\cos\alpha \\ e^{i\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)\ .$$

Rechtszirkular polarisiert meint gemäß 7.2.2, daß

$$\mathbf{J} = \frac{e^{i\varphi'}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_1')$$

für eine geeignete rechtshändige Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_1', \mathbf{s})$ von $\mathbb{C}^3$ und geeignetes $\varphi' \in \mathbb{R}$ gilt. Mit

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_3' &= \cos(\varphi - \varphi')\ \mathbf{e}_3 - \sin(\varphi - \varphi')\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1' &= \sin(\varphi - \varphi')\ \mathbf{e}_3 + \cos(\varphi - \varphi')\ \mathbf{e}_1\end{aligned}\right\} \quad \text{für geeignetes } \varphi \in \mathbb{R} \tag{F.5}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\mathbf{J} &= \underbrace{\left(\cos(\varphi - \varphi') + i\ \sin(\varphi - \varphi')\right)}_{=e^{i(\varphi-\varphi')}}\mathbf{e}_3 + \underbrace{\left(-\sin(\varphi - \varphi') + i\ \cos(\varphi - \varphi')\right)}_{=i\,e^{i(\varphi-\varphi')}}\mathbf{e}_1 \\ &= e^{i\varphi}\left(\mathbf{e}_3 + i\,\mathbf{e}_1\right)\ ,\end{aligned}$$

d.h.:

$$\mathbf{J} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)\ .$$

Entsprechend zeigt man für linkszirkular polarisiertes $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, daß

$$\mathbf{J} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$$

für geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt. Daß $\mathbf{E}(0, t)$ in allen übrigen Fällen eine elliptische Schwingung ausführt, folgt gemäß Übungsaufgaben 18 –22.

Zu Aufgabe E6a): Da

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \end{pmatrix}$$

definitionsgemäß normiert ist, muß

$$\left|J^1\right|^2 + \left|J^2\right|^2 = 1$$

und somit

$$\left|J^1\right| = \cos\frac{\vartheta}{2}\,, \quad \left|J^2\right| = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

für geeignetes $\vartheta \in [0, \pi]$ gelten. Mit

$$\psi - \frac{\varphi}{2} = \arg\left(J^1\right)\,, \quad \psi + \frac{\varphi}{2} = \arg\left(J^2\right)\,,$$

d.h. mit

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \arg\left(J^1\right) + \arg\left(J^2\right)\,, \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \arg\left(J^1\right) - \arg\left(J^2\right)\,,$$

folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E6b): Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\vartheta\,\cos\varphi\,\hat{\tau}^1 + \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\hat{\tau}^2 + \cos\vartheta\,\hat{\tau}^3\right) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{+i\frac{\varphi}{2}}\,\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{+i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{+i\frac{\varphi}{2}}\,\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\,\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\vartheta\,\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\vartheta\,\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \\ e^{+i\,\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\vartheta\,\cos\frac{\vartheta}{2} - \cos\vartheta\,\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{Aufg. 1b)}}{=} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{+i\frac{\varphi}{2}}\,\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E6c): Die Behauptung folgt unmittelbar daraus, daß $\{\mathbf{R}, \mathbf{L}\}$ ein ONS und somit eine ONB von $\mathbb{C}^2$ ist.

Zu Aufgabe E6d): Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}\rho &= e^{i\,\arg\rho}\,|\rho| \\ &= e^{i\,\arg\rho}\,\frac{(|\rho|+|\lambda|)+(|\rho|-|\lambda|)}{2}\,, \\ \lambda &= e^{i\,\arg\rho}\,e^{i\,\arg(\rho^*\lambda)}\,|\lambda| \\ &= e^{i\,\arg\rho}\,e^{i\,\arg(\rho^*\lambda)}\,\frac{(|\rho|+|\lambda|)-(|\rho|-|\lambda|)}{2}\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E7a): Gemäß Vorlesung gilt

$$\Re\left(\mathbf{R}\,e^{-i\,\omega\,t}\right) = \cos(\omega\,t)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\omega\,t)\,\mathbf{e}_3$$

und

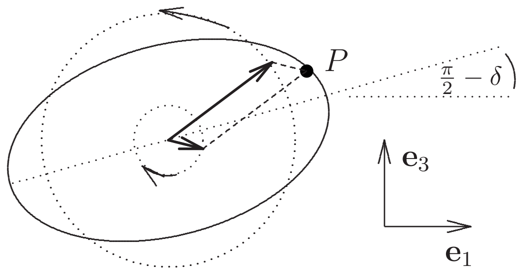
$$\Re\left(\mathbf{L}\,e^{-i\,\omega\,t}\right) = \cos(\omega\,t)\,\mathbf{e}_1 - \sin(\omega\,t)\,\mathbf{e}_3\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0,t)/E_0 &= \quad |\rho|\,\Big(\cos(\omega\,t-\arg\rho)\,\mathbf{e}_3 + \sin(\omega\,t-\arg\rho)\,\mathbf{e}_1\Big) \\ &\quad + |\lambda|\,\Big(\cos(\omega\,t-\arg\lambda)\,\mathbf{e}_3 - \sin(\omega\,t-\arg\lambda)\,\mathbf{e}_1\Big)\,.\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{E}(0,t)/E_0$ die Überlagerung einer (relativ zu $\mathbf{e}_2$) rechtshändigen Kreisschwingung (vgl. Aufgabe 18) mit dem 'Radius' $|\rho|$ und einer linkshändigen Kreisschwingung mit dem 'Radius' $|\lambda|$ zu gleicher Kreisfrequenz ω. Daraus folgt die Behauptung.

Zu Aufgabe E7b): Anschaulich ist die Behauptung sofort einleuchtend:[1]



Bzgl. der mathematischen Begründung siehe Aufgabe 20.

Zu Aufgabe E7c): Gemäß a) ist $|\mathbf{E}(0,t)|$ für

$$\omega\,t - \arg\rho = -(\omega\,t - \arg\lambda)\,,$$

[1] Horizontale Spiegelung liefert eine Situation mit $|\rho| > |\lambda|$.

d.h. für

$$t = \frac{\arg\rho + \arg\lambda}{2\,\omega}$$

maximal. Dann zeigt $\mathbf{E}(0,t)$ in Richtung von $\cos\delta\,\mathbf{e}_3 + \sin\delta\,\mathbf{e}_1$.

Zu Aufgabe E8a): Man sieht sofort, daß $\lambda_1^*\,\mathbf{R} - \rho_1^*\,\mathbf{L}$ zu $\mathbf{J}_1$ orthogonal ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2 \rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad &\mathbf{J}_2 = e^{i\,\psi}\,(\lambda_1^*\,\mathbf{R} - \rho_1^*\,\mathbf{L}) \;\text{ für geeignetes } \psi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E8b): Gemäß Aufgabe E7 gilt:

1. Im Falle

$$|\rho_1| + |\lambda_1| = |\rho_2| + |\lambda_2| \;, \quad |\rho_1| - |\lambda_1| = -\,|\rho_2| + |\lambda_2|$$

   stimmen die ‘Längen’ der Hauptachsen für beide Schwingungen (zu $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$) überein, der Umlaufsinn ist aber entgegengesetzt.

2. Im Falle elliptischer Schwingungen mit

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

   sind die großen (und damit auch die kleinen) Halbachsen beider Schwingungen zueinander orthogonal.

Zu Aufgabe E9: Man rechnet leicht nach, daß die Wirkung

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^1 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\left(\hat{\tau}^0 + \hat{\tau}^2\right)\begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^1 \end{pmatrix} \qquad \forall\,\lambda^3, \lambda^1 \in \mathbb{C}$$

der JONES-Matrix $\hat{P}_{\mathrm{R}}$ für <u>rechts</u>zirkulares Licht bzgl. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ äquivalent ist zu

$$\lambda_{\mathrm{R}}\,(\mathbf{e}_3 + i\,\mathbf{e}_1) + \lambda_{\mathrm{L}}\,(\mathbf{e}_3 - i\,\mathbf{e}_1) \;\longmapsto\; \lambda_{\mathrm{R}}\,(\mathbf{e}_3 + i\,\mathbf{e}_1) \quad \forall\,\lambda_{\mathrm{R}}, \lambda_{\mathrm{L}} \in \mathbb{C}\,. \tag{F.6}$$

Für jede andere rechtshändige Orthonormalbasis $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ mit $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$ existiert ein (Dreh-) Winkel φ mit

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{e}'_3 &=& \cos\varphi\,\mathbf{e}_3 - \sin\varphi\,\mathbf{e}_1\,, \\ \mathbf{e}'_1 &=& \sin\varphi\,\mathbf{e}_3 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_1\,. \end{array}}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\mathbf{e}'_3 \pm i\,\mathbf{e}'_1 = e^{\pm i\,\varphi}\,(\mathbf{e}_3 \pm i\,\mathbf{e}_1)}$$

und somit die Unabhängigkeit der Wirkung (F.6) von der Wahl der $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$ (zu vorgegebenem $\mathbf{e}_2$). Für linkszirkulares Licht folgt die Behauptung analog.

Zu Aufgabe E10: Die ersten beiden Gleichungen folgen gemäß

$$\hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi}\,\mathbf{n}_\varphi = \hat{D}_{-\varphi}\,\underbrace{\left(-\hat{S}_\pi\right)\underbrace{\hat{D}_{+\varphi}\,\mathbf{n}_\varphi}_{=\mathbf{e}_1}}_{=\mathbf{e}_1} = \mathbf{n}_\varphi$$

und

$$\hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi}\,\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi} = \hat{D}_{-\varphi}\,\underbrace{\left(-\hat{S}_\pi\right)\underbrace{\hat{D}_{+\varphi}\,\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi}}_{=\mathbf{e}_3}}_{=-\mathbf{e}_3} = -\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi}\,.$$

Die dritte Gleichung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mathbf{n}_{\frac{\varphi}{2}}}\,\hat{R}_{\mathbf{e}_1} &= \hat{R}_{\mathbf{n}_{\frac{\varphi}{2}}}\,\hat{R}_{\mathbf{n}_0} \\
&= -\hat{R}_{\mathbf{n}_{\frac{\varphi}{2}}}\,\hat{S}_\pi \\
&= \hat{D}_{-\frac{\varphi}{2}}\,\hat{S}_\pi\,\hat{D}_{+\frac{\varphi}{2}}\,\hat{S}_\pi \\
&= \hat{D}_{-\varphi}\,,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt

$$\hat{S}_\pi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hat{S}_\pi = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

benutzt wurde.

Zu Aufgabe E11: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Aufgabe E10, da $\hat{R}_{\mathbf{n}_\varphi}$ jeweils die JONES-Matrix eine $\frac{\lambda}{2}$-Blättchens ist, das die $\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$-Komponente verzögert.

Zu Aufgabe E12: Die 1. Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\left(\cos\alpha\,e^{i\,\varphi_R}\,\mathbf{R} + \sin\alpha\,e^{i\,\varphi_L}\,\mathbf{L}\right) \\
&= \hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\alpha\,e^{i\,\varphi_R}\,e^{-i\,\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\,\mathbf{R} + \sin\alpha\,e^{i\,\varphi_L}\,e^{+i\,\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\,\mathbf{L}\right) \\
&= e^{+i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\left(\cos\alpha\,\underbrace{\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\mathbf{R}}_{=\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}} + \sin\alpha\,\underbrace{\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\mathbf{L}}_{=\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix}}\right) \\
&= e^{+i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +\cos\alpha + \sin\alpha \\ -\cos\alpha + \sin\alpha \end{pmatrix} \\
&= e^{+i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{n}_{\frac{\pi}{2}-\alpha} + \mathbf{n}_{\pi-\alpha}\right) \\
&= e^{+i\,\frac{\varphi_R+\varphi_L}{2}}\,\mathbf{n}_{\frac{3}{4}\pi-\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Die 2. Behauptung folgt mit der 1. aus

$$\hat{D}_{\frac{\varphi_l-\varphi_r}{2}} \underbrace{\left(\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\right)^3 \hat{S}_{\frac{\pi}{2}}}_{=\hat{S}_{2\pi}=\hat{1}} \hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}} = \hat{1}\,.$$

Die 3. Behauptung folgt aus der Unitarität von $\hat{S}_{2\pi}$ und $\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}$.

Zu Aufgabe E13: Da sich jeder JONES-Vektor **J** in der Form

$$\mathbf{J} = \cos\alpha\, e^{i\,\varphi_R}\,\mathbf{R} + \sin\alpha\, e^{i\,\varphi_R}\,\mathbf{L}$$

mit geeigneten $\alpha, \varphi_R, \varphi_L \in \mathbb{R}$ schreiben läßt, folgt die Behauptung aus den Aufgaben E11 und E12 mit

$$|\mathbf{J}\rangle\langle\mathbf{J}| = \hat{D}_{\frac{\varphi_L-\varphi_R}{2}} \left(\hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\right)^3 \underbrace{\left|\mathbf{n}_{\frac{3}{4}\pi-\alpha}\right\rangle\left\langle\mathbf{n}_{\frac{3}{4}\pi-\alpha}\right|}_{\text{JONES-Matrix eines Filters für lineare Polarisation}} \hat{S}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{D}_{\frac{\varphi_R-\varphi_L}{2}}\,.$$

Anmerkung: Durch entsprechende Ausrichtung läßt sich die benötigte Anzahl von $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen natürlich reduzieren.

Zu Aufgabe E14: Man rechnet leicht nach, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\hat{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Weiterhin zeigt einfaches Nachrechnen, daß

$$\hat{D}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \left(\hat{D}-\hat{1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0\,.$$

Aus letzterem folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\hat{D}-\hat{1}\right)^\nu = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\hat{D} = \exp\left(\hat{D}-\hat{1}\right)\,. \tag{F.7}$$

Zu Aufgabe E15a): Man rechnet leicht nach, daß

$$\hat{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

und somit tatsächlich

$$\hat{U}^{-1}\hat{M}\,\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{F.8}$$

gilt.

Zu Aufgabe E15b): Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen.

Zu Aufgabe E15c): $\mathbf{v}$ ist genau dann Eigenvektor von $\hat{M}$, wenn $\hat{U}^{-1}\,\mathbf{v}$ Eigenvektor von $\hat{U}^{-1}\hat{M}\,\hat{U}$ ist. Nach (F.8) muß also

$$\hat{U}^{-1}\,\mathbf{v} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{v} \propto \hat{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten.

Zu Aufgabe E15d): Für

$$\hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}\begin{pmatrix} 1 & 1/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} \hat{A}^2 &= \hat{U}\begin{pmatrix} 1 & 1/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2\hat{U}^{-1} \\ &= \hat{U}\begin{pmatrix} 1 & 2/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{U}^{-1} \\ &\underset{(\text{F.8})}{=} \hat{M}\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E15e): Für

$$\hat{B} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}\begin{pmatrix} 0 & 2/i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} \exp\left(\hat{B}\right) &= \hat{U}\exp\begin{pmatrix} 0 & 2/i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{U}^{-1} \\ &\underset{(\text{F.7})}{=} \hat{U}\left(\hat{1} + \begin{pmatrix} 0 & 2/i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\hat{U}^{-1} \\ &\underset{(\text{F.8})}{=} \hat{M}\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E16a): Die angegebenen Eigenschaften folgen aufgrund der Rechenregeln für komplexe Zahlen direkt aus der Definition von $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2$.

Zu Aufgabe E16b): Entsprechende der Argumentation zu Lemma 7.3.8 gilt für beliebige $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in V$:

$$\det(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \text{ linear unabhängig}\,. \tag{F.9}$$

Wenn die $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}$ linear abhängig sind, dann folgt also aus (F.9)

$$\det(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{e}_\nu) = 0 \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

und somit $[\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}] = 0$. Wenn die $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}$ dagegen linear unabhängig sind, müssen die $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{e}_\nu$ für mindestens ein $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ linear unabhängig sein.[2] Aus (F.9) (und Lemma 7.1.5) folgt dann aber $[\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}] \neq 0$.

Zu Aufgabe E16c): Für beliebiges

$$\mathbf{z}_n = \sum_{\nu=1}^{n} z_n^\nu\, \mathbf{e}_\nu \in V$$

gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
[\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}] \cdot \mathbf{z}_n &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \det(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{e}_\nu)\ \mathbf{e}_\nu \right) \cdot \mathbf{z}_n \\
&\underset{\text{a)}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \det(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{e}_\nu)\, \underbrace{\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{z}_n}_{=z_n^\nu} \\
&= \det\Bigl(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}, \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} z_n^\nu\, \mathbf{e}_\nu}_{=\mathbf{z}_n}\Bigr)\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E16d): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^\nu \cdot \mathbf{b}_\mu &= \frac{(-1)^{n-\nu}\, [\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n] \cdot \mathbf{b}_\mu}{\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)} \\
&\underset{\text{c)}}{=} \frac{(-1)^{n-\nu}\, \det\bigl(\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_\mu\bigr)}{\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)}
\end{aligned}$$

wegen

$$\det\bigl(\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_\mu\bigr) \underset{\text{b)}}{=} (-1)^{n-\nu}\ \delta_{\nu\mu}\ \det(\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n)\,.$$

Version vom 26. März 2009

[2]Sonst wäre $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n-1}\}$, im Widerspruch zu Lemma 7.1.6, eine Basis von V .

Zu Aufgabe E16e): Das vorausgesetzte Gleichungssystem ist äquivalent zur Vektorgleichung

$$\mathbf{y} = x^1\,\mathbf{b}_1 + \ldots + x^n\,\mathbf{b}_n\,.$$

Da $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ voraussetzungsgemäß eine Basis von V ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} x^\nu &\underset{\mathrm{d})}{=} \mathbf{b}^\nu \cdot \mathbf{y} \\ &= \frac{(-1)^{n-\nu}\,[\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n] \cdot \mathbf{y}}{\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)} \\ &\underset{\mathrm{c})}{=} \frac{(-1)^{n-\nu}\,\det\left(\mathbf{b}_1, \ldots, \cancel{\mathbf{b}_\nu}, \ldots \mathbf{b}_n, \mathbf{y}\right)}{\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)} \end{aligned}$$

für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ und somit die Behauptung, da die Determinante bei Vertauschung zweier benachbarter Vektor-Argumente nur das Vorzeichen ändert.

Zu Aufgabe E17: Die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

ist durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

charakterisiert. Gemäß CRAMERscher Regel folgt daraus

$$\begin{aligned} \alpha' \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \\ &= \delta\,, \\ \beta' \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \delta \end{pmatrix} \\ &= -\beta\,, \\ \gamma' \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\gamma\,, \\ \delta' \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

Zu Aufgabe E18a): $\hat{D}$ ist gemäß Lemma 7.3.3 invertierbar, da isometrische Operatoren nur den Nullvektor auf Null abbilden können. Wegen

$$\hat{A}\,\hat{D} = \hat{1} \implies \underline{\underline{\hat{A}}} = \hat{A}\,\hat{D}\,\hat{D}^{-1} = \hat{1}\,\hat{D}^{-1} = \underline{\underline{\hat{D}^{-1}}}$$

ist also nur

$$\hat{D}^{\mathrm{T}}\,\hat{D} = \hat{1}\,,$$

bzw.

$$\left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle = \langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2 \rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n$$

zu zeigen. Das ergibt sich aber mit Folgerung 7.3.10 aus der Isometrie von $\hat{D}$ und

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{D}\,\mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{D}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle &\underset{\text{Folg. 7.3.12}}{=} \left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{D}^\dagger\,\hat{D}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \left(\hat{D}^*\right)^{\mathrm{T}}\hat{D}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle \\
&\underset{\hat{D}\ \text{reell}}{=} \left\langle \mathbf{z}_1 \,\middle|\, \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D}\,\mathbf{z}_2 \right\rangle .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E18b): Allgemein gilt für $n \times n$-Matrizen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\det\left(\hat{A}^{\mathrm{T}}\right)}} &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, A^{\pi(1)}{}_1 \dots A^{\pi(1)}{}_n \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\operatorname{sign}(\pi)}_{\operatorname{sign}(\pi^{-1})} \underbrace{A^{\pi\left(\pi^{-1}(1)\right)}{}_{\pi^{-1}(1)} \dots A^{\pi\left(\pi^{-1}(n)\right)}{}_{\pi^{-1}(n)}}_{A^1{}_{\pi^{-1}(1)}\dots A^n{}_{\pi^{-1}(n)}} \\
&\underset{\pi' = \pi^{-1}}{=} \sum_{\pi' \in S_n} \operatorname{sign}(\pi')\, \hat{A}^1{}_{\pi'(1)} \dots \hat{A}^n{}_{\pi'(n)} \\
&= \underline{\underline{\det\left(\hat{A}\right)}} .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E18c): Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}
\left(\det(\hat{D})\right)^2 &\underset{\text{b)}}{=} \det(\hat{D})\,\det\left(\hat{D}^{-1}\right) \\
&\underset{\text{Lemma 7.3.6}}{=} \det\left(\hat{D}\,\hat{D}^{-1}\right) \\
&\underset{\text{a)}}{=} \det(\hat{1}) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E18d): Aus $\det(\hat{D}) = 1$ folgt

$$\det\left(\hat{D}^{\mathrm{T}}\right) \underset{\text{b)}}{=} 1$$

und somit

$$\begin{aligned}\det(\hat{D} - \hat{1}) &= \det\left(\hat{D}^{\mathrm{T}}(\hat{D} - \hat{1})\right) \\ &\underset{\text{a)}}{=} \det(\hat{1} - \hat{D})\,,\end{aligned}$$

für ungerades n also

$$\det(\hat{D} - \hat{1}) = -\det(\hat{D} - \hat{1})\,,$$

d.h.

$$\det(\hat{D} - \hat{1}) = 0\,.$$

Zu Aufgabe E19: Drehmatrizen sind definitionsgemäß isometrisch. Für reelle 3×3-Drehmatrizen $\hat{D}$ gilt also entsprechend Aufgabe E18

$$\det(\hat{D} - \hat{1}) = 0\,.$$

Jedes solche $\hat{D}$ besitzt deshalb einen Eigenvektor $\mathbf{z}$ zum Eigenwert 1; d.h.:

$$\hat{D}\,\mathbf{z} = \mathbf{z} \neq 0\,.$$

Da $\hat{D}$ reell ist, folgt daraus

$$\hat{D}\,\mathbf{n} = \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3\,,\, |\mathbf{n}| = 1\,,$$

für

$$\mathbf{n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\Re(\mathbf{z})}{|\Re(\mathbf{z})|} & \text{falls } \Re(\mathbf{z}) \neq 0\,, \\ \frac{\Im(\mathbf{z})}{|\Im(\mathbf{z})|} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

$\det D$ bewirkt also eine **Rotation** um die $\mathbf{n}$-Achse.

Zu Aufgabe E20a): Da E Eigenwert von $\hat{A}$ ist, gilt entsprechend Lemma 7.3.17

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right) \\ &= \left({A^1}_1 - E\right)\left({A^2}_2 - E\right) - {A^1}_2{A^2}_1 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \hat{A}\begin{pmatrix} {A^2}_2 - E \\ -\,{A^2}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {A^1}_1\left({A^2}_2 - E\right) - {A^1}_2{A^2}_1 \\ {A^2}_1\left({A^2}_2 - E\right) - {A^2}_2{A^2}_1 \end{pmatrix} \\ &= E\begin{pmatrix} {A^2}_2 - E \\ -\,{A^2}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\hat{A}\begin{pmatrix} -{A^1}_2 \\ {A^1}_1 - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{A^1}_1{A^1}_2 + {A^1}_2\,({A^1}_1 - E) \\ -\,{A^2}_1{A^1}_2 + {A^2}_2\,({A^1}_1 - E) \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} -{A^1}_2 \\ {A^1}_1 - E \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe E20b): Wenn beide Vektoren Null wären, dann müßte insbesondere

$${A^2}_2 - E = 0 = {A^1}_1 - E$$

und somit

$$\mathrm{Spur}\left(\hat{A} - E\,\hat{1}\right) = \left({A^1}_1 - E\right) + \left({A^2}_2 - E\right) = 0$$

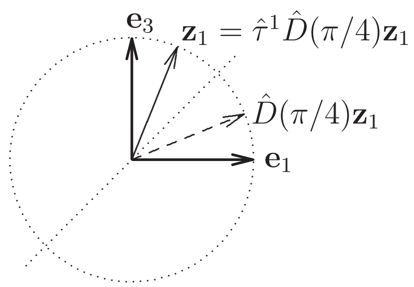
gelten — im Widerspruch zur Voraussetzung.

Anmerkung: Z.B. für $\hat{A} = \mathbb{H}$ und $E = \pm 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} {A^2}_2 - E \\ -\,{A^2}_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -{A^1}_2 \\ {A^1}_1 - E \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mp 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

im Einklang mit dem Ergebnis von Aufgabe E21.

Zu Aufgabe E21: Da $\mathbb{H}$ unitär und selbstadjungiert ist, kann $\mathbb{H}$ gemäß Spektralsatz (Folgerung 7.3.19) nur die Eigenwerte $+1$ und -1 besitzen.[3] Eigenvektoren zum Eigenwert $+1$ sind invariant unter $\mathbb{H} = \hat{\tau}^1\,\hat{D}(\pi/4)$ und daher Vielfache von $\mathbf{z}_1$ entsprechend folgender Skizze:



Wegen[4]

$$\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = , \quad \sin(\pi/8) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

[3] Das folgt natürlich gemäß Lemma 7.3.17 auch aus: $\det\left(\mathbb{H} - E\,\hat{1}\right) = E^2 - 1$.

[4] Man beachte, daß $\cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ und somit $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\,\alpha)}{2}}$ gilt.

ist offensichtlich

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl.} \ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \ .$$

Da Eigenvektoren $\mathbf{z}_2$ zum Eigenwert -1 gemäß Spektralsatz senkrecht auf $\mathbf{z}_1$ stehen, muß dafür

$$\mathbf{z}_2 \propto \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl.} \ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$$

gelten. Als JONES-Vektoren beschreiben die normierten Eigenzustände von $\mathbb{H}$ offensichtlich lineare Polarisation in entsprechender Richtung.

> **Anmerkung:** Die HADAMARD-Matrix ist ein Spezialfall der in Aufgabe E6b) behandelten Linearkombinationen von PAULI-Matrizen:
>
> $$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\tau}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\tau}^3 \,.$$

Zu Aufgabe E22a): Gemäß Spektralsatz existieren reelle Zahlen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ von V mit

$$\left.\begin{aligned} \hat{B} &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(i \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_n \end{pmatrix} \right) \end{aligned}\right\} \quad \text{bzgl.} \ (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \ .$$

Ein Operator der gesuchten Art ist also

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl.} \ (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \ . \tag{F.10}$$

Zu Aufgabe E22b): Gemäß Fußnote 41 von Kapitel 7 ist $\hat{B} \geq 0$ äquivalent zur

Gültigkeit von

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_n \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \;, \quad E_1, \dots, E_n \geq 0 \tag{F.11}$$

für eine geeignete Orthonormalbasis $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ von V und entsprechende Numerierung der Eigenwerte $E_1, \dots, E_n$. Aus (F.11) folgt offensichtlich

$$\left\langle \mathbf{z} \mid \hat{B}\, \mathbf{z} \right\rangle \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in V \,. \tag{F.12}$$

Umgekehrt folgt aus (F.12)

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{z}_1 \mid \hat{B}\, \mathbf{z}_2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left\langle \mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \mid \hat{B} \left(\mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \right) \right\rangle \\ &\underset{(F.12)}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left(\left\langle \mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \mid \hat{B} \left(\mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \right) \right\rangle \right)^* \\ &\underset{(7.5)}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left\langle \hat{B} \left(\mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \right) \mid \mathbf{z}_1 + i^k \mathbf{z}_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{B}\, \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_2 \right\rangle \quad \forall\, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V \end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe E57) und somit gemäß Folgerung 7.3.12 (und Definition 7.3.11) die Selbstadjungiertheit von $\hat{B}$. Daß $\hat{B}$ im Falle (F.12) keinen negativen Eigenwert besitzen kann, ist offensichtlich.

Zu Aufgabe E22c): Wenn $\hat{B}$ positiv und invertierbar ist, gilt (F.11) mit

$$E_1, \dots, E_n > 0 \,.$$

Der gesuchte Operator ist hier also

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \ln(E_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ln(E_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ln(E_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ln(E_n) \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \,.$$

Zu Aufgabe E22d): Sei $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Gemäß Spektralsatz ist gilt dann (F.10) für geeignete φ_ν und $\mathbf{b}_\nu$ und somit

$$\begin{aligned}
\det\left(e^{z\hat{A}}\right) & \\
\underset{(\text{F.10})}{=} & \det\begin{pmatrix} e^{z\varphi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{z\varphi_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{z\varphi_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{z\varphi_n} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \\
\underset{(7.31)}{=} & \prod_{\nu=1}^{n} e^{z\varphi_\nu} \\
= & e^{z\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu} \\
\underset{(\text{F.10})}{=} & e^{z\,\mathrm{Spur}(\hat{A})} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E23a): Die Gültigkeit der Gruppeneigenschaften läßt sich mithilfe der Lemmata 7.3.6 und 7.3.8 leicht nachweisen.

Zu Aufgabe E23b): Für $\hat{U} \in$U(2) gilt gemäß Spektralsatz $\left|\det \hat{U}\right| = 1$ und somit

$$\hat{U} = e^{i\varphi}\, \underbrace{\hat{U}\Big/\sqrt{\det \hat{U}}}_{\in \mathrm{SU}(2)} \quad \text{für geeignetes } \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Zu Aufgabe E23c): Sei $\hat{B} \in$SU(2). Gemäß Aufgabe E22a) existiert dann ein selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ mit

$$\hat{B} = e^{i\hat{A}}\,. \tag{F.13}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= \det \hat{B} \\ &\underset{\text{Aufg. E22d)}}{=} e^{i\,\mathrm{Spur}\hat{A}} \end{aligned}$$

muß außerdem Spur$\hat{A} = 0 \mod 2\pi$ gelten. Da sich jede selbstadjungierte 2×2-Matrix $\hat{A}$ mit Spur $0 \mod 2\pi$ gem. (7.19) in der Form

$$\hat{A} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\psi} + n\,\pi\,\hat{\tau}^0 \quad \text{für geeigentes } \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } n \in \mathbb{Z}_+$$

schreiben läßt, folgt daraus mit (F.13) die Behauptung.

Anmerkung: Mit Aufgabe 23b) folgt daraus $\mathrm{SU}(2) = \left\{ e^{-i\,\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}} : \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Zu Aufgabe E23d): Gemäß Aufgabe E22c) existiert zu jedem $\lambda > 0$ ein selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ auf $\mathbb{C}^2$ mit

$$\frac{1}{\lambda}\,\hat{B} = e^{\hat{A}}\,. \tag{F.14}$$

Speziell für $\lambda = \sqrt[+]{\det \hat{B}}$ folgt daraus mit

$$\det\left(\frac{1}{\lambda}\,\hat{B}\right) = \lambda^{-2}\,\det\left(\hat{B}\right) = 1$$

gemäß Aufgabe E22d):

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{A}\right) = 0\,, \quad \hat{A} = \hat{A}^{\dagger}\,. \tag{F.15}$$

Da, wie bereits in b) festgestellt, jeder Operator auf $\mathbb{C}^2$ der Form (F.15) eine reelle Linearkombinationen der PAULI-Matrizen $\hat{\tau}^1$, $\hat{\tau}^2$, $\hat{\tau}^3$ ist, folgt daraus mit (F.14) die Behauptung.

Zu Aufgabe E23e): Sei $\hat{C} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Gemäß Lemma 7.3.20 und Lemma 7.3.6 existieren dann Operatoren $\hat{U}$, $\hat{B}$ mit[5]

$$\hat{C} = \underbrace{\hat{U}}_{\in \mathrm{SU}(2)}\,\underbrace{\hat{B}}_{\geq 0}\,, \quad \det \hat{B} = 1\,.$$

Analog zu d) folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E24: Gemäß

$$\operatorname{Spur}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + \delta \quad \forall\, \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$$

gilt

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{\tau}^j\right) = 0 \quad \forall\, j \in \{1,2,3\}$$

und

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{\tau}^j\,\hat{\tau}^j\right) = \operatorname{Spur}\left(\hat{\tau}^0\right) = 2 \quad \forall\, j \in \{1,2,3\}\ .$$

Mit

$$\hat{\tau}^{\pi(1)}\,\hat{\tau}^{\pi(2)} = \pm i\,\hat{\tau}^{\pi(3)} \quad \forall\, \pi \in S_3^{\pm}$$

folgt daraus

$$\operatorname{Spur}\left(\hat{\tau}^{\nu}\,\hat{\tau}^{\mu}\right) = 2\,\delta_{\nu\mu} \quad \forall\, \nu,\mu \in \{0,\dots,3\}$$

Version vom 26. März 2009

[5] Man beachte, daß gemäß Spektralsatz für Matrizen $\hat{U}$, $\hat{B}$ stets

$$\hat{U} \text{ unitär} \implies \left|\det\left(\hat{U}\right)\right| = 1\,, \quad \hat{B} \geq 0 \implies \det\left(\hat{B}\right) \geq 0$$

gilt.

und somit

$$\mathrm{Spur}\left(\sum_{\nu=0}^{3} x_\nu\,\hat{\tau}^\nu\,\hat{\tau}^\mu\right) = 2\,x_\mu \quad \forall\,\nu,\mu \in \{0,\ldots,3\}\ .$$

Da sich jede komplexe 2×2-Matrix $\hat{x}$ offensichtlich in der Form

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \begin{pmatrix} x_0 + x^3 & x_1 - i\,x_2 \\ x_1 + i\,x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\nu=0}^{3} x_\nu\,\hat{\tau}^\nu\end{aligned}$$

schreiben läßt, folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E25a): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{3} e^j\,\hat{\tau}^j\right)^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{3} e^j\,e^k\,\hat{\tau}^j\,\hat{\tau}^k \\ &= \sum_{j=1}^{3} e^j\,e^j\,\underbrace{\hat{\tau}^j\,\hat{\tau}^j}_{\underset{(7.20)}{=}\hat{1}} + \sum_{j<k} e^j\,e^k\underbrace{\left(\hat{\tau}^j\,\hat{\tau}^k + \hat{\tau}^k\,\hat{\tau}^j\right)}_{\underset{(7.20)}{=}0} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(e^j\right)^2 \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E25b): Für Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\,z^\nu$$

mit unendlichem Konvergenzradius gilt:

$$\begin{aligned}f\left(\theta\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu}\,\theta_{2\nu}\underbrace{\left(\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right)^{2\nu}}_{\underset{\text{a)}}{=}\hat{1}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,\theta_{2\nu+1}\underbrace{\left(\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right)^{2\nu}+1}_{\underset{\text{a)}}{=}\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}} \\ &= \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu}\,\theta_{2\nu}}_{=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{z^\nu + (-z)^\nu}{2}}\ \hat{1} + \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,\theta_{2\nu+1}}_{=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{z^\nu - (-z)^\nu}{2}}\ \mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\end{aligned}$$

$$= \frac{f(\theta)+f(-\theta)}{2}\,\hat{1} + \frac{f(\theta)-f(-\theta)}{2}\,\mathbf{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\,. \tag{F.16}$$

Anwendung von (F.16) auf $f(z) = e^{-iz}$ unter Beachtung von (2.42) und (2.44) liefert die Behauptung.

Zu Aufgabe E25c): Die Behauptung folgt durch Anwendung von (F.16) auf $f(z) = e^{-z}$ unter Beachtung der Fußnote 9 von Kapitel 3.

Zu Aufgabe E26: Die Behauptung für $j = 1$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_{-\frac{\alpha}{2}}\,\hat{\tau}^1\,\hat{D}_{+\frac{\alpha}{2}}\\
&= \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{\tau}^2\right)\hat{\tau}^1\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{\tau}^2\right)\\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2}\,\hat{\tau}^1 + i\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^2\,\hat{\tau}^1}_{=-i\,\hat{\tau}^3} - i\,\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^1\,\hat{\tau}^2}_{=+i\,\hat{\tau}^3} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^1\,\underbrace{\hat{\tau}^1\,\hat{\tau}^2}_{=-\hat{\tau}^2\,\hat{\tau}^1}}_{=-\hat{\tau}^1}\\
&= \underbrace{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}_{=\cos\alpha}\hat{\tau}^1 + \underbrace{2\,\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}}_{=\sin\alpha}\,\hat{\tau}^3\,.
\end{aligned}$$

Die Behauptung für $j = 3$ folgt analog und die Behauptung für $j = 2$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{-\frac{\alpha}{2}}\,\hat{\tau}^2\hat{D}_{+\frac{\alpha}{2}} &= \hat{D}_{-\frac{\alpha}{2}}\,\hat{D}_{+\frac{\alpha}{2}}\,\hat{\tau}^2\\
&= \hat{\tau}^2\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E27: Die Behauptung für $j = 1$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&e^{+i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\,\hat{\tau}^1 e^{-i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\\
&\underset{\text{Aufg. E25b)}}{=} \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3\right)\hat{\tau}^1\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3\right)\\
&= \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^1 + i\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\cos\frac{\varphi}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^3\,\hat{\tau}^1}_{=+i\,\hat{\tau}^2} - i\,\cos\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^1\,\hat{\tau}^3}_{=-i\,\hat{\tau}^2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\,\underbrace{\hat{\tau}^3\,\underbrace{\hat{\tau}^1\,\hat{\tau}^3}_{=-\hat{\tau}^3\,\hat{\tau}^1}}_{=-\hat{\tau}^1}\\
&= \cos\varphi\,\hat{\tau}^1 - \sin\varphi\,\hat{\tau}^2\,.
\end{aligned}$$

Die Behauptung für $j = 2$ folgt analog und die Behauptung für $j = 3$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
e^{+i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\,\hat{\tau}^3 e^{-i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3} &= e^{+i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\,e^{-i\,\frac{\varphi}{2}\,\hat{\tau}^3}\,\hat{\tau}^3\\
&= \hat{\tau}^3\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E28a): Da

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

unitär ist, bilden wie $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ auch die Bildvektoren

$$\hat{U}\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

und

$$\hat{U}\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Aus $\left\langle \hat{U}\,\mathbf{e}_1 \mid \hat{U}\,\mathbf{e}_1 \right\rangle = 1$ folgt insbesondere

$$|U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 = 1$$

und somit die Existenz eines Winkels α mit

$$|U_{11}| = \cos\alpha\,, \quad |U_{12}| = \sin\alpha\,.$$

Es muß also

$$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+i\psi_1}\cos\alpha \\ e^{+i\psi_2}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

für geeignete $\psi_1\,,\ \psi_2 \in \mathbb{R}$ gelten. Da $\hat{U}\,\mathbf{e}_2$ durch $\hat{U}\,\mathbf{e}_1$ und die Orthonormalitätsbedingungen bis auf einen Phasenfaktor eindeutig festgelegt ist, muß weiterhin

$$\begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} -e^{-i\psi_2}\sin\alpha \\ e^{-i\psi_1}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$. gelten. Wegen $\det\hat{U} = 1$ kommt dafür aber nur $\varphi = 0 \mod 2\pi$ in Frage.

Zu Aufgabe E28b): Gemäß Aufgabe E25b) und (7.19) gilt (7.21). Mit

$$e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,\hat{S}_\varphi = e^{-i\frac{\varphi}{2}\hat{\tau}^3} \underset{(7.19)}{=} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{R}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\,\hat{S}_{\varphi_1}\,\underbrace{e^{-i\alpha\hat{\tau}^2}}_{=\hat{D}_{\frac{\alpha}{2}}}\,\hat{S}_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+i\frac{\varphi_2}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi_1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} & -e^{+i\frac{\varphi_1}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} \\ e^{-i\frac{\varphi_1}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} & e^{+i\frac{\varphi_1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} & -e^{+i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} \\ e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} & e^{+i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

für

$$\varphi_1 = -\psi_1 - \psi_2\,, \quad \varphi_2 = -\psi_1 + \psi_2$$

also die Behauptung.

Zu Aufgabe E29a): Die Behauptung gilt offensichtlich für $n = 1$ und folgt deshalb durch vollständige Induktion unter Verwendung von

$$[\hat{B}^{n+1}, \hat{A}]_- = \hat{B}\,[\hat{B}^n, \hat{A}]_- - [\hat{A}, \hat{B}]_-\,\hat{B}^n\,.$$

Zu Aufgabe E29b): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&:\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^N:\,\left(\hat{A}+\hat{B}\right) - :\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N+1}:\\
&= \left[:\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^N:,\,\hat{A}\right]_-\\
&= \sum_{\nu=0}^{N}\binom{N}{\nu}\hat{A}^\nu\left[\hat{B}^{N-\nu},\,\hat{A}\right]_-\\
&\underset{\text{a)}}{=} -\sum_{\nu=0}^{N}\binom{N}{\nu}\hat{A}^\nu[\hat{A},\hat{B}]_-\,(N-\nu)\,\hat{B}^{N-\nu-1}\\
&= -[\hat{A},\hat{B}]_-\sum_{\nu=0}^{N-1}N\binom{N-1}{\nu}\hat{A}^\nu\,\hat{B}^{(N-1)-\nu}\\
&= -N\,[\hat{A},\hat{B}]_-\;:\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N-1}:\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E29c): Für $N = 1$ ist

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^N = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^\nu :\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu}x^N\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : \tag{F.17}$$

offensichtlich erfüllt. Aus (F.17) folgt andererseits[6]

$$
\begin{aligned}
&\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N+1}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lceil N/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} x^N\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lceil N/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} \frac{N!}{(N-2\nu)!} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N-2\nu} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\\
&\underset{\text{b)}}{=} \sum_{\nu=0}^{\lceil N/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} \frac{N!}{(N-2\nu)!} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(N+1)-2\nu} :\\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{\lceil N/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu+1} \frac{2\,(N-2\nu)\,N!}{(N-2\nu)!} : \underbrace{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N-2\nu-1}}_{=\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(N+1)-2(\nu+1)}} :\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lceil N/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} \frac{N!}{(N-2\nu)!} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(N+1)-2\nu} :\\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{\lceil (N+1)/2\rceil} \frac{1}{(\nu-1)!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} \frac{2\,N!}{\big(N-2\,(\nu-1)-1\big)!} : \left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(N+1)-2\nu} :
\end{aligned}
$$

und daraus mit

$$
\frac{1}{\nu!}\,\frac{N!}{(N-2\nu)!} + \frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{2\,N!}{\big(N-2\,(\nu-1)-1\big)!} = \frac{1}{\nu!}\,\frac{(N+1)!}{\big((N+1)-2\nu\big)!}
$$

schließlich

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{N+1} &= \sum_{\nu=0}^{\lceil (N+1)/2\rceil} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} x^{N+1}\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} :\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} x^{N+1}\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : .
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung durch vollständige Induktion.

[6] Wir benutzen die übliche Bezeichnungsweise

$$\lceil N/2\rceil \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\nu \in \mathbb{Z}_+ : \nu \le N/2\}\,.$$

Zu Aufgabe E29d): Die Baker-Hausdorff-Formel folgt gemäß

$$
\begin{aligned}
e^{\hat{A}+\hat{B}} &\underset{\text{c)}}{=} \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} x^N\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!} x^N\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2\nu} e^x\right)_{|x=\hat{A}+\hat{B}} : \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-\right)^{\nu} : e^{\hat{A}+\hat{B}} : \\
&= e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]_-}\, e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\,.
\end{aligned}
$$

> **Anmerkung:** Streng genommen müßte man natürlich die Konvergenz (siehe 7.1.3) und Vertauschbarkeit der unendlichen Reihen beweisen. Bzgl. eines einfacheren, aber weniger instruktiven, Beweises siehe Fußnote 33 von Kapitel 1 in (Lücke, nlqo).

Zu Aufgabe E30: Gemäß Spektralsatz gilt

$$
\hat{A}^\dagger \hat{A} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } (\mathbf{e}'_1\,,\,\mathbf{e}'_2)
$$

mit

$$
E\,,\,E' > 0
$$

für eine geeignete Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}'_1\,,\,\mathbf{e}'_2\}$ von $\mathbb{C}$. Damit sind

$$
\begin{pmatrix} \pm\sqrt[+]{E} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt[+]{E'} \end{pmatrix}\,,\quad \begin{pmatrix} \pm\sqrt[+]{E} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt[+]{E'} \end{pmatrix}
$$

bzgl. $(\mathbf{e}'_1\,,\,\mathbf{e}'_2)$ Operatoren $\hat{B}$ der gewünschten Art.

> **Anmerkung:** Aufgabe E25a) zeigt, daß für $\hat{A} = \hat{1}$ eine nicht abzählbare Menge selbstadjungierter $\hat{B}$ mit $\hat{B} = \hat{A}^\dagger \hat{A}$ existiert.

Zu Aufgabe E31: Aus

$$
\begin{aligned}
\hat{A}^\dagger \hat{A} &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

folgt

$$\det\left(\hat{A}^\dagger \hat{A} - E\,\hat{1}\right) = (5-E)\,(1-E) - 4 = (E-3)^2 - 8\,.$$

Nach Aufgabe E20b) ist somit

$$\begin{pmatrix} -C^1{}_2 \\ C^1{}_1 - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \propto \mathbf{e}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{normiert}}$$

Eigenvektor von $\hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}^\dagger \hat{A}$ zum Eigenwert

$$E_\pm \stackrel{\text{def}}{=} 3 \pm 2\sqrt{2}\,.$$

Für

$$\hat{B} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[+]{\hat{A}^\dagger\,\hat{A}}$$

folgt mit

$$\left|\begin{pmatrix} i \\ 1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}\right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 1 & i\,(1 \mp \sqrt{2}) \\ -i\,(1 \mp \sqrt{2}) & 3 \mp \sqrt{8} \end{pmatrix}$$

daraus[7]

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \sqrt[+]{E_+}\,|\mathbf{e}_+\rangle\langle\mathbf{e}_+| + \sqrt[+]{E_-}\,|\mathbf{e}_-\rangle\langle\mathbf{e}_-| \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}}{4-\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{4+\sqrt{8}} & i\,\frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}}{4-\sqrt{8}}\left(1-\sqrt{2}\right) + i\,\frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{4+\sqrt{8}}\left(1+\sqrt{2}\right) \\ -i\,\frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}}{4-\sqrt{8}}\left(1-\sqrt{2}\right) - i\,\frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{4+\sqrt{8}}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}\,(3-\sqrt{8})}{4-\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}\,(3+\sqrt{8})}{4+\sqrt{8}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ +i & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

und entsprechend[8]

$$\begin{aligned}
\hat{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt[+]{E_+}}\,|\mathbf{e}_+\rangle\langle\mathbf{e}_+| + \frac{1}{\sqrt[+]{E_-}}\,|\mathbf{e}_-\rangle\langle\mathbf{e}_-| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ -i & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\hat{U} &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\hat{B}^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[7] Zur Auswertung der zweiten Zeile betrachte man die Quadrate der auf den Hauptnenner gebrachten Matrixelemente.

[8] In diesem Zusammenhang sei an Aufgabe E17 erinnert.

ergibt sich somit gemäß Lemma 7.3.20 die Polarzerlegung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{A}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}}_{=\hat{U}\in \mathrm{U}(2)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -i \\ +i & 1 \end{pmatrix}}_{=\hat{B}\geq 0} .$$

Zu Aufgabe E32: Sei

$$\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{U}\,\hat{B}$$

eine Polarzerlegung. Gemäß Aufgabe E31 ist dann

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ +i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\hat{U}$ kann ein beliebiger unitäre Operator auf $\mathbb{C}^3$ sein, der den Bedingungen

$$\hat{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{U}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genügt. Da unitäre Operatoren Orthonormalbasen wieder auf Orthonormalbasen abbilden, muß außerdem

$$\hat{U}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten. Die allgemeinste Polarzerlegung der vorgegebenen Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,e^{i\varphi} \end{pmatrix}}_{=\hat{U}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ +i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{B}} , \quad \varphi \in \mathbb{R} .$$

Zu Aufgabe E33: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Aufgabe E28a).

Zu Aufgabe E34a): Gemäß Aufgabe E23b) und Aufgabe E33 muß

$$\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$$

für geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$ und geeignete $a, b \in \mathbb{C}$ gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\delta &= \arg(a) - \arg(b)\,, \\
\delta' &= \arg(a^*) - \arg(-b^*) \\
&= -\arg(a) - \underbrace{\arg(-1)}_{=\pi} + \arg(b) \mod 2\pi
\end{aligned}$$

und somit

$$\delta + \delta' = \pi \mod 2\pi\,. \tag{F.18}$$

Zu Aufgabe E34b): Speziell für symmetrische Strahlteiler gilt

$$\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$$

mit $a = a^*$ und $b = -b^*$, also:

$$\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,b & a \end{pmatrix} \qquad \varphi, a, b \in \mathbb{R}\,, \quad a^2 + b^2 = 1\,.$$

Zu Aufgabe E34c): Für symmetrische 50/50-Strahlteiler muß zusätzlich noch $|a| = |b|$, also $|a| = |b| = 1/\sqrt{2}$, gelten und somit entweder

$$\hat{S} = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ +i & 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\hat{S} = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

für geeignetes $\psi \in \mathbb{R}$.

Zu Aufgabe E35a): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
|r| = |t| \qquad \Longrightarrow \qquad r\,r' + t\,t' &= |r|^2 \left(e^{i\left(\arg(r)+\arg(r')\right)} + e^{i\left(\arg(l)+\arg(l')\right)} \right) \\
&= |r|^2\, e^{i\left(\arg(l)+\arg(l')\right)} \left(e^{i(\delta+\delta')} + 1 \right) \\
&\underset{\text{E34a)}}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E35b): Für 50/50-Strahlteiler existieren gemäß Aufgabe E23b) und Aufgabe E33 reelle ψ_0, ψ_1, ψ_2 mit

$$\hat{S} = \frac{e^{i\psi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & -e^{-i\psi_2} \\ e^{i\psi_2} & +e^{-i\psi_1} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{\varphi_1}\mathbb{H}\,\hat{U}_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & +e^{i\varphi_2} \\ 1 & -e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi_2} \\ e^{i\varphi_1} & -e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

folgt damit

$$\hat{S} = e^{i\varphi_0}\,\hat{U}_{\varphi_1}\mathbb{H}\,\hat{U}_{\varphi_2}$$

für

$$\varphi_0 = \psi_0 + \psi_1\,, \quad \varphi_1 = \psi_2 - \psi_1\,, \quad \varphi_2 = -\psi_2 - \psi_1 + \pi\,.$$

Zu Aufgabe E35c): Speziell für symmetrische 50/50-Strahlteiler muß gemäß Aufgabe E34b)

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \bmod \pi\,, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \bmod 2\pi$$

gelten.

Zu Aufgabe E36: Gemäß Spektralsatz existieren eine ONB $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ von V und $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\hat{A}\,\mathbf{a}_\nu = E_\nu\,\mathbf{a}_\nu \quad \forall\,\nu \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Mit

$$\hat{U}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\,\mathbf{a}_\nu\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\,\mathbf{e}_\nu \quad \forall\,\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

und

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E37: Wenn man eine ONB $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ wählt und $\hat{A}$ als Matrix des entsprechenden linearen Operators $\hat{A}$ bzgl. dieser Basis auffaßt, dann folgt die Behauptung gemäß Aufgabe E36.

Zu Aufgabe E38a): Mit $\mathbf{a}_\nu$ und E_ν seien — wie in Aufgabe E36 — die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{A}$ bezeichnet.

Wenn die E_ν alle positiv sind, dann definiert

$$\hat{B}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\,\mathbf{a}_\nu\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\,\sqrt{E_\nu}\,\mathbf{a}_\nu$$

einen (selbstadjungierten) invertierbaren Operator $\hat{B}$ mit

$$\hat{A} = \hat{B}^\dagger \, \hat{B} \, .$$

Aus der 1. Aussage folgt also die 2. Aus der 2. Aussage folgt aber

$$\left.\begin{array}{c} \left\langle \mathbf{z} \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{z} \right\rangle = \left| \hat{B}\,\mathbf{z} \right|^2 \\ \hat{B}\,\mathbf{z} = 0 \;\Longrightarrow\; \mathbf{z} = 0 \end{array}\right\} \quad \forall\, \mathbf{z} \in V$$

und somit die 3. Aus der 3. Aussage folgt schließlich

$$0 < \left\langle \mathbf{a}_\nu \,\middle|\, \hat{A}\,\mathbf{a}_\nu \right\rangle = E_\nu \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

und somit die 1.

Zu Aufgabe E38b): Für $\hat{B} = \sqrt[+]{\hat{A}}$ folgt aus der Implikationsvoraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &= A^1{}_1 \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} B^1{}_\nu \, B^\nu{}_1 \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left| B^1{}_\nu \right|^2 , \end{aligned}$$

also

$$B^1{}_\nu = 0 \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

und somit

$$\begin{aligned} A^\nu{}_1 = A^1{}_\nu &= \sum_{\mu=1}^{n} B^1{}_\mu \, B^\mu{}_\nu \\ &= 0 \quad \forall\, \nu \in \{1, \ldots, n\} \; . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E39: Mit den entsprechenden $\mathbf{a}_\nu$, E_ν folgt aus der 1. Behauptung

$$\underline{\hat{A}^\dagger \, \hat{A} = \hat{A} \, \hat{A}^\dagger} = \hat{A}^2 \underline{= \hat{1}}$$

sowie

$$\underline{(E_\nu)^2} \, \mathbf{a}_\nu = \hat{A}^2 \, \mathbf{a}_\nu \underline{= 1} \, \mathbf{a}_\nu$$

und somit die 2. Aussage. Aus der 2. Aussage folgt umgekehrt mit den entsprechenden Bezeichnungen fast unmittelbar die 1.

Zu Aufgabe E40: Sei Ω die m-elementige Menge, aus der Elemente ausgewählt werden.

Im Falle 'mit/mit' entspricht dann jede Auswahl einem k-Tupel

$$(\omega_1', \ldots, \omega_k') \in \Omega^k = \Omega \times \ldots \times \Omega \,.$$

Dafür gibt es offensichtlich m^k Möglichkeiten.

Im Falle 'mit/ohne' entspricht jede Auswahl einem $(\omega_1', \ldots, \omega_k') \in \Omega^k$ mit paarweise verschiedenen ω_ν'. Wenn $\omega_1', \ldots, \omega_j'$ festgelegt sind, gibt es für ω_{j+1}' (falls $j < k$) nur noch $m - j$ Möglichkeiten. Die Anzahl aller Auswahlen ist also

$$\underline{\underline{\prod_{j=0}^{k-1} (m-j)}} = \frac{m!}{(m-k)!} = \underline{\underline{\binom{m}{k} k!}} \,.$$

Im Falle 'ohne/mit' sind alle k-Tupel zu identifizieren, die sich jeweils durch die Anordnung der ω_ν' unterscheiden. Da das für jeweils $k!$ der in Frage kommenden k-Tupel der Fall ist, ergibt sich für die Anzahl der Auswahlen

$$\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (m-j) \underset{\text{s.o.}}{=} \underline{\underline{\binom{m}{k}}} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \underline{\underline{\binom{m}{m-k}}} \,.$$

Im Falle 'ohne/mit' lassen sich die möglichen Auswahlen z.B. wie folgt darstellen: Man numeriere

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

und verteile auf $m-1$ von $m+k-1$ festgelegten Plätzen Kommata und identifiziere

> die Zahl der freien Plätze <u>vor</u> dem j-ten Komma jeweils mit der Vielfachheit von ω_j in der Auswahl

sowie

> die Zahl der freien Plätze <u>nach</u> dem $(m-1)$-ten Komma mit der Vielfachheit von ω_m in der Auswahl.

Die Anzahl der möglichen Auswahlen stimmt also mit der Anzahl der 'ohne/ohne'-Auswahlen von $m-1$ aus $m+k-1$ Plätzen überein und ist dementsprechend

$$\underline{\underline{\binom{m+k-1}{m-1}}} = \binom{m+k-1}{m+k-1-(m-1)} = \underline{\underline{\binom{m+k-1}{k}}} \,.$$

Zu Aufgabe E41a): $\underline{\underline{p_\mu(\emptyset) = 0}}$ folgt aus

$$\sum_{\omega \in \emptyset} \ldots \underset{\text{Def.}}{=} 0$$

und $\underline{\underline{p_\mu(\Omega) = 1}}$ aus

$$p_\mu(\Omega) \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) \underset{\text{Vorauss.}}{=} 1\,.$$

Für $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ folgt außerdem

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p_\mu\left(E_1 \cup E_2\right)}} &\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega\in E_1\cup E_2} \mu(\omega) \\ &= \sum_{\omega\in E_1} \mu(\omega) + \sum_{\omega\in E_2} \mu(\omega) \\ &\underset{\text{Def.}}{=} \underline{\underline{p_\mu(E_1) + p_\mu(E_2)}}\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E41b): Aus

$$\sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{\mu(\omega)}_{\geq 0} \underset{\text{Vorauss.}}{=} 1 \tag{F.19}$$

folgt $\mu(\omega) \in [0,1]$ und somit

$$\underline{\underline{p_\mu\left(\{\omega\}\right)}} = \sum_{\omega'\in\{\omega\}} \mu(\omega') = \underline{\underline{\mu(\omega) \in [0,1]}}\,.$$

Für konstantes μ folgt aus (F.19)

$$\mu(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

und damit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p_\mu(E)}} &\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega\in E} \mu(\omega) \\ &= \sum_{\omega\in E} \frac{1}{|\Omega|} \\ &= \underline{\underline{\frac{|E|}{|\Omega|}}}\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E42: Die Elemente von Ω sind hier die $\binom{49}{6}$ Ziehungen von jeweils 6 Zahlen aus 49.

Die Zahl der Ziehungen, in denen jeweils nur genau eine bestimmte der getippten Zahlen nicht vorkommt, ist 49-6=43. Da der Tipp 6 verschiedene Zahlen enthält, gibt es also $6 \times 43 = 258$ Ziehungen, für die jeweils genau 5 Zahlen mit denen des Tipps übereinstimmen. Nach Aufgabe 40 ist die Wahrscheinlichkeit für '5 richtige' also

$$\frac{258}{\binom{49}{6}} \approx 1{,}85 \times 10^{-5}\,.$$

Zu Aufgabe E43: Hier ist

$$\Omega = \{\text{Tür}\,1, \text{Tür}\,2, \text{Tür}\,3\} \;.$$

Strategie A führt genau dann zum Erfolg, wenn das 'Ereignis'

$$E_{\mathrm{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Tür}\,1\}$$

eintritt, gemäß Aufgabe E41 also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|E_{\mathrm{A}}|}{|\Omega|} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}\,.$$

Strategie B führt dagegen genau dann zum Erfolg, wenn

$$E_{\mathrm{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Tür}\,2, \text{Tür}\,3\}$$

eintritt, führt also mit der <u>größeren</u> Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|E_{\mathrm{B}}|}{|\Omega|} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

zum Erfolg.

Zu Aufgabe E44a): Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von $p_\mu(E_1|E_2)$.

Zu Aufgabe E44b): Gemäß Aufgabe E41a) gilt

$$p_\mu\Big(\underbrace{(E_1 \cap E_2) \cup \Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big)}_{=E_1}\Big) = p_\mu\,(E_1 \cap E_2) + p_\mu\Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big)$$

und

$$1 = p_\mu(\Omega) = p_\mu(E_2) + p_\mu(\Omega \setminus E_2)\,,$$

also

$$p_\mu(\Omega \setminus E_2) = 1 - p_\mu(E_2) \neq 0\,.$$

Mit a) folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E44c): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
E_1, E_2 \text{ unabhängig} \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}\; & p_\mu\,(E_1 \cap E_2) = p_\mu\,(E_1) + p_\mu\,(E_2) \\
\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow}\; & \begin{cases} p_\mu(E_1|E_2) = p_\mu(E_1) & \text{falls } p_\mu(E_2) \neq 0 \\ p_\mu(E_2|E_1) = p_\mu(E_2) & \text{falls } p_\mu(E_1) \neq 0 \end{cases} \\
\Longrightarrow\; & \begin{cases} \qquad p_\mu(E_1|E_2)\,p_\mu(E_2) = p_\mu(E_1)\,p_\mu(E_2) \\ \text{oder/und } p_\mu(E_2|E_1)\,p_\mu(E_1) = p_\mu(E_1)\,p_\mu(E_2) \end{cases} \\
\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow}\; & p_\mu\,(E_1 \cap E_2) = p_\mu\,(E_1) + p_\mu\,(E_2) \\
\underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}\; & E_1, E_2 \text{ unabhängig}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E44d): Aus

$$(E_1 \cap E_2) \cap \Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big) = \emptyset$$

und

$$(E_1 \cap E_2) \cup \Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big) = E_1$$

folgt gemäß Aufgabe E41a)

$$p_\mu(E_1) = p_\mu\,(E_1 \cap E_2) + p_\mu\Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big)\,,$$

für statistisch unabhängige E_1, E_2 also

$$\begin{aligned} p_\mu\Big(E_1 \cap (\Omega \setminus E_2)\Big) &= p_\mu(E_1) - p_\mu(E_1)\,p_\mu(E_2) \\ &= p_\mu(E_1)\Big(1 - p_\mu(E_2)\Big) \\ &\underset{\text{Aufg. E41a)}}{=} p_\mu(E_1)\,p_\mu\,(\Omega \setminus E_2)\ . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E44e): Aus den Implikationsvoraussetzungen folgt

$$\begin{aligned} p_\mu\Big((E_\mathrm{A} \times \Omega_\mathrm{B}) \cap (\Omega_\mathrm{A} \times E_\mathrm{B})\Big) &= p_\mu(E_\mathrm{A} \times E_\mathrm{B}) \\ &\underset{\text{Aufg. 41b)}}{=} \frac{|E_\mathrm{A} \times E_\mathrm{B}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|E_\mathrm{A}|\,|E_\mathrm{B}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|E_\mathrm{A}|\,|\Omega_\mathrm{B}|}{|\Omega|}\,\frac{|\Omega_\mathrm{A}|\,|E_\mathrm{B}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|E_\mathrm{A} \times \Omega_\mathrm{B}|}{|\Omega|}\,\frac{|\Omega_\mathrm{A} \times E_\mathrm{B}|}{|\Omega|} \\ &\underset{\text{Aufg. 41b)}}{=} p_\mu(E_\mathrm{A} \times \Omega_\mathrm{B})\,p_\mu(\Omega_\mathrm{A} \times E_\mathrm{B})\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E45a): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} \Big(a(\Omega) - \langle A\rangle\Big)^2 \mu(\omega) \\ &= \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} \Big(a(\omega)\Big)^2 \mu(\omega)}_{\langle A^2\rangle} - 2\,\langle A\rangle \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} a(\omega)\,\mu(\omega)}_{\langle A\rangle} + \langle A\rangle^2 \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega)}_{=1}\ . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E45b): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\Delta A = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\Delta A)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{\Big(a(\Omega) - \langle A\rangle\Big)^2}_{\geq 0} \underbrace{\mu(\omega)}_{\geq 0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big(\mu(\omega) \neq 0 \implies a(\omega) = \langle A\,\rangle\Big) \quad \forall\,\omega\in\Omega\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E45c): Gemäß Fußnote 11 zu Aufgabe E41 sollte

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \omega_n=\omega}}^{N} 1}_{\text{rel. Häufigk. von } \omega} \quad \xrightarrow[N\to\infty]{} \mu(\omega) \qquad \forall\,\omega\in\Omega$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a(\omega_n) \quad &= \quad \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{\substack{n=1\\ \omega_n=\omega}}^{N} a(\omega_n) \\
&= \quad \sum_{\omega\in\Omega} a(\omega)\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \omega_n=\omega}}^{N} 1 \\
&\longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} a(\omega)\,\mu(\omega)}_{=\langle A\rangle}
\end{aligned}$$

gelten.

Zu Aufgabe E45d): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\langle A_1 + A_2\rangle \quad &\underset{\text{Def.}}{=} \quad \sum_{\omega\in\Omega}\Big(a_1(\omega) + a_2(\omega)\Big)\,\mu(\omega) \\
&= \quad \sum_{\omega\in\Omega} a_1(\omega)\,\mu(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} a_2(\omega)\,\mu(\omega) \\
&= \quad \langle A_1\rangle\,\langle A_2\rangle\ .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E46a): Gemäß Aufgabe E41a) gilt

$$\mu(\mathbf{b}) = p_\mu\Big(\{\mathbf{b}\}\Big) \quad \forall\,\mathbf{b}\in\Omega$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{b}) \quad &= \quad p_\mu\left(\left(\bigcap_{\substack{\nu=1\\ b_\nu=1}}^N E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\nu'=1\\ b_{\nu'}=1}}^N (\Omega \setminus E_{\nu'})\right)\right)\\
&\underset{\substack{E_\nu, E \text{ unabh.}\\ \text{Aufg. E44d)}}}{=} \left(\prod_{\substack{\nu=1\\ b_\nu=1}}^N \underbrace{p_\mu(E_\nu)}_{\bar{n}/N}\right) \prod_{\substack{\nu'=1\\ b_{\nu'}=1}}^N \underbrace{p_\mu(\Omega \setminus E_{\nu'})}_{1-\bar{n}/N}\\
&= \quad \prod_{\nu=1}^N \left(\frac{\bar{n}}{N}\,\delta_{1,b_\nu} + \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)\delta_{0,b_\nu}\right) \quad \forall\, \mathbf{b} \in \Omega\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E46b): Aus

$$b_1 + \ldots + b_N = n \underset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \mu(\mathbf{b}) = \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mu'_N(n) \quad &\underset{\text{Aufg. E41a)}}{=} \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\Omega\\ b_1+\ldots+n_N=n}} \underbrace{p_\mu\big(\{\mathbf{b}\}\big)}_{\underset{\text{Aufg. E41b)}}{=} \mu(\mathbf{b})}\\
&\underset{\text{Aufg. E40}}{=} \binom{N}{n}\left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} \qquad \forall\, n \in \{0,\ldots,N\}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E46c): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\mathbf{b}\in\Omega}\mu(\mathbf{b}) \quad &= \quad \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\Omega\\ b_1+\ldots+b_N=n}} \mu(\mathbf{b})\\
&\underset{\text{Aufg. E41a)}}{=} \sum_{n=0}^N \mu'_N(n)\\
&\underset{\text{b)}}{=} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n}\left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}\\
&\underset{\text{Binom.}-\text{Satz}}{=} \left(\frac{\bar{n}}{N} - \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)\right)^N\\
&= \quad 1\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E46d): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned} F(\xi) &\underset{\text{b)}}{=} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left((1+\xi)\,\frac{\bar n}{N} \right)^n \left(1 - \frac{\bar n}{N} \right)^{N-n} \\ &\underset{\text{Binom.-Satz}}{=} \left((1+\xi)\,\frac{\bar n}{N} - \left(1 - \frac{\bar n}{N} \right) \right)^N \\ &= \left(1 + \xi\,\frac{\bar n}{N} \right)^N . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E46e): Die Behauptung folgt aus

$$\sum_{n=0}^{N} n\,\mu'(n) = F'(0) \underset{\text{d)}}{=} \bar n \,.$$

Zu Aufgabe E46f): Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} &\binom{N}{n} \left(\frac{\langle n \rangle}{N} \right)^n \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right)^{N-n} \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \underbrace{\frac{n\,(N-1)\ldots\big(N-(n-1)\big)}{N^n} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right)^n}_{\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right)^N}_{\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\langle n \rangle}} . \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E47a): Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, daß[9]

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n \frac{1}{\sqrt[+]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \qquad \forall\, x \in (-1,+1)\,,\ n \in \mathbb{Z}_+$$

gilt. Die TAYLOR-Entwicklung von $1/\sqrt[+]{1+x}$ um $x=0$ herum ist folglich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[+]{1+x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,\frac{x}{1!} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \forall\, x \in (-1,+1) \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

[9] Allgemein definiert man

$$\prod_{\nu=n_1}^{n_2} a_\nu \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \textbf{falls}\ n_2 < n_1 \,.$$

Nebenbei sei angemerkt, daß

$$2^n\, n! = \prod_{\nu=1}^{n} (2\,\nu) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(man sieht leicht, daß das Restglied $\frac{1}{n!}\int_0^x (x-\xi)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[+]{1+\xi}}\,\mathrm{d}\xi$ der (4.12) entsprechenden TAYLOR-Entwicklung für $n \to \infty$ tatsächlich gegen Null konvergiert). Für $\underline{r \ll r'}$ folgt daraus

$$
\begin{aligned}
\frac{r'}{|r'\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)|} &= \frac{r'}{\sqrt{\Big(r'\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)\cdot\Big(r'\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)}} \\
&= \frac{r'}{\sqrt{(r')^2 - 2\,r'\,\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi) + r^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\frac{r}{r'}\,\cos\vartheta + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\,\frac{r}{r'}\,\cos\vartheta\right)^n \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\boxed{\frac{r'}{|r'\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)|} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\vartheta) \quad \text{für } 0 \le r \ll r'\,,} \tag{F.20}
$$

für geeignete Polynome P_n, die man als LEGENDRE-***Polynome*** bezeichnet. Daß es sich dabei wirklich um die in 8.2.1 abgehandelten LEGENDRE-Polynome handelt, wird in Abschnitt 1.4.1 von (Lücke, edyn) gezeigt. Die ersten drei dieser Polynome sind offensichtlich: (LEGENDRE-***Polynome***, ***Kugelfunktionen 1. Art***)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
P_0(\cos\vartheta) &= 1\,, \\
P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta\,, \\
P_2(\cos\vartheta) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\,.
\end{aligned}
} \tag{F.21}
$$

Aus (F.20) folgt

$$
\Phi\,(r'\mathbf{e}_3) = -\frac{\mathrm{G}}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q_l}{(r')^l} \quad \forall\, r' > R\,, \tag{F.22}
$$

unmittelbar mit

$$
Q_l \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R r^{2+l}\sin\vartheta\,P_l(\cos\vartheta)\,\mu\Big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}_+\,. \tag{F.23}
$$

Aus (F.23) und (F.22) folgt

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}\mu\Big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)\,r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int \mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,, \\
Q_1 &= \int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^{\pi}\Bigg(\int_0^{R}\mu\Big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\Big)\;\underbrace{r\,\cos\vartheta}_{=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)}\;r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\Bigg)\mathrm{d}\vartheta\Bigg)\mathrm{d}\varphi \\
&= \mathbf{e}_3\cdot\int \mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,, \\
Q_2 &= \int |\mathbf{x}|^2\left(\frac{3}{2}\,\cos^2(\angle\mathbf{e}_3,\mathbf{x})-\frac{1}{2}\right)\mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,.
\end{aligned}$$

Die ersten drei Beiträge zu (F.22) sind also

1. das ***Monopol-Potential***

$$-\mathrm{G}\,\frac{M}{r'}\;,\quad M\stackrel{\text{def}}{=}\underbrace{\int\mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}}_{=\text{Gesamtmasse}}\,,$$

2. das ***Dipol-Potential***

$$-\mathrm{G}\,\frac{\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{P}}{(r')^2}\;,\quad \mathbf{P}\stackrel{\text{def}}{=}\underbrace{\int\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}}_{=\text{Dipolmoment}}\,,$$

   und

3. das ***Quadrupol-Potential***

$$-\frac{\mathrm{G}}{2}\,\frac{Q(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)}{(r')^3}$$

   mit dem (symmetrischen) ***Quadrupoltensor***

$$Q(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\stackrel{\text{def}}{=}\int 3\Big((\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x})(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x})-|\mathbf{x}|^2\,(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)\Big)\mu(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\quad\forall\,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^3\,.$$

Anmerkung: Man beachte, daß M, $\mathbf{P}$ und $Q(.,.)$ nicht von der Wahl von $\mathbf{e}_3$ abhängen.

Zu Aufgabe E47b): Zu Aufgabe 62 wurde gezeigt, daß

$$\begin{aligned} &\mu(\mathbf{x}) = \check{\mu}\left(|\mathbf{x}|\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \Longrightarrow\ &\Phi(\mathbf{x}) = -\mathrm{G}\,\frac{M}{|\mathbf{x}|} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Für kugelsymmetrisches (räumlich begrenztes) μ gilt also gemäß (F.22)

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(r'\,\mathbf{e}_3) - \left(-\mathrm{G}\,\frac{M}{r'}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{G}}{r'}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{Q_l}{(r')^l} \quad \forall\, r' > R\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung[10] folgt daraus die Behauptung.

Anmerkung: Man beachte, daß die Behauptung wegen

$$\mu(\mathbf{x}) = \check{\mu}(|\mathbf{x}|) \underset{\text{(F.23)}}{\Longrightarrow} Q_l \propto \int_0^\pi \sin\vartheta\, P_l(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \quad \forall\, l \in \mathbb{N}$$

äquivalent ist zu

$$\int_{-1}^{+1} \underbrace{\Big(P_0(x)\Big)^*}_{=1} P_l(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}\,.$$

Zu Aufgabe E48a): Falls f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\Big(\|\Psi\|_1 < \delta \Longrightarrow \|f(\Psi) - f(0)\|_2 < 1\Big) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}_1\,.$$

Da f linear ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_1 < A \quad \Longrightarrow \quad \|f(\Psi)\|_2 &= \frac{A}{\delta}\left\|f\left(\frac{\delta}{A}\,\Psi\right)\right\|_2 \\ &< \frac{A}{\delta} \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

für alle $A > 0$ und somit die Beschränktheit von f.

Umgekehrt, wenn f beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit

$$\Big(\|\Psi\|_1 < 1 \Longrightarrow \|f(\Psi)\|_2 < C\Big) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}_1\,.$$

[10] Wir verzichten hier auf detaillierte Konvergenzbetrachtungen.

Aufgrund der Linearität von f folgt daraus

$$\|\Psi_1 - \Psi_2\|_1 < \tfrac{\epsilon}{C} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \|f(\Psi_1) - f(\Psi_2)\|_2 &= \frac{\epsilon}{C}\left\| f\left(\frac{C}{\epsilon}(\Psi_1 - \Psi_2)\right)\right\|_2 \\ &< \epsilon \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

für alle $\epsilon > 0$ und somit die Stetigkeit von f.

Zu Aufgabe E48b): Wenn $\mathcal{H}_1$ endlichdimensional ist, dann existiert eine ONB $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ von $\mathcal{H}_1$ und damit gilt

$$\begin{aligned} \|f(\Psi)\|_2 &= \left\| f\left(\sum_{\nu=1}^n \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle \, \Phi_\nu\right)\right\|_2 \\ &= \left\| \sum_{\nu=1}^n \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle \, f(\Phi_\nu)\right\|_2 \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n \left\| \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle \, f(\Phi_\nu)\right\|_2 \\ &\leq \|\Psi\|_1 \underbrace{\sum_{\nu=1}^n \|f(\Phi_\nu)\|_2}_{\text{unabh. von } \Psi} \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}_1\,, \end{aligned}$$

woraus offensichtlich die Beschränktheit von f folgt.

Zu Aufgabe E49: Für jede ONB $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ von $\mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} |B(\Psi_1, \Psi_2)| &= \left| B\left(\sum_{\nu=1}^n \langle \Phi_\nu \mid \Psi_1 \rangle \, \Phi_\nu, \sum_{\mu=1}^n \langle \Phi_\mu \mid \Psi_2 \rangle \, \Phi_\mu\right)\right| \\ &= \left| \sum_{\nu,\mu=1}^n \langle \Phi_\nu \mid \Psi_1 \rangle \langle \Phi_\mu \mid \Psi_2 \rangle \, B(\Phi_\nu, \Phi_\mu)\right| \\ &\leq \sum_{\nu,\mu=1}^n \left| \langle \Phi_\nu \mid \Psi_1 \rangle \langle \Phi_\mu \mid \Psi_2 \rangle \, B(\Phi_\nu, \Phi_\mu)\right| \\ &\leq \|\Psi_1\| \, \|\Psi_2\| \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^n B(\Phi_\nu, \Phi_\mu)}_{\text{unabh. von } \Psi_1, \Psi_2} \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt offensichtlich die Beschränktheit von B.

Zu Aufgabe E50a): Aus

$$\begin{aligned} & e^{-i\nu\varphi}\,\cos(\varphi)\cos(N\varphi) \\ = \; & \frac{1}{4}\,e^{-i\,\nu\,\varphi}\left(e^{+i\,\varphi}+e^{-i\,\varphi}\right)\left(e^{+i\,N\,\varphi}+e^{-i\,N\,\varphi}\right) \\ = \; & \frac{1}{4}\left(e^{+i\,(N+1-\nu)\,\varphi}+e^{+i\,(N-1-\nu)\,\varphi}+e^{-i\,(N-1+\nu)\,\varphi}+e^{-i\,(N+1+\nu)\,\varphi}\right) \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{+i\,n\,\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\delta_{0,n}$$

folgt

$$\langle e_\nu \mid f\rangle=\frac{1}{4}\left(\delta_{|\nu|,N+1}+\delta_{|\nu|,N-1}\right)$$

und somit

$$f=\frac{1}{4}\left(e_{N+1}+e_{-N-1}+e_{N-1}+e_{-(N-1)}\right)\,.$$

Also gilt

$$f(\varphi)=\frac{1}{2}\,\cos\Big((N+1)\,\varphi\Big)+\frac{1}{2}\,\cos\Big((N-1)\,\varphi\Big)\quad\forall\,\varphi\in\mathbb{R}\,,$$

was sich auch mithilfe des entsprechenden Additionstheorems leicht nachprüfen läßt.

Zu Aufgabe E50b): Für $\varphi(t)=\omega\,t$ stellt $A(t)=2\,f\Big(\varphi(t)\Big)$ eine *Schwebung* der harmonischen Schwingung $\cos(N\,\omega\,t)$ dar, die sich durch Überlagerung der 'nahezu' gleichen Schwingungen $\cos\Big((N+1)\,\omega\,t\Big)$ und $\cos\Big((N-1)\,\omega\,t\Big)$ ergibt.

Zu Aufgabe E51a): Für $\nu\neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} i\,\nu\,\langle e_\nu\mid f\rangle &= \frac{i\,\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\,\nu\,\varphi}\,f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,e^{-i\,\nu\,\varphi}\right)f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &\underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\,\nu\,\varphi}\,g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \langle e_\nu\mid g\rangle\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E51b): Sei $M=\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$. Dann ergibt sich durch Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^*\,b_\mu\right|\le {}^+\!\!\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}|a_\mu|^2}\;{}^+\!\!\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}|b_\mu|^2}$$

auf

$$a_\mu = \frac{1}{\nu}$$

und

$$\begin{aligned} b_\mu &= \left|\nu_\mu \left\langle e_{\nu_\mu} \mid f \right\rangle\right| \\ &\underset{\text{a)}}{=} \left|\left\langle e_{\nu_\mu} \mid g \right\rangle\right| \end{aligned}$$

direkt die Ungleichung

$$\sum_{\nu \in M} |\langle e_\nu \mid f \rangle| \leq \sqrt[+]{\sum_{\nu \in M} \left(\frac{1}{\nu}\right)^2} \sqrt[+]{\sum_{\nu \in M} |\langle e_\nu \mid g \rangle|^2} \,.$$

Zu g läßt sich leicht eine CAUCHY-Folge $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(S^1)$ konstruieren mit

$$\lim_{n \to \infty} \langle e_\nu \mid g_n \rangle = \langle e_\nu \mid g \rangle \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z} \,.$$

Da $\{e_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ ein MONS des HILBERT-Raums $\overline{C(S^1)}$ ist, existiert ein $z \in \ell^2$ mit

$$\lim_{n \to \infty} g_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z_\nu \, e_\nu \,,$$

woraus natürlich

$$\begin{aligned} z_\nu &= \lim_{n \to \infty} \langle e_\nu \mid g_n \rangle \\ &= \langle e_\nu \mid g \rangle \quad \forall \nu \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\langle e_\nu \mid g \rangle|^2 < \infty$$

folgt.

Zu Aufgabe E51c): Die absolute Konvergenz, d.h.

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left|\langle e_\nu \mid f \rangle \, e^{i\,\nu\,\varphi}\right| < \infty \,,$$

folgt direct aus b).

Zu Aufgabe E52a): Für die durch

$$f(\varphi + 2\pi\, n) = \varphi^2 \quad \forall\, [-\pi, +\pi] \,,\, n \in \mathbb{Z}$$

eindeutig charakterisierte Funktion $f \in C(S^1)$ gilt

$$\begin{aligned}
-\nu^2\, 2\pi\, \langle e_\nu \mid f \rangle &= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \right)^2 e^{-i\,\nu\,\varphi} \right) \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \right)^2 e^{-i\,\nu\,\varphi} \right) \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\, e^{-i\,\nu\varphi} \right) \varphi^2 \Big|_{-\pi}^{+\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\, e^{-i\,\nu\,\varphi} \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\, \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} -e^{-i\,\nu\varphi}\, 2\varphi \Big|_{-\pi}^{+\pi} + 2 \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\,\nu\varphi}\, \mathrm{d}\varphi}_{=0 \text{ für } \nu\neq 0}
\end{aligned}$$

und somit

$$\langle e_\nu \mid f \rangle = 2\, \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ .$$

Mit

$$\begin{aligned}
\langle e_0 \mid f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{6\pi}\, \varphi^3 \Big|_{-\pi}^{+\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z} \\ \nu\neq 0}} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\, e^{i\,\nu\varphi} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\, \cos(n\varphi) \quad \forall\, \varphi \in [-\pi, +\pi]\, .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E52b): Für $\varphi = \pi$ folgt aus a)

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}$$

und daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E52c): Für $\varphi = 0$ folgt aus a)

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

und daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E53: Wir wählen eine ONB $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ von $\mathcal{H}$. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{w - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi}} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty} \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle = \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi \right\rangle \quad \forall \kappa \in \{1, \ldots, n\} \\
&\Longrightarrow \quad \|\Psi - \Psi_\nu\|^2 \quad = \quad \sum_{\kappa=1}^n \left| \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi \right\rangle - \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle \right|^2 \\
&\qquad\qquad\qquad \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \quad = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \underline{\underline{s - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi}} \\
&\Longrightarrow \quad \left| \left\langle \Phi \middle| \Psi_\nu \right\rangle - \left\langle \Phi \middle| \Psi \right\rangle \right| \quad = \quad \left| \left\langle \Phi \middle| \Psi_\nu - \Psi \right\rangle \right| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underset{\text{SCHWARZ}}{\leq} \quad \|\Phi\| \, \|\Psi_\nu - \Psi\| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{H} \\
&\Longrightarrow \quad \underline{\underline{w - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi\,.}}
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe E54: Seien $\mathcal{H}$ ein EUKLIDischer Vektorraum und $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ eine ONB von $\mathcal{H}$. Für jede Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_\nu - \psi_\mu\|^2 \quad &= \quad \left\| \sum_{\kappa=1}^n \left(\left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle - \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\mu \right\rangle \right) \Phi_\kappa \right\|^2 \\
&= \quad \sum_{\kappa=1}^n \left| \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle - \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\mu \right\rangle \right|^2 .
\end{aligned}
$$

Wenn $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{H}$ ist, dann ist für jedes $\kappa \in \{1, \ldots, n\}$ also $\left\{ \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle \right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{C}$, d.h. es existieren komplexe Zahlen λ_κ mit

$$
\lambda_\kappa = \lim_{\nu\to\infty} \left\langle \Phi_\kappa \middle| \Psi_\nu \right\rangle \quad \forall \kappa \in \{1, \ldots, n\} .
$$

Damit gilt offensichtlich

$$
w - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\kappa=1}^n \lambda_\kappa \Phi_\kappa ,
$$

gemäß Aufgabe E53 also auch

$$
s - \lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi .
$$

Zu Aufgabe E55: Die Behauptung folgt analog zu Aufgabe E53 mit

$$
\Psi_{\Delta t} = \frac{\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t)}{\Delta t} \quad \text{statt} \quad \Psi_\nu .
$$

Zu Aufgabe E56a): Die

$$\Psi_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

bilden offensichtlich eine CAUCHY-Folge:[11]

$$\begin{aligned} N < \nu < \mu \quad \Longrightarrow \quad \|\Psi_\nu - \Psi_\mu\|^2 \quad &= \quad \left\| \sum_{\kappa=\nu+1}^{\mu} \frac{1}{\kappa}\,\Phi_\kappa \right\|^2 \\ &= \quad \sum_{\kappa=\nu+1}^{\mu} \kappa^{-2} \\ &= \quad \sum_{\kappa=N}^{\mu} \kappa^{-2} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Gemäß Definition 8.1.14 existiert also ein $\Psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\Psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu \tag{F.24}$$

und dies ist natürlich eindeutig.

Denn:

$$\begin{aligned} \Psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu\,, \quad \Psi' &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu \\ \Longrightarrow \quad \|\Psi - \Psi'\| \quad &= \quad \left\| \left(\Psi - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu\right) - \left(\Psi' - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu\right) \right\| \\ &\underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \quad \left\| \Psi - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu \right\| \left\| \Psi' - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\Phi_\nu \right\| \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe E56b): Jedes $\check{\Psi} \in \check{\mathcal{H}}$ ist von der Form

$$\check{\Psi} = \lambda_1\,\Psi + \sum_{\nu=2}^{N} \lambda_\nu\,\Phi_\nu\,,$$

[11]Man beachte, daß $\kappa^{-2} \leq \int_{\kappa-1}^{\kappa} \frac{1}{x^2}\,dx$ und somit:

$$\sum_{\kappa=N}^{\infty} \kappa^{-2} \leq \int_{N-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{N-1}\,.$$

woraus

$$\left\langle \Phi_{N+1} \,\middle|\, \check{\Psi} \right\rangle = \frac{\lambda_1}{N+1}$$

und somit

$$\check{\Psi} \perp \Phi_\nu \quad \forall\, \nu \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 0$$

folgt. Nur für $\check{\Psi} = 0$ gilt deshalb $\check{\Psi} \perp \Phi_\nu \; \forall\, \nu \geq 2$, d.h. $\{\Phi_\nu\}_{\nu \geq 2}$ ist ein MONS von $\check{\mathcal{H}}$.

Zu Aufgabe E56c): Offensichtlich gilt

$$\left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \Psi \right\rangle = \frac{1}{\nu} \quad \forall\, \nu \in N$$

und somit

$$\Psi - \sum_{\nu \geq 2} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \Psi \right\rangle \Phi_\nu = \Phi_1 \neq 0\,.$$

Zu Aufgabe E57a): Seien $\Psi_1, \Psi_2 \in D_{\hat{A}}$ und entweder

$$S(\Psi_1, \Psi_2) = \left\langle \Psi_1 \mid \hat{A}\, \Psi_2 \right\rangle$$

oder

$$S(\Psi_1, \Psi_2) = \left\langle \hat{A}\, \Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S(\Psi_1 \pm \Psi_2, \Psi_1 \pm \Psi_2) &= S(\Psi_1, \Psi_1 \pm \Psi_2) \pm S(\Psi_2, \Psi_1 \pm \Psi_2) \\ &= S(\Psi_1, \Psi_1) \pm S(\Psi_1, \Psi_2) \pm S(\Psi_2, \Psi_1) + S(\Psi_2, \Psi_2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} S(\Psi_1 \pm i\Psi_2, \Psi_1 \pm i\Psi_2) &= S(\Psi_1, \Psi_1 \pm i\Psi_2) \mp iS(\Psi_2, \Psi_1 \pm i\Psi_2) \\ &= S(\Psi_1, \Psi_1) \pm i\, S(\Psi_1, \Psi_2) \mp i\, S(\Psi_2, \Psi_1) - i\, S(\Psi_2, \Psi_2)\,. \end{aligned}$$

und somit

$$S(\Psi_1 + \Psi_2, \Psi_1 + \Psi_2) - S(\Psi_1 - \Psi_2, \Psi_1 - \Psi_2) = 2\left(S(\Psi_1, \Psi_2) + S(\Psi_2, \Psi_1)\right)$$

sowie

$$S(\Psi_1 + i\Psi_2, \Psi_1 + i\Psi_2) - S(\Psi_1 - i\Psi_2, \Psi_1 - i\Psi_2) = 2i\left(S(\Psi_1, \Psi_2) - S(\Psi_2, \Psi_1)\right).$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} S(\Psi_1 + \Psi_2, \Psi_1 + \Psi_2) - {}& S(\Psi_1 - \Psi_2, \Psi_1 - \Psi_2) \\ -i\Big(S(\Psi_1 + i\Psi_2, \Psi_1 + i\Psi_2) - {}& S(\Psi_1 - i\Psi_2, \Psi_1 - i\Psi_2)\Big) \end{aligned}\right\} = 4\, S(\Psi_1, \Psi_2)$$

und damit wegen

$$\left(i^{-0}, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}\right) = (1, -i, -1, +i)\;, \quad \left(i^{+0}, i^{+1}, i^{+2}, i^{+3}\right) = (1, +i, -1, -i)$$

die Behauptung:

$$S(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} S(\Psi_1 + i^k \Psi_2, \Psi_1 + i^k \Psi_2)\,.$$

Zu Aufgabe E57b): Wenn $\hat{A}$ HERMITEsch ist, muß insbesondere

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi \mid \hat{A}\,\Psi \right\rangle & \underset{\text{Def. 8.3.1}}{=} \left\langle \hat{A}\,\Psi \mid \Psi \right\rangle \\ & \underset{(7.5)}{=} \left(\left\langle \Psi \mid \hat{A}\,\Psi \right\rangle \right)^* \end{aligned} \qquad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}} \tag{F.25}$$

gelten und somit

$$\mathbb{R} \ni \left\langle \Psi \mid \hat{A}\,\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,. \tag{F.26}$$

Aus (F.26) folgt umgekehrt (F.25) und daraus gemäß a)

$$\left\langle \Psi_1 \mid \hat{A}\,\Psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}\,\Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in D_{\hat{A}}\,,$$

d.h., entsprechend Definition 8.3.1, die Hermitezität von $\hat{A}$.

Zu Aufgabe E58a): Die Isometrie von $\hat{A}$ folgt gemäß

$$\begin{aligned} \left\| \hat{A}\,\Psi \right\|^2 & \underset{\text{Def.}}{=} \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle\, \Phi_{\nu+1} \right\|^2 \\ & \underset{\text{Folg. 8.1.15}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle \right|^2 \\ & \underset{\text{Folg. 8.1.15}}{=} \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\nu \right\|^2 \\ & \underset{\text{Folg. 8.1.15}}{=} \|\Psi\|^2 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$

Gemäß Folgerung 8.3.12 gilt damit $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{1}$.

Zu Aufgabe E58b): Der inverse Operator ist offensichtlich durch

$$\begin{aligned} D_{\hat{A}^{-1}} & \overset{\text{def}}{=} \left\{ \hat{A}\,\Phi : \; \Phi \in D_{\hat{A}} \right\} \\ & = L(\{\Phi_\nu : \; \nu > 1\}) \end{aligned}$$

und

$$\hat{A}^{-1}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_{\nu+1} \mid \Psi \rangle \, \Phi_\nu \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}^{-1}}$$

gegeben. Die Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1}\hat{A}\,\Psi &= \Psi \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,, \\ \hat{A}\,\hat{A}^{-1}\Psi &= \Psi \quad \forall\, \Psi \in R_{\hat{A}} \end{aligned}$$

sind nach Folgerung 8.1.15 offensichtlich.

Zu Aufgabe E58c): Aus

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_1 \mid \hat{A}\,\Psi_2 \right\rangle &\underset{\text{Folg. 8.1.15}}{=} \left\langle \Psi_1 \,\middle|\, \hat{A} \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi_2 \rangle \, \Phi_\nu \right\rangle \\ &\underset{\text{Def. } \hat{A}}{=} \left\langle \Psi_1 \,\middle|\, \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi_2 \rangle \, \Phi_{\nu+1} \right\rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_\nu \mid \Psi_2 \rangle \, \langle \Psi_1 \mid \Phi_{\nu+1} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_{\nu+1} \mid \Psi_1 \rangle \, \Phi_\nu \,\middle|\, \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

folgt[12]

$$\hat{A}^\dagger\,\Psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \Phi_{\nu+1} \mid \Psi \rangle \, \Phi_\nu \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}^\dagger} = \mathcal{H} \neq D_{\hat{A}^{-1}}$$

und damit die Behauptung.

Zu Aufgabe E59a): Für beliebig oft differenzierbares $\Psi \neq 0$, das außerhalb eines abgeschlossenen Teilintervalls von $(0, L)$ verschwindet, gilt mit $\Psi_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}\,\Psi(\lambda\,x)$ für $\lambda \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\Psi_\lambda\|^2 &= \lambda \int_0^L |\Psi(\lambda\,x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L |\Psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \|\Psi\|^2 \end{aligned}$$

[12] Insbesondere gilt also $\hat{A}\hat{A}^\dagger\,\Phi_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu = 1\,, \\ \Phi_\nu & \text{sonst}\,. \end{cases}$

und

$$\left\langle \Psi_\lambda \mid \hat{H}\,\Psi_\lambda \right\rangle \;=\; -\frac{\hbar^2\,\lambda}{2\,m}\int_0^L \Big(\Psi(\lambda\,x)\Big)^* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \Psi(\lambda\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\hbar^2\,\lambda^3}{2\,m}\int_0^L \Big(\Psi(\lambda\,x)\Big)^* \Psi''(\lambda\,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\hbar^2\,\lambda^2}{2\,m}\underbrace{\int_0^L \Big(\Psi(x)\Big)^* \Psi''(x)\,\mathrm{d}x}_{\neq 0}\,.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left\langle \Psi_\lambda \mid \hat{H}\,\Psi_\lambda \right\rangle \to \infty$$

für $\Psi \in D_{\hat{H}}$ und somit wegen $\|\Psi_\lambda\| = \|\Psi\|$ die Unbeschränktheit von $\hat{H}$. Mit Lemma 8.3.4 folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E59b): Aus

$$\int_0^L \Big(\Psi(x)\Big)^* \Psi''(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\Big(\Psi(x)\Big)^* \Psi'(x)\Big|_{x=0}^{x=L}}_{\underset{\text{Period}}{=}\,0} - \int_0^L \Big(\Psi'(x)\Big)^* \Psi'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{-\Big(\Psi'(x)\Big)^* \Psi(x)\Big|_{x=0}^{x=L}}_{\underset{\text{Period}}{=}\,0} + \int_0^L \Big(\Psi''(x)\Big)^* \Psi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\,\Psi \in C^\infty_{\text{per}}\left([0,L]\right)$$

folgt, daß der durch

$$D_{\hat{H}_{\text{per}}} \overset{\text{def}}{=} C^\infty_{\text{per}}\left([0,L]\right)$$

und

$$\left(\hat{H}_{\text{per}}\,\Psi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Psi''(x) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{H}_{\text{per}}}$$

gegebene Operator $\hat{H}_{\text{per}}$ HERMITEsch ist. Daß dies die einzige HERMITEsche Fortsetzung von $\hat{H}$ auf $C^\infty_{\text{per}}\left([0,L]\right)$ ist, ist offensichtlich, da $D_{\hat{H}}$ in $L^2\left([0,L]\right)$ dicht liegt, wie man leicht sieht.

Zu Aufgabe E59c): Analog zu b) folgt, daß durch

$$D_{\hat{H}_{\text{ref}}} \overset{\text{def}}{=} C^\infty_{\text{ref}}\left([0,L]\right)$$

und

$$\left(\hat{H}_{\text{per}}\,\Psi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Psi''(x) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{H}_{\text{ref}}}$$

die eindeutige HERMITEsche Fortsetzung von $\hat{H}$ auf $C^\infty_{\text{ref}}([0,L])$ gegeben ist.

Zu Aufgabe E59d): Die Funktionen

$$e_\mu(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\mu\varphi} \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}\,, \quad \mu \in \mathbb{Z}\,,$$

(siehe 8.1.1) bilden gemäß Theorie der FOURIER-Reihen ein ONS von $C(S^1)$, dessen lineare Hülle in $C(S^1)$ dicht liegt. Dementsprechend bilden die

$$e^{(L)}_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{2\pi i\,\mu\,\frac{x}{L}}\,, \quad \mu \in \mathbb{Z}\,,$$

ein ONS von $C^\infty_{\text{per}}([0,L])$, das in $C^\infty_{\text{per}}([0,L])$ und damit auch in $L^2([0,L])$ dicht liegt. Gemäß Lemma 8.1.8 ist also $\left\{e^{(L)}_\mu : \mu \in \mathbb{Z}\right\}$ ein MONS von $L^2([0,L])$. Daß die $e^{(L)}_\mu(x)$ alle Eigenfunktionen von $\hat{H}_{\text{per}}$ sind, folgt gemäß

$$\begin{aligned}\left(\hat{H}_{\text{per}}\, e^{(L)}_\mu\right)(x) &\underset{\text{b)}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 e^{(L)}_\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\,m}\left(\frac{2\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 e^{(L)}_\mu(x)\,. \end{aligned} \tag{F.27}$$

Zu Aufgabe E59e): Offensichtlich bilden die

$$\check{e}^{(L)}_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2L}}\, e^{2\pi i\,\mu\,\frac{x}{2L}}\,, \quad \mu \in \mathbb{Z}\,,$$

ein ONS von $C^\infty_{\text{per}}([-L,L])$, das in $C^\infty_{\text{per}}([-L,L])$ dicht liegt. Dementsprechend bilden die

$$\begin{aligned} u^{(L)}_\mu(x) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\check{e}^{(L)}_\mu(x) - \check{e}^{(L)}_\mu(-x)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}}\,\sin\!\left(\mu\pi\,\frac{x}{L}\right) \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{N}$ ein ONS des Teilraumes aller ungeraden Funktionen von $C^\infty_{\text{per}}([-L,L])$, das in diesem Teilraum dicht liegt. Da sich jede Funktion aus $C^\infty_{\text{ref}}([0,L])$ eindeutig zu einer ungeraden Funktion aus $C^\infty_{\text{per}}([-L,L])$ fortsetzen läßt, folgt daraus, daß die

$$s^{(L)}_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\!\left(\mu\pi\,\frac{x}{L}\right) \quad \forall\, x \in [0,L]\,, \quad \mu \in \mathbb{N}\,,$$

ein ONS von $C^\infty_{\text{ref}}([0,L])$ bilden, daß in $C^\infty_{\text{ref}}([0,L])$ dicht liegt. Somit ist $\left\{s^{(L)}_\mu : \mu \in \mathbb{N}\right\}$ ein MONS von $L^2([0,L])$. Daß die $s^{(L)}_\mu(x)$ alle Eigenfunktionen von $\hat{H}_{\text{ref}}$ sind, folgt gemäß

$$\left(\hat{H}_{\mathrm{ref}}\, s_\mu^{(L)}\right)(x) \underset{\text{b)}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 s_\mu^{(L)}(x) = \frac{1}{2\,m}\left(\frac{\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 s_\mu^{(L)}(x)\,.$$

Zu Aufgabe E59f): Sei $\Psi_{\mathrm{per}}(x)$ eine Eigenfunktion von $\hat{H}_{\mathrm{per}}$ zum Eigenwert E. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \Phi \mid E\,\Psi_{\mathrm{per}}\rangle &= \left\langle \Phi \mid \hat{H}_{\mathrm{per}}\,\Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle \\
&= \left\langle \hat{H}_{\mathrm{per}}\,\Phi \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle \\
&= \left\langle \hat{H}_{\mathrm{per}}\,\Phi \,\middle|\, \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_\mu^{(L)}\right\rangle \\
&= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle \left\langle \hat{H}_{\mathrm{per}}\,\Phi \mid e_\mu^{(L)}\right\rangle \\
&= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle \left\langle \Phi \mid \hat{H}_{\mathrm{per}}\, e_\mu^{(L)}\right\rangle \\
&\underset{\text{(F.27)}}{=} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle \frac{1}{2\,m}\left(\frac{2\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 \left\langle \Phi \mid e_\mu^{(L)}\right\rangle \\
&\underset{\text{(F.27)}}{=} \left\langle \Phi \,\middle|\, \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\,m}\left(\frac{2\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_\mu^{(L)}\right\rangle \qquad \forall\,\Phi \in D_{\hat{H}_{\mathrm{per}}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} E\left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_\mu^{(L)} &= E\,\Psi_{\mathrm{per}} \\
&= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\,m}\left(\frac{2\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_\mu^{(L)}\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Entwicklungskoeffizienten muß deshalb entweder $\Psi_{\mathrm{per}} \propto e_0^{(L)}$ gelten oder ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\Psi_{\mathrm{per}} = \left\langle e_{\mu_0}^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_{\mu_0}^{(L)} + \left\langle e_{-\mu_0}^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_{-\mu_0}^{(L)}\,.$$

Entsprechend sieht man, daß für jede Eigenfunktionen Ψ_{ref} von $\hat{H}_{\mathrm{ref}}$ ein $\mu_0' \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\Psi_{\mathrm{ref}} = \left\langle s_{\mu_0'}^{(L)} \mid \Psi_{\mathrm{per}}\right\rangle e_{\mu_0'}^{(L)}\,.$$

Damit ist klar, daß $\hat{H}_{\mathrm{per}}$ und $\hat{H}_{\mathrm{ref}}$ keine gemeinsame Eigenfunktion haben können.

Anmerkung: Für (hinreichend gutartige) Lösungen $\Psi_t^{\text{per}}(\mathbf{x})$ von

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi_t(\mathbf{x}) = \left(\hat{H}_{\text{per}}\, \Psi_t\right)(\mathbf{x})$$

gilt gemäß d)

$$\Psi_t^{\text{per}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{i}{\hbar}\,\frac{1}{2\,m}\left(\frac{2\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 t} \left\langle e_\mu^{(L)} \mid \Psi_0^{\text{per}}\right\rangle e_\mu^{(L)}(\mathbf{x})\,. \tag{F.28}$$

Entsprechend gilt für (hinreichend gutartige) Lösungen $\Psi_t^{\text{ref}}(\mathbf{x})$ von

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi_t(\mathbf{x}) = \left(\hat{H}_{\text{ref}}\, \Psi_t\right)(\mathbf{x})$$

gilt gemäß e)

$$\Psi_t^{\text{ref}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}} e^{-\frac{i}{\hbar}\,\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\pi\mu\,\hbar}{L}\right)^2 t} \left\langle s_\mu^{(L)} \mid \Psi_0^{\text{per}}\right\rangle s_\mu^{(L)}(\mathbf{x})\,. \tag{F.29}$$

Zu Aufgabe E60: Gemäß Aufgabe E59b) ist $\hat{H}$ eine Einschränkung des HERMITEschen Operators $\hat{H}_{\text{per}}$ und damit natürlich selbst HERMITEsch.

Gemäß Aufgabe E59d) existiert ein MONS $\{\Phi_\nu^{\text{per}}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $L^2([0,L])$, das nur aus Eigenfunktionen von $\hat{H}_{\text{per}}$ besteht. Es existiert also eine Folge $\{E_\nu^{\text{per}}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von Energiewerten mit

$$\hat{H}_{\text{per}}\,\Phi_\nu^{\text{per}} = E_\nu^{\text{per}}\,\Phi_\nu^{\text{per}} \in D_{\hat{H}_{\text{per}}} \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{per}}\,\Psi &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left\langle \Phi_\nu \mid \hat{H}_{\text{per}}\,\Psi\right\rangle \Phi_\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left\langle \hat{H}_{\text{per}}\,\Phi_\nu \mid \Psi\right\rangle \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \langle E_\nu^{\text{per}}\,\Phi_\nu \mid \Psi\rangle \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu^{\text{per}}\,\langle \Phi_\nu^{\text{per}} \mid \Psi\rangle\,\Phi_\nu^{\text{per}} \quad \forall\,\Psi\in D_{\hat{H}_{\text{per}}}\,.
\end{aligned}$$

$\hat{H}_{\text{per}}$ ist also eine Einschränkung des durch

$$D_{\overline{\hat{H}_{\text{per}}}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi\in\mathcal{H} : \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left| E_\nu^{\text{per}}\,\langle \Phi_\nu^{\text{per}} \mid \Psi\rangle \right|^2 < \infty \right\}$$

und

$$\overline{\hat{H}_{\text{per}}}\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu^{\text{per}}\,\langle \Phi_\nu^{\text{per}} \mid \Psi\rangle\,\Phi_\nu^{\text{per}} \quad \forall\,\Psi\in D_{\overline{\hat{H}_{\text{per}}}}$$

gegebenen Operators $\overline{\hat{H}_{\rm per}}$, der gemäß Folgerung 8.3.25 selbstadjungiert ist. Analog zeigt man, daß $\hat{H}_{\rm ref}$ eine Einschränkung des — mit entsprechenden Bezeichnungen — durch

$$D_{\overline{\hat{H}_{\rm ref}}} \stackrel{\rm def}{=} \left\{ \Psi \in \mathcal{H} : \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left| E_\nu^{\rm ref} \left\langle \Phi_\nu^{\rm ref} \,\middle|\, \Psi \right\rangle \right|^2 < \infty \right\}$$

und

$$\overline{\hat{H}_{\rm ref}}\, \Psi \stackrel{\rm def}{=} \sum_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu^{\rm ref} \left\langle \Phi_\nu^{\rm ref} \,\middle|\, \Psi \right\rangle \Phi_\nu^{\rm ref} \quad \forall\, \Psi \in D_{\overline{\hat{H}_{\rm ref}}}$$

gegebenen selbstadjungierten Operators $\overline{\hat{H}_{\rm ref}}$ ist. Da $\hat{H}_{\rm per}$ und $\hat{H}_{\rm ref}$ also selbstadjungierte Erweiterungen von $\hat{H}$ sind, die gemäß Aufgabe E59d) nicht gleich sein können, ist $\hat{H}$ **nicht** im wesentlichen selbstadjungiert.

Remark: Man sieht aber leicht, daß $\hat{H}_{\rm per}$ ebenso wie $\hat{H}_{\rm ref}$ im wesentlichen selbstadjungiert ist.

Zu Aufgabe E61a): Die Behauptung folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
2\pi \left\langle f \,\middle|\, \hat{L}\, g \right\rangle &\underset{\rm Def.}{=} \int_0^{2\pi} f^*(\varphi)\, \frac{\hbar}{i}\, \frac{\rm d}{{\rm d}\varphi}\, g(\varphi)\, {\rm d}\varphi \\
&= \underbrace{f^*(\varphi)\, \frac{\hbar}{i}\, g(\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}}_{=0\,,\ \text{da } f,g \text{ periodisch}} - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\hbar}{i}\, \frac{\rm d}{{\rm d}\varphi}\, f^*(\varphi) \right) g(\varphi)\, {\rm d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\hbar}{i}\, \frac{\rm d}{{\rm d}\varphi}\, f(\varphi) \right)^* g(\varphi)\, {\rm d}\varphi \\
&\underset{\rm Def.}{=} 2\pi \left\langle \hat{L}\, f \,\middle|\, g \right\rangle \quad \forall\, f, g \in D_{\hat{L}}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E61b): Offensichtlich ist[13] $\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$ mit

$$\hat{L}\, e_m = \hbar\, m\, e_m \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}\,. \tag{$*_1$}$$

Zu Aufgabe E61c): Die Eigenwertgleichung $\hat{L}\, f = E\, f$ lautet explizit

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\rm d}{{\rm d}\varphi}\, f(\varphi) = E\, f(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$$

[13] Zur Erinnerung:

$$e_m(\varphi) \stackrel{\rm def}{=} e^{i\, m\, \varphi} \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

und hat die allgemeine Lösung

$$f(\varphi = \lambda\, e^{\frac{i}{\hbar}\, E\, \varphi}\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

die für $\lambda \neq 0$ nur im Falle $\frac{E}{\hbar} \in \mathbb{Z}$ die Periode 2π hat. Mit $(*_1)$ folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E61d): Offensichtlich bildet $\hat{L}$ die beschränkte Teilmenge $\{e_m : m \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathcal{H}$ auf die unbeschränkte Teilmenge $\{\hbar\, m\, e_m : m \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathcal{H}$ ab und ist damit ein unbeschränkter Operator.

Zu Aufgabe E61e): Offensichtlich liegt die lineare Hülle von $\{e_m : m \in \mathbb{Z}\}$ in $\mathcal{H}$ dicht und ist sowohl in $D_{\hat{L}}$ als auch in $D_{\hat{L}\hat{L}}$ enthalten. Also liegen auch $D_{\hat{L}}$ und $D_{\hat{L}\hat{L}}$ in $\mathcal{H}$ dicht.

Zu Aufgabe E61f): Defininitionsgemäß gilt $D_{\hat{L}\hat{L}} \subset D_{\hat{L}}$. Sei andererseits z.B. f eine Stammfunktion der durch

$$g_{\mathrm{S}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi & \text{für } \varphi \in [0, +\pi] \bmod 2\pi \\ \varphi + \frac{\pi}{2} i & \text{für } \varphi \in [-\pi, 0] \bmod 2\pi \end{cases}$$

gegebenen Sägezahnfunktion g_{S}. Dann folgt dafür dank $\int_{-\pi}^{+\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$ zwar $f \in D_{\hat{L}}$, aber f ist offensichtlich nur 1-mal stetig differenzierbar, also $f \notin D_{\hat{L}\hat{L}}$. Daraus folgt $D_{\hat{L}\hat{L}} \not\subset D_{\hat{L}}$.

Zu Aufgabe E61g): Sei $g \in D_{\hat{L}^\dagger}$. Dann existiert definitionsgemäß ein $g^\dagger \in \mathcal{H}$ mit

$$\left\langle g \,\middle|\, \hat{L}\, f \right\rangle = \langle g\dagger \mid f\rangle \quad \forall\, f \in D_{\hat{L}}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|\breve{g}\|^2 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle e_m \mid g^\dagger\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle g \,\middle|\, \hat{L}\, e_m \right\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\hbar m\, \langle e_m \mid g\rangle\right|^2 . \end{aligned}$$

Mit

$$g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle e_m \mid g\rangle\, e_m$$

folgt daraus

$$g \in \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m : \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hbar m\, \lambda^m|^2 < \infty \right\} .$$

Da letzteres für alle $g \in D_{\hat{L}^\dagger}$ gilt, haben wir also

$$D_{\hat{L}^\dagger} \subset \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \, e_m : \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hbar m \, \lambda^m|^2 < \infty \right\} . \tag{$*_2$}$$

Unter der Voraussetzung

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hbar m \, \lambda^m|^2 < \infty$$

gilt für das Element

$$g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \, e_m$$

von $\mathcal{H}$ andererseits

$$\begin{aligned}
\left\langle g \,\middle|\, \hat{L} \, f \right\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \left\langle e_m \,\middle|\, \hat{L} \, f \right\rangle \\
&\underset{\text{a)}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \Big\langle \underbrace{\hat{L} \, e_m}_{=\hbar m \, e_m} \,\Big|\, f \Big\rangle \\
&= \Big\langle \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m \, (\lambda^m)^* \, e_m}_{\in\mathcal{H}} \,\Big|\, f \Big\rangle \quad \forall \, f \in D_{\hat{L}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \, e_m \in D_{\hat{L}^\dagger}$$

sowie

$$\hat{L}^\dagger \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \, e_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hbar m \, \lambda^m \, e_m \, .$$

Daraus folgt zusätzlich zu ($*_2$)

$$\left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m \, e_m : \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hbar m \, \lambda^m|^2 < \infty \right\} \subset D_{\hat{L}^\dagger}$$

sowie die Behauptung von h).

Zu Aufgabe E61i): Wir betrachten ein $g \in C(S^1)$, für das folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. g ist über dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ mit Ausnahme nur endlich vieler Stellen differenzierbar.

2. Es existiert eine stückweise stetige (beschränkte) Funktion $\breve{g}$ über $\mathbb{R}$, die überall dort mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \, g(\varphi)$ übereinstimmt, wo diese Ableitung existiert.

Dafür sieht man analog a), daß

$$\left\langle g \,\middle|\, \hat{L}\, f \right\rangle = \langle \breve{g} \mid f \rangle \quad \forall\, f \in D_{\hat{L}}$$

und somit

$$g \in D_{\hat{L}^\dagger}$$

gilt. Da o.a. Bedingungen für alle $g \in D_{\hat{L}}$ mit $\breve{g} = g'$ trivial erfüllt sind, folgt daraus

$$D_{\hat{L}} \subset D_{\hat{L}^\dagger}\,.$$

Die Bedingungen sind aber auch für[14] $g = g_{\mathrm{S}}$ mit entsprechendem (stückweise konstantem) $\breve{g}$ erfüllt. Also gilt

$$D_{\hat{L}^\dagger} \supset g_{\mathrm{S}} \notin D_{\hat{L}}$$

und somit

$$D_{\hat{L}^\dagger} \not\subset D_{\hat{L}}\,.$$

Zu Aufgabe E61j): Sei $g \in D_{(\hat{L}^\dagger)^\dagger}$. Dann existiert gemäß g) ein $\breve{g} \in \mathcal{H}$ mit

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hbar m\, \lambda^m|^2 < \infty \implies \left\langle g \,\middle|\, \hat{L}^\dagger \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m \right\rangle = \left\langle \breve{g} \,\middle|\, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda^m\, e_m \right\rangle$$

und daraus folgt analog g):

$$D_{(\hat{L}^\dagger)^\dagger} = D_{\hat{L}^\dagger}\,.$$

Mit

$$\begin{aligned} \left\langle e_m \,\middle|\, (\hat{L}^\dagger)^\dagger\, f \right\rangle &= \left\langle \hat{L}^\dagger e_m \,\middle|\, f \right\rangle \\ &\underset{\text{h)}}{=} \hbar m \,\langle e_m \mid f \rangle \quad \forall\, f \in D_{(\hat{L}^\dagger)^\dagger} \end{aligned}$$

und h) folgt daraus

$$(\hat{L}^\dagger)^\dagger = \hat{L}^\dagger\,.$$

Zu Aufgabe E61k): Aus h) folgt direkt die Behauptung

$$\hat{L}^\dagger\, f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hbar m\, \underbrace{|e_m\rangle\langle e_m|\, f}_{=\langle e_m|f\rangle e_m} \quad \forall\, f \in D_{\hat{L}^\dagger}\,.$$

Zu Aufgabe E61l): Die Behauptung folgt direkt aus k).

Version vom 26. März 2009

[14] Die Sägezahnfunktion g_{S} wurde unter f) definiert.

Zu Aufgabe E62a): Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned}2\,m\,\hbar\,\omega\,\hat{A}^\dagger\,\hat{A} &= \left(\frac{\hbar}{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+i\,m\,\omega\,x\right)\left(\frac{\hbar}{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-i\,m\,\omega\,x\right)\\ &= -\hbar^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2+m^2\,\omega^2\,x^2-\hbar\,\omega\,m\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,,\,x\right]_-}_{=1}\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E62b): Die Behauptung folgt aus a) mit

$$\left(\hat{A}\,\Omega\right)(x)=0\,.$$

Zu Aufgabe E62c): Die Behauptung ist für $n=0$ trivial und folgt für $n=1$ aus a) mit[15]

$$[\hat{A}^\dagger\,\hat{A}\,,\,\hat{A}^\dagger]_-=\hat{A}^\dagger\,\underbrace{[\hat{A}\,,\,\hat{A}^\dagger]_-}_{=1}+\underbrace{[\hat{A}^\dagger\,,\,\hat{A}^\dagger]_-}_{=0}\,\hat{A}\,.$$

Für $n>1$ folgt die Behauptung daraus durch vollständige Induktion:

$$\left[\hat{H}_{\text{osc}}\,,\left(\hat{A}^\dagger\right)^n\right]_-=\left(\hat{A}^\dagger\right)^{n-1}\underbrace{\left[\hat{H}_{\text{osc}}\,,\hat{A}^\dagger\right]_-}_{\underset{\text{Ind.-Vor.}}{=}\hbar\omega\,\hat{A}^\dagger}+\underbrace{\left[\hat{H}_{\text{osc}}\,,\left(\hat{A}^\dagger\right)^{n-1}\right]_-}_{\underset{\text{Ind.-Vor.}}{=}(n-1)\,\hbar\omega\,\left(\hat{A}^\dagger\right)^{n-1}}\hat{A}^\dagger\,.$$

Zu Aufgabe E62d): Durch vollständige Induktion zeigt man leicht

$$\begin{aligned}\Omega(x)\,e^{+\frac{m\,\omega}{\hbar}\,x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\,e^{-\frac{m\,\omega}{\hbar}\,x^2} &\propto \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{m\,\omega}{\hbar}\,x\right)^n\,\Omega(x)\\ &\propto \left(\left(\hat{A}^\dagger\right)^n\,\Omega\right)(x)\quad\forall\,n\in\mathbb{Z}_+\,.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}H_n\!\left(x\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\right)\Omega(x) &\propto e^{+\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\,x^2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\,e^{-z^2}\right)\Big|_{z=x\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}}\\ &\propto e^{+\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\,x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\,e^{-\frac{m\,\omega}{\hbar}\,x^2}\quad\forall\,n\in\mathbb{Z}_+\end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung.

[15] Allgemein gilt

$$\begin{aligned}[\hat{A}\hat{B}\,,\,\hat{C}]_- &= \hat{A}\,[\hat{B}\,,\,\hat{C}]_-+[\hat{A}\,,\,\hat{C}]_-\,\hat{B}\,,\\ [\hat{A}\,,\hat{B}\hat{C}]_- &= \hat{B}\,[\hat{A}\,,\,\hat{C}]_-+[\hat{A}\,,\,\hat{B}]_-\,\hat{C}\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E62e): Aus b)–d) folgt

$$\hat{H}_{\mathrm{osc}}\, H_n\left(x\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\right)\Omega(x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega\, H_n\left(x\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\right)\Omega(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$$

und daraus mit Folgerung 8.2.3 die Behauptung.

Zu Aufgabe E63: Offensichtlich ist[16]

$$\hat{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

und somit gemäß Folgerung 8.3.11 $\hat{A}^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eindeutig durch

$$\left\langle \Psi_1' \,\middle|\, \hat{A}\,\Psi_2' \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger\,\Psi_1' \,\middle|\, \Psi_2' \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1', \Psi_2' \in \mathcal{H}$$

charakterisiert. Mit

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_1' \middle|\, |\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| \,\middle| \Psi_2' \right\rangle &= \langle \Psi_2 \mid \Psi_2'\rangle\langle\Psi_1' \mid \Psi_1\rangle \\ &= \left\langle \langle\Psi_1 \mid \Psi_1'\rangle\, \Psi_2 \,\middle|\, \Psi_2' \right\rangle \\ &= \left\langle |\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|\,\Psi_1' \,\middle|\, \Psi_2' \right\rangle \end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E64: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \hat{B}\,\Psi &= \sum_{\nu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \Phi_\nu + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \Phi_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B} \sum_{\mu=1}^{N} \langle \Phi_\mu \mid \Psi\rangle\, \Phi_\mu \right\rangle \Phi_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi\rangle\, \Phi_\mu \right\rangle \Phi_\nu \\ &\qquad + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \Phi_\nu \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \hat{B}\,\Psi &= \left(\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Phi_\mu \right\rangle |\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\mu| \right) \Psi + \sum_{\nu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi\rangle\, \Phi_\mu \right\rangle \Phi_\nu \\ &\qquad + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \Phi_\nu \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$

[16]Denn:

$$\left\|\hat{A}\,\Phi\right\| = \|\langle\Psi_2 \mid \Phi\rangle\,\Psi_1\| \leq |\langle\Psi_2 \mid \Phi\rangle|\,\|\Psi_1\| \underset{\text{Schwarz}}{\leq} (\|\Psi_1\|\,\|\Psi_2\|)\,\|\Phi\|\;.$$

Mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B}\,\Psi \right\rangle \Phi_\nu \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\nu=1}^{N} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\mu \right\rangle \Phi_\nu \right\|^2 &\leq \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\langle \Phi_\nu \,\middle|\, \hat{B} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\mu \right\rangle \Phi_\nu \right\|^2 \\
&= \left\| \hat{B} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\mu \right\|^2 \\
&\leq \left\| \hat{B} \right\| \left\| \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \langle \Phi_\mu \mid \Psi \rangle\, \Phi_\mu \right\|^2 \\
&\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}
\end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E65a): Sei $\hat{P}_1\hat{P}_2$ ein Projektionsoperator. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1\hat{P}_2 &\underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \left(\hat{P}_1\hat{P}_2\right)^\dagger \\
&\underset{(8.25)}{=} \hat{P}_2^\dagger \hat{P}_1^\dagger \\
&\underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \hat{P}_2\hat{P}_1\,.
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1$ vorausgesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\hat{P}_1\hat{P}_2\right)^2 &= \hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2 \\
&= \hat{P}_1\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_2 \\
&\underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \hat{P}_1\hat{P}_2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\hat{P}_1\hat{P}_2\right)^\dagger &\underset{(8.25)}{=} \hat{P}_2^\dagger \hat{P}_1^\dagger \\
&\underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \hat{P}_2\hat{P}_1 \\
&= \hat{P}_1\hat{P}_2\,.
\end{aligned}$$

Gemäß Definition 8.3.13 ist dann also $\hat{P}_1\hat{P}_2$ ein Projektor.

Anmerkung: Es ist klar, daß

$$\left(\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\mathcal{H} = \left(\hat{P}_1\mathcal{H}\right) \cap \left(\hat{P}_2\mathcal{H}\right)$$

gilt, wenn $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ und $\hat{P}_1\hat{P}_2$ Projektoren sind.

Zu Aufgabe E65b): Sei $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ ein Projektionsoperator. Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 + \hat{P}_2 \quad & \underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \quad \left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)^2 \\ & = \quad \hat{P}_1\hat{P}_1 + \hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1 + \hat{P}_2\hat{P}_2 \\ & \underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \quad \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1\end{aligned}$$

und somit

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 = -\hat{P}_2\hat{P}_1\,. \tag{F.30}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\hat{P}_1\hat{P}_2 \quad & = \quad \hat{P}_1 \quad \underbrace{\hat{P}_1\hat{P}_2}_{\underset{(F.30)}{=} -\hat{P}_2\hat{P}_1} \\ & = \quad - \quad \underbrace{\hat{P}_1\hat{P}_2}_{\underset{(F.30)}{=} -\hat{P}_2\hat{P}_1} \quad \hat{P}_1 \\ & = \quad +\hat{P}_2\hat{P}_1 \\ & \underset{(F.30)}{=} \quad -\hat{P}_1\hat{P}_2\end{aligned}$$

und folglich $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0\,.$

Sei umgekehrt $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0$ vorausgesetzt. Dann gilt auch

$$\begin{aligned}\hat{P}_2\hat{P}_1 \quad & \underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \quad \hat{P}_2^\dagger\hat{P}_1^\dagger \\ & \underset{(8.25)}{=} \quad \left(\hat{P}_1\hat{P}_2\right)^\dagger \\ & \underset{(8.21)}{=} \quad 0\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)^2 \quad & = \quad \hat{P}_1\hat{P}_1 + \hat{P}_2\hat{P}_2 \\ & \underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \quad \hat{P}_1 + \hat{P}_2\,.\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)^\dagger \quad & \underset{(8.24)}{=} \quad \hat{P}_1^\dagger + \hat{P}_2^\dagger \\ & \underset{\text{Def. 8.3.13}}{=} \quad \hat{P}_1 + \hat{P}_2\end{aligned}$$

folgt daraus gemäß Definition 8.3.13, daß $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ ein Projektionsoperator ist.

Anmerkung: Es ist klar, daß

$$\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)\mathcal{H} = \overline{L\left(\left(\hat{P}_1\mathcal{H}\right) \cup \left(\hat{P}_2\mathcal{H}\right)\right)}$$

im Sinne[17] von Folgerung 8.1.18 gilt, wenn $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ und $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ Projektoren sind.

Zu Aufgabe E66: Seien $\Phi, \Phi' \in \mathcal{H}$. O.B.d.A. können wir

$$\|\Phi\| = \|\Phi'\| = 1$$

annehmen. Dann ist

$$\left\{\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi\,,\ \Phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi' - \langle \Phi_1 \mid \Phi' \rangle\, \Phi_1\right\}$$

eine ONB von $L\Big(\{\Phi, \Phi'\}\Big)$ und läßt sich gemäß Lemma 8.1.4 zu einem MONS $\{\Phi_\iota\}_{\iota\in I}$ von $\mathcal{H}$ erweitern $(1, 2 \in I)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(2\hat{P}_\Phi - \hat{1}\right)\Psi &\underset{(8.1)}{=} 2\,\langle \Phi_1 \mid \Psi \rangle\, \Phi_1 - \sum_{\iota\in I} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle\, \Phi_\iota \\ &= \langle \Phi_1 \mid \Psi \rangle\, \Phi_1 - \sum_{\substack{\iota\in I \\ \iota\neq 1}} \langle \Phi_\iota \mid \Psi \rangle\, \Phi_\iota\,. \end{aligned}$$

Die Wirkung von $\left(2\hat{P}_\Phi - \hat{1}\right)$ auf einen beliebigen Vektor $\Psi \in \mathcal{H}$ ist also folgende:

- Die Komponente von Ψ ‘ längs’ Φ bleibt unverändert.
- Die zu Φ senkrechte Komponente von Ψ wird mit -1 multipliziert.

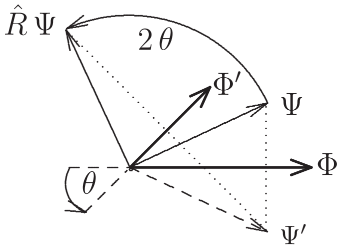
Entsprechendes gilt natürlich für Φ' anstelle von Φ. Daraus folgt:

> $\left(2\hat{P}_{\Phi'} - \hat{1}\right)\left(2\hat{P}_\Phi - \hat{1}\right)$ wirkt nur auf dem Teilraum $L\Big(\{\Phi, \Phi'\}\Big)$ nichttrivial und wirkt darauf wie
>
> 1. eine Spiegelung in zu Φ senkrechte Richtung (mit 0 als Fixpunkt) und
> 2. eine anschließende Spiegelung in zu Φ' senkrechte Richtung (mit 0 als Fixpunkt).

Anhand der folgenden Skizze erkennt man daraus, daß die resultierende Wirkung in $L\Big(\{\Phi, \Phi'\}\Big)$ eine Drehung um den Winkel $|\arccos \langle \Phi \mid \Phi' \rangle|$ (mit 0 als Fixpunkt) von

[17] Wir bezeichnen also mit $L\left(\overline{\left(\hat{P}_1\mathcal{H}\right) \cup \left(\hat{P}_2\mathcal{H}\right)}\right)$ den kleinsten HILBERTschen Teilraum von $\mathcal{H}$, der sowohl $\hat{P}_1\mathcal{H}$ als auch $\hat{P}_2\mathcal{H}$ enthält.

Φ in 'Richtung' nach Φ' ist:[18]



$$\angle\left(\Psi, \hat{R}\,\Psi\right) = 2\underbrace{\angle(\Psi', \Phi')}_{=\theta+\angle(\Psi',\Phi)} - 2\underbrace{\angle(\Phi, \Psi)}_{=\angle(\Psi',\Phi)} = 2\,\theta\,.$$

Anmerkung: Auf diesem Ergebnis basiert auch der sog. GROVERsche Datenbank-Suchalgorithmus für Quantencomputer; siehe Abschnitt 2.1.1 von (Lücke, qip).

Zu Aufgabe E67a): Mit Definition 8.3.3 folgt die Produkt-Ungleichung gemäß

$$\begin{aligned}\left\|\hat{A}\hat{B}\,\Psi\right\| &\underset{\text{Def. } 8.3.3}{\leq} \left\|\hat{A}\right\|\,\left\|\hat{B}\,\Psi\right\| \\ &\underset{\text{Def. } 8.3.3}{\leq} \left\|\hat{A}\right\|\,\left\|\hat{B}\right\|\,\|\Psi\| \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E67b): Aus

$$\sup_{\substack{\Phi\in\mathcal{H}\\ \|\Phi\|=1}} |\langle\Phi \mid \chi\rangle| \underset{\text{SCHWARZ}}{\leq} \|\chi\| \quad \forall\,\chi \in \mathcal{H}$$

und

$$\|\chi\| = \left\langle \frac{\chi}{\|\chi\|} \,\middle|\, \chi \right\rangle \quad \forall\,\chi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$$

folgt

$$\|\chi\| = \sup_{\substack{\Phi\in\mathcal{H}\\ \|\Phi\|=1}} |\langle\Phi \mid \chi\rangle| \quad \forall\,\chi \in \mathcal{H}$$

und somit

$$D_{\hat{C}} = \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H}\\ \|\Psi\|=1}} \left\|\hat{C}\,\Psi\right\| = \sup_{\substack{\Phi,\Psi\in\mathcal{H}\\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left|\left\langle \Phi \mid \hat{C}\,\Psi\right\rangle\right| \tag{F.31}$$

für alle linearen Operatoren $\hat{C}$ in $\mathcal{H}$. Die Behauptungen folgen damit aus Folgerung

Version vom 26. März 2009

[18] Es genügt, die Wirkung auf zwei unabhängige Vektoren Ψ im Teilraum aller **reellen** Linearkombinationen von Φ und Φ' zu betrachten.

8.3.11 und

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\left\| \hat{A} \right\|}} \quad &\underset{\text{Def. 8.3.3}}{=} 0 \quad \sup_{\substack{\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Psi\|=1}} \left\| \hat{A}\,\Psi \right\| \\
&\underset{(\text{F.31})}{=} \quad \underline{\underline{\sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left| \left\langle \Phi \mid \hat{A}\,\Psi \right\rangle \right|}} \\
&= \quad \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left| \left\langle \Psi \mid \hat{A}^\dagger\,\Phi \right\rangle \right| \\
&\underset{(\text{F.31})}{=} \quad \sup_{\substack{\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=1}} \left\| \hat{A}^\dagger\,\Phi \right\| \\
&\underset{\text{Def. 8.3.3}}{=} \quad \underline{\underline{\left\| \hat{A}^\dagger \right\|}}\,.
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe E67c): Da sich jede komplexe Zahl durch Multiplikation mit einem geeigneten Phasenfaktor in eine reelle Zahl überführen läßt, gilt

$$
\sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left| \left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle \right| = \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left| \Re \left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle \right|
$$

und damit für **selbstadjungierte** $\hat{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$
\begin{aligned}
\left\| \hat{C} \right\| \quad &\underset{\text{b)}}{=} \quad \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \left| \Re \left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle \right| \\
&= \quad \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \frac{1}{2} \left| \left\langle \Phi \,\middle|\, \hat{C}\,\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{C}\,\Phi \right\rangle \right| \\
&= \quad \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \frac{1}{4} \left| \left\langle (\Phi+\Psi) \,\middle|\, \hat{C}\,(\Phi+\Psi) \right\rangle - \left\langle (\Phi-\Psi) \,\middle|\, \hat{C}\,(\Phi-\Psi) \right\rangle \right| \\
&= \quad \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \frac{1}{4} \Bigg| \|\Phi+\Psi\|^2 \left\langle \frac{\Phi+\Psi}{\|\Phi+\Psi\|} \,\middle|\, \hat{C}\,\frac{\Phi+\Psi}{\|\Phi+\Psi\|} \right\rangle \\
&\qquad\qquad - \|\Phi-\Psi\|^2 \left\langle \frac{\Phi-\Psi}{\|\Phi-\Psi\|} \,\middle|\, \hat{C}\,\frac{\Phi-\Psi}{\|\Phi-\Psi\|} \right\rangle \Bigg| \\
&\leq \quad \sup_{\substack{\chi \in \mathcal{H} \\ \|\chi\|=1}} \left| \left\langle \chi \,\middle|\, \hat{C}\,\chi \right\rangle \right| \sup_{\substack{\Phi,\Psi \in \mathcal{H} \\ \|\Phi\|=\|\Psi\|=1}} \frac{1}{4} \Big(\underbrace{\|\Phi+\Psi\|^2 + \|\Phi-\Psi\|^2}_{=2\left(\|\Phi\|^2+\|\Psi\|^2\right)} \Big) \\
&= \quad \sup_{\substack{\chi \in \mathcal{H} \\ \|\chi\|=1}} \left| \left\langle \chi \,\middle|\, \hat{C}\,\chi \right\rangle \right|\,.
\end{aligned}
$$

und somit

$$\left\|\hat{C}\right\| = \sup_{\substack{\chi\in\mathcal{H}\\ \|\chi\|=1}} \left|\left\langle \chi \,\middle|\, \hat{C}\,\chi \right\rangle\right| \,.$$

Anwendung auf $\hat{C} = \hat{A}^\dagger \hat{A}$ liefert

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}^\dagger \hat{A}\right\| &= \sup_{\substack{\chi\in\mathcal{H}\\ \|\chi\|=1}} \left|\left\langle \chi \,\middle|\, \hat{A}^\dagger \hat{A}\,\chi \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\substack{\chi\in\mathcal{H}\\ \|\chi\|=1}} \left\|\hat{A}\,\chi\right\|^2 \\
&= \left(\sup_{\substack{\chi\in\mathcal{H}\\ \|\chi\|=1}} \left\|\hat{A}\,\chi\right\|\right)^2 \\
&= \left\|\hat{A}\right\|^2 \,.
\end{aligned}$$

Setzt man hier $\hat{A}^\dagger$ anstelle von $\hat{A}$ ein, so ergibt sich

$$\left\|(\hat{A}^\dagger)^\dagger \hat{A}^\dagger\right\| = \left\|\hat{A}^\dagger\right\|^2$$

und daraus mit $(\hat{A}^\dagger)^\dagger \underset{(8.22)}{=} \hat{A}$ und $\left\|\hat{A}^\dagger\right\| \underset{b)}{=} \left\|\hat{A}\right\|$ auch

$$\left\|\hat{A}\hat{A}^\dagger\right\| = \left\|\hat{A}\right\|^2 \,.$$

Zu Aufgabe E68a): Sei $\left\{\hat{A}_\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine CAUCHY-Folge, also

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\nu,\mu\geq N} \left\|\hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu\right\| = 0 \,. \tag{F.32}$$

Dann ist $\left\{\hat{A}_\nu \Psi\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ wegen

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}_\nu \Psi - \hat{A}_\mu \Psi\right\| &= \left\|\left(\hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu\right)\Psi\right\| \\
&\underset{\text{Def. 8.3.3}}{\leq} \left\|\hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu\right\| \, \|\Psi\|
\end{aligned}$$

eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{H}$ und somit

$$\hat{A}\Psi \overset{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \hat{A}_\nu \Psi \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H} \tag{F.33}$$

erlaubte Definition eines linearen Operators $\hat{A}$ auf $\mathcal{H}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{\nu \geq N} \left\| \left(\hat{A} - \hat{A}_\nu \right) \Psi \right\| &= \sup_{\nu \geq N} \left(\lim_{\mu \to \infty} \left\| \left(\hat{A}_\mu - \hat{A}_\nu \right) \Psi \right\| \right) \\
&\leq \sup_{\nu, \mu \geq N} \left\| \left(\hat{A}_\mu - \hat{A}_\nu \right) \Psi \right\| \\
&\leq \|\Psi\| \sup_{\nu, \mu \geq N} \left\| \left(\hat{A}_\mu - \hat{A}_\nu \right) \right\| \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,,\ N \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Mit (F.32) folgt daraus

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\nu \geq N} \left\| \hat{A} - \hat{A}_\mu \right\| = 0\,,$$

also $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| \hat{A} - \hat{A}_\nu \right\| = 0\,.$$

Damit ist die Vollständigkeit von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bzgl. der Operatornorm bewiesen.

Zu Aufgabe E68b): Seien $\left\{ \hat{A}_\nu \right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge **kompakter** Operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\{\Psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{H}$. Gemäß a) und Definition 8.3.15 ist dann nur zu zeigen, daß eine Teilfolge $\{\Psi'_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von $\{\Psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ existiert, für die $\left\{ \hat{A}\, \Psi'_\nu \right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{H}$ ist, wenn man $\hat{A}$ gemäß (F.33) definiert. Eine solche Folge läßt sich folgendermaßen iterativ auswählen:

O.B.d.A. können wir

$$\|\Psi_\nu\| < \frac{1}{\sqrt{2}} > \left\| \hat{A}_\nu \right\| \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N} \tag{F.34}$$

voraussetzen. Dank der SCHWARZschen Ungleichung und gemäß Definition 8.3.3 gilt dann

$$\sup_{\nu, \mu, \alpha \in \mathbb{N}} \left\| \hat{A}_\alpha \Psi_\nu - \hat{A}_\alpha \Psi_\mu \right\| < 1\,. \tag{F.35}$$

Sei nun zu jedem $n' \in \{1, \dots, n\}$ bereits eine Teilfolge $\left\{ \Psi_\nu^{(n')} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von $\{\Psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ und ein $N_{n'} > n'$ so ausgewählt, daß die Bedingungen

$$\sup_{\nu, \mu, \alpha \geq N_{n'}} \left\| \hat{A}_\alpha \Psi_\nu^{(n')} - \hat{A}_\alpha \Psi_\mu^{(n')} \right\| < \frac{1}{n'} \quad \forall\, n' \in \{1, \dots, n\} \tag{F.36}$$

und

$$n_2 > n_1 \implies \left\{ \Psi_\nu^{(n_2)} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge von } \left\{ \Psi_\nu^{(n_1)} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}} \qquad \forall\, n_1, n_2 \in \{1, \dots, n\} \tag{F.37}$$

erfüllt sind.[19] Dann wählen wir ein $N'_{n+1} \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| \hat{A}_\alpha - \hat{A}_{N'_{n+1}} \right\| < \frac{1}{2\,(n+1)\,\sqrt{2}} \quad \forall\, \alpha > N'_{n+1}\,. \tag{F.38}$$

Dank der Kompaktheit von $\hat{A}_{N'_{n+1}}$ existieren dazu eine Teilfolge $\left\{\Psi_\nu^{(n+1)}\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\left\{\Psi_\nu^{(n)}\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ und ein $N_{n+1} > N'_{n+1}$ mit

$$\sup_{\nu,\mu\geq N_{n+1}} \left\| \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| < \frac{1}{2\,(n+1)}\,. \tag{F.39}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\left\| \hat{A}_\alpha \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_\alpha \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| \\
&\quad = \left\| \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\mu^{(n+1)} + \left(\hat{A}_\alpha - \hat{A}_{N'_{n+1}}\right)\left(\Psi_\nu^{(n+1)} - \Psi_\mu^{(n+1)}\right) \right\| \\
&\quad \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \left\| \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| + \left\| \left(\hat{A}_\alpha - \hat{A}_{N'_{n+1}}\right)\left(\Psi_\nu^{(n+1)} - \Psi_\mu^{(n+1)}\right) \right\| \\
&\quad \underset{\text{Def. 8.3.3}}{\leq} \left\| \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| + \left\| \hat{A}_\alpha - \hat{A}_{N'_{n+1}} \right\| \left\| \Psi_\nu^{(n+1)} - \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| \\
&\quad \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \left\| \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_{N'_{n+1}} \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| + \left\| \hat{A}_\alpha - \hat{A}_{N'_{n+1}} \right\| \left(\left\| \Psi_\nu^{(n+1)} \right\| + \left\| \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| \right)
\end{aligned}$$

folgt daraus mit (F.34), (F.38) und (F.39)

$$\sup_{\nu,\mu,\alpha\geq N_{n+1}} \left\| \hat{A}_\alpha \Psi_\nu^{(n+1)} - \hat{A}_\alpha \Psi_\mu^{(n+1)} \right\| < \frac{1}{n+1}$$

und damit (F.36)/(F.37) für $n+1$ anstelle von n. Wir können also zu jedem $n' \in \mathbb{N}$ ein $N_{n'} \in \mathbb{N}$ und eine Teilfolge $\left\{\Psi_\nu^{(n')}\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ so auswählen, daß (F.36)/(F.37) für $n = \infty$ gilt. Aus (F.37) folgt dann, daß zu jedem $n' \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\nu > n'$ ein $\nu_{n'} \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\Psi'_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_\nu^{(\nu)} = \Psi_{\nu_{n'}}^{(n')}\,, \quad \nu_{n'} > \nu.$$

Mit (F.36) folgt daraus

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\nu,\mu,\alpha\geq N} \left\| \hat{A}_\alpha \Psi'_\nu - \hat{A}_\alpha \Psi'_\mu \right\| = 0$$

[19] Gemäß (F.35) sind (F.36) und (F.37) für $n = 1$ mit $N_1 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ und $\Psi_\nu^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_\nu$ trivial erfüllt.

und daraus schließlich, wie gewünscht,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sup_{\nu,\mu\geq N}\left\|\hat{A}\Psi'_\nu-\hat{A}\Psi'_\mu\right\| &\underset{(F.33)}{=} \lim_{N\to\infty}\sup_{\nu,\mu\geq N}\left(\lim_{\alpha\to\infty}\left\|\hat{A}_\alpha\Psi'_\nu-\hat{A}_\alpha\Psi'_\mu\right\|\right)\\ &\leq \lim_{N\to\infty}\sup_{\nu,\mu,\alpha\geq N}\left\|\hat{A}_\alpha\Psi'_\nu-\hat{A}_\alpha\Psi'_\mu\right\|\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E68c): Sei $\Psi\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$. Mit

$$\hat{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}_\Psi\,,\quad \hat{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{1}-\hat{P}_\Psi$$

sind dann

$$\hat{P}_1+\hat{P}_2=\hat{1}$$

und auch

$$\hat{P}_1-\hat{P}_2=2\,\hat{P}_\Psi-\hat{1}$$

unitär. Es gilt also

$$\left\|\hat{P}_1+\hat{P}_2\right\|=\left\|\hat{P}_1-\hat{P}_2\right\|=\left\|\hat{P}_1\right\|=1\,.$$

Im Falle $\dim(\mathcal{H})>1$ gilt auch

$$\left\|\hat{P}_2\right\|=1$$

und somit

$$\left\|\hat{P}_1+\hat{P}_2\right\|^2+\left\|\hat{P}_1-\hat{P}_2\right\|^2\neq 2\left(\left\|\hat{P}_1\right\|^2+\left\|\hat{P}_2\right\|^2\right)\,.$$

Die Operatornorm genügt im Falle $\dim(\mathcal{H})>1$ also nicht der Parallelogrammgleichung und ist deshalb nicht EUKLIDisch.

Zu Aufgabe E69: Mit

$$\hat{E}^{\lambda_0\hat{1}}_\lambda\,\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases}0 & \text{für } \lambda<\lambda_0\\ \Psi & \text{für } \lambda\geq\lambda_0\end{cases}\quad\forall\,\Psi\in\mathcal{H}\,,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

sind die Bedingungen 1–4 des Spektralsatzes (Satz 8.3.24) offensichtlich erfüllt und gemäß Fußnote 35 von Kapitel 8 gilt

$$\int|\lambda|^2\,\mathrm{d}\left\langle\Psi\,\middle|\,\hat{E}^{\lambda_0\hat{1}}_\lambda\,\Psi\right\rangle=\|\lambda_0\,\Psi\|^2\quad\forall\,\Psi\in\mathcal{H}$$

sowie

$$\int\lambda\,\mathrm{d}\left\langle\Psi'\,\middle|\,\hat{E}^{\lambda_0\hat{1}}_\lambda\,\Psi\right\rangle=\left\langle\Psi'\,\middle|\,\lambda_0\,\Psi\right\rangle\quad\forall\,\Psi,\Psi'\in\mathcal{H}\,.$$

$\left\{\hat{E}^{\lambda_0\hat{1}}_\lambda\right\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist also die gemäß Spektralsatz eindeutige Spektralschar von $\lambda_0\,\hat{1}$.

Anmerkung: Die Behauptung folgt auch aus Folgerung 8.3.25 für den Spezialfall

$$a_\nu = 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Zu Aufgabe E70a): Da Projektionsoperatoren die Norm von Vektoren höchstens verkleinern können, gilt

$$\left\|\hat{P}_1 \hat{P}_2\, \Psi'\right\| \le \left\|\hat{P}_2\, \Psi'\right\| \le \|\Psi'\| \quad \forall\, \Psi' \in \mathcal{H}$$

und somit

$$\nu \ge \mu \implies \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi\right\| \le \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\mu \Psi\right\| \quad \forall\, \nu, \mu \in \mathbb{N}\,.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi\right\| = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi\right\|\,.$$

Zu Aufgabe E70b): Die Behauptung folgt mit $\hat{P}_1 \hat{P}_1 = \hat{P}_1$ gemäß

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi \mid \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{\mu+1} \Psi \right\rangle
&= \left\langle \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi \mid \hat{P}_1\, \hat{P}_2\, \hat{P}_1 \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\mu \Psi \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{P}_1\, \hat{P}_2\, \hat{P}_1 \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\nu \Psi \mid \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\mu \Psi \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{\nu+1} \Psi \mid \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^\mu \Psi \right\rangle \quad \forall\, \nu, \mu \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E70c): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi - \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\mu} \Psi\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi\right\|^2 - 2\,\Re\left\langle \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi \mid \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\mu} \Psi \right\rangle + \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\mu} \Psi\right\|^2 \\
&\underset{\text{b)}}{=} \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi\right\|^2 - 2\,\Re\left\langle \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{\nu+\mu} \Psi \mid \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{\nu+\mu} \Psi \right\rangle + \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\mu} \Psi\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi\right\|^2 - 2\left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{\nu+\mu} \Psi\right\|^2 + \left\|\left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\mu} \Psi\right\|^2 \\
&\underset{\nu,\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E70d): Gemäß c) existiert

$$\Psi_+ \stackrel{\text{def}}{=} \text{s-}\lim_{\nu\to\infty} \left(\hat{P}_1\, \hat{P}_2\right)^{2\nu} \Psi$$

und — weil Ψ beliebig ist — auch

$$\begin{aligned}
\Psi_- &\overset{\text{def}}{=} \text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{2\nu+1}\Psi \\
&= \text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{2\nu}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\Psi\right) \\
&= \hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\Psi_+\,.
\end{aligned}$$

Gemäß a) gilt dabei gilt offensichtlich

$$\|\Psi_+\| = \|\Psi_-\| = \left\|\hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\Psi_+\right\| \geq \left\|\hat{P}_2\,\Psi_+\right\| \geq \|\Psi_+\|\;,$$

also

$$\|\Psi_+\| = \left\|\hat{P}_2\,\Psi_+\right\| = \left\|\hat{P}_1\,\hat{P}_2\,\Psi_+\right\|\;.$$

Da für Projektoren $\hat{P}$ und Vektoren Ψ' in $\mathcal{H}$ grundsätzlich

$$\left\|\hat{P}\,\Psi'\right\| = \|\Psi'\| \implies \hat{P}\,\Psi' = \Psi'$$

gilt, folgt daraus

$$\Psi_+ = \Psi_-$$

und damit die Behauptung.

Zu Aufgabe E70e): Die Behauptung folgt mit

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi - \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\right\|^2 - 2\,\Re\left\langle\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \mid \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle\hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\mu}\Psi \mid \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\right\rangle \\
&= \left\|\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi\right\|^2 - 2\,\Re\left\langle\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu+1}\Psi\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu+1}\Psi\right\rangle
\end{aligned}$$

aus d).

Zu Aufgabe E70f): Aus e) folgt

$$\text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi \in \left(\hat{P}_1 \wedge \hat{P}_2\right)\mathcal{H}$$

und offensichtlich gilt

$$\Psi \in \left(\hat{P}_1 \wedge \hat{P}_2\right)\mathcal{H} \implies \text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi = \Psi\,.$$

Da Ψ beliebig ist, folgt daraus

$$\hat{P}\,\mathcal{H} = \left(\hat{P}_1 \wedge \hat{P}_2\right)\mathcal{H}$$

Für den durch

$$\hat{P}\,\Psi' \stackrel{\text{def}}{=} \text{s-}\lim_{\nu\to\infty}\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi' \quad \forall\,\Psi' \in \mathcal{H}$$

gegebenen Operator auf $\mathcal{H}$. Entsprechend der Anmerkung zu Folgerung 8.3.14 müssen wir also nur noch zeigen, daß $\hat{P}$ ein Projektor ist:

Die Selbstadjungiertheit von $\hat{P}$ folgt gemäß[20]

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}\,\Psi_2 \right\rangle &= \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \Psi_1 \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&\underset{\text{e)}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle \\
&\underset{\text{e)}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{P}\,\Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\,\Psi_1,\Psi_2 \in \mathcal{H}\,.
\end{aligned}$$

Die Idempotenz ($\hat{P}^2 = \hat{P}$) von $\hat{P}$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}\,\hat{P}\,\Psi_2 \right\rangle &= \left\langle \hat{P}\,\Psi_1 \mid \hat{P}\,\Psi_2 \right\rangle \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_1 \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&\underset{\text{e)}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_1 \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}_2\left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{2\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&\underset{\text{e)}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\left\langle \Psi_1 \mid \left(\hat{P}_1\,\hat{P}_2\right)^{2\nu}\Psi_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}\,\Psi_2 \right\rangle \quad \forall\,\Psi_1,\Psi_2 \in \mathcal{H}\,.
\end{aligned}$$

Entsprechend Definition 8.3.13 ist $\hat{P}$ also tatsächlich ein Projektor.

> **Anmerkung:** Das Ergebnis zeigt, daß sich im Prinzip mit Filtern für $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$ auch ein Filter für $\hat{P}_1 \wedge \hat{P}_2$ beliebig genau realisieren läßt.

[20] Man beachte immer wieder daß in den bisherigen Überlegungen Ψ beliebig war.

Zu Aufgabe E71: Die Behauptung folgt aus

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\hat{A}-a)\Psi\right\|^2 \left\|(\hat{B}-b)\Psi\right\|^2 \\
&\underset{\text{Schwarz}}{\geq} \quad \left|\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right|^2 \\
&= \quad \left(\Re\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right)^2 + \left(\Im\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right)^2
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
&\Re\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle + \left\langle(\hat{B}-b)\Psi \mid (\hat{A}-a)\Psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle\Psi \mid \left[\hat{A}-a,\hat{B}-b\right]_+ \Psi\right\rangle
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\Im\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\,i}\left(\left\langle(\hat{A}-a)\Psi \mid (\hat{B}-b)\Psi\right\rangle - \left\langle(\hat{B}-b)\Psi \mid (\hat{A}-a)\Psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2\,i}\langle\Psi \mid \underbrace{\left[\hat{A}-a,\hat{B}-b\right]_-}_{=\left[\hat{A},\hat{B}\right]_-} \Psi\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe E72: Aus Regel (F13) zur FOURIER-Transformation folgt

$$
\begin{aligned}
\left\|\hat{F}\Psi\right\|^2 &= \int \left|(\check{\hat{F}}\Psi)(\mathbf{x}')\right|^2 \, dV_{\mathbf{x}'} \\
&\underset{\text{(F13)}}{=} \int |\Psi(\mathbf{x})|^2 \, dV_{\mathbf{x}} \\
&= \|\Psi\|^2 \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{F}} \qquad \text{(F.40)}
\end{aligned}
$$

und damit die Beschränktheit von $\hat{F}$. Gemäß Folgerung 8.3.27 existiert also genau eine Erweiterung $\overline{\hat{F}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ von $\hat{F}$. Zu jedem $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ existiert eine Folge $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset D_{\hat{F}}$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Psi_\nu = \Psi$ und dafür gilt

$$
\begin{aligned}
\left\|\overline{\hat{F}}\Psi\right\| &= \lim_{\nu\to\infty} \left\|\overline{\hat{F}}\Psi_\nu\right\| \\
&\underset{\text{(F.40)}}{=} \|\Psi\|\,.
\end{aligned}
$$

$\overline{\hat{F}}$ ist also isometrisch. Aus

$$
\Psi(\mathbf{x}) \underset{\text{(F.2)}}{=} \Big(\hat{F}(\underbrace{\hat{F}\Psi}_{\in D_{\hat{F}}})\Big)(-\mathbf{x}) \quad \forall\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ \Psi \in D_{\hat{F}} \text{ dicht in } L^2(\mathbb{R}^3)
$$

folgt außerdem, daß der Wertebereich von $\overline{\hat{F}}$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ dicht liegt und somit aufgrund der Isometrie von $\overline{\hat{F}}$ mit ganz $L^2(\mathbb{R}^2)$ übereinstimmt.[21] $\overline{\hat{F}}$ ist also sogar unitär.

Zu Aufgabe E73: Sei $\Psi_\pm \in D_{\hat{p}_+^\dagger}$ und gelte $\hat{p}_+^\dagger \Psi_\pm = \pm i\, \Psi_\pm$. Dann gilt gemäß Definition 8.3.7

$$\langle \Psi_\pm \mid \hat{p}_+ \, \varphi \rangle = \mp i \, \langle \Psi_\pm \mid \varphi \rangle \ ,$$

d.h. es gilt

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Psi_\pm(x) = \mp i \, \Psi_\pm(x)$$

im distributionstheoretischen und somit nach Lemma 9.1.15 auch im gewöhnlichen Sinne. Die klassischen Lösungen sind

$$\Psi_\pm(x) \propto e^{\mp \frac{x}{\hbar}} \, .$$

Mit

$$e^{-\frac{x}{\hbar}} \in D_{\hat{p}_+} \ , \quad e^{+\frac{x}{\hbar}} \notin L^2\Big((0,\infty)\Big)$$

folgt daraus

$$n_+(\hat{p}_+) = 1 \ , \quad n_-(\hat{p}_+) = 0 \, .$$

Gemäß Theorem 8.3.28 besitzt $\hat{p}_+$ also keine selbstadjungierte Erweiterung!

Zu Aufgabe E74a): Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
&\left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{A} \otimes \hat{A}'\right) \check{\Psi}_{\text{sep}} \right\rangle \\
&\quad = \quad \left\langle \Psi_1 \otimes \Psi_1' \mid \left(\hat{A} \otimes \hat{A}'\right) (\Psi_1 \otimes \Psi_1') \right\rangle \\
&\underset{\text{Def. (8.4.11)}}{=} \left\langle \Psi_1 \otimes \Psi_1' \mid \left(\hat{A}\, \Psi_1\right) \otimes \left(\hat{A}'\, \Psi_1'\right) \right\rangle \\
&\underset{(8.38)}{=} \left\langle \Psi_1 \mid \hat{A}\, \Psi_1 \right\rangle \left\langle \Psi_1' \mid \hat{A}'\, \Psi_1' \right\rangle \\
&\quad = \quad \left(\left\langle \Psi_1 \mid \hat{A}\, \Psi_1 \right\rangle \langle \Psi_1' \mid \Psi_1' \rangle \right) \left(\langle \Psi_1 \mid \Psi_1 \rangle \left\langle \Psi_1' \mid \hat{A}'\, \Psi_1' \right\rangle \right) \\
&\underset{(8.38)}{=} \left\langle \Psi_1 \otimes \Psi_1' \mid \left(\hat{A}\, \Psi_1\right) \otimes \Psi_1' \right\rangle \left\langle \Psi_1 \otimes \Psi_1' \mid \Psi_1 \otimes \left(\hat{A}'\, \Psi_1'\right) \right\rangle \\
&\underset{\text{Def. (8.4.11)}}{=} \left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{A} \otimes \hat{1}\right) \check{\Psi}_{\text{sep}} \right\rangle \left\langle \check{\Psi}_{\text{sep}} \mid \left(\hat{1} \otimes \hat{A}'\right) \check{\Psi}_{\text{sep}} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E74b): Die Behauptung folgt z.B. für

$$\hat{A} = \hat{P}_{\Psi_1} \ , \quad \hat{A}' = \hat{P}_{\Psi_1'}$$

[21] Da isometrische Operatoren Orthonormalsysteme wieder auf Orthonormalsysteme abbilden, sieht man leicht, daß der Wertebereich eines isometrischen Operators stets vollständig ist.

aus
$$\left(\hat{P}_{\Psi_1} \otimes \hat{P}_{\Psi'_1}\right) \check{\Psi}_{\text{Bell}} = 0$$
und
$$\left\langle \check{\Psi}_{\text{Bell}} \mid \underbrace{\left(\hat{P}_{\Psi_1} \otimes \hat{1}\right) \check{\Psi}_{\text{Bell}}}_{= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 \otimes \Psi'_2} \right\rangle = \frac{1}{2} = -\left\langle \check{\Psi}_{\text{Bell}} \mid \underbrace{\left(\hat{1} \otimes \hat{P}_{\Psi'_1}\right) \check{\Psi}_{\text{Bell}}}_{= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \otimes \Psi'_1} \right\rangle .$$

Zu Aufgabe E75: Sei
$$\left\langle \check{\Psi} \mid \hat{A} \otimes \hat{1}\, \check{\Psi} \right\rangle = \left\langle \Psi \mid \hat{A}\, \Psi \right\rangle \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \tag{F.41}$$
als gültig vorausgesetzt. Wir wählen ein ONS $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$ von $\mathcal{H}$ mit $\Psi_1 = \Psi$ und ein ONS $\{\Psi'_1, \dots, \Psi'_{n'}\}$ von $\mathcal{H}'$ wählen und schreiben damit $\check{\Psi}$ in der Form
$$\check{\Psi} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\nu'=1}^{n'} c_{\nu\nu'}\, \Psi_\nu \otimes \Psi'_{\nu'} \,. \tag{F.42}$$
Damit ergibt sich
$$\begin{aligned}
\left\langle \check{\Psi} \mid \hat{A} \otimes \hat{1}\, \check{\Psi} \right\rangle &= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\nu',\mu'=1}^{n'} c^*_{\nu,\nu'}\, c_{\mu\mu'} \left\langle \Psi_\nu \otimes \Psi'_{\nu'} \mid \left(\hat{A} \otimes \hat{1}\right) \left(\Psi_\mu \otimes \Psi'_{\mu'}\right) \right\rangle \\
&= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\nu',\mu'=1}^{n'} \delta_{\nu'\mu'}\, c^*_{\nu,\nu'}\, c_{\mu\mu'} \left\langle \Psi_\nu \mid \hat{A}\, \Psi_\mu \right\rangle
\end{aligned}$$
und somit aus (F.41)
$$\left\langle \Psi \mid \hat{A}\, \Psi \right\rangle = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\nu'=1}^{n'} c^*_{\nu,\nu'}\, c_{\mu\nu'} \left\langle \Psi_\nu \mid \hat{A}\, \Psi_\mu \right\rangle \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
für geeignete $d_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$. Einsetzen von
$$\hat{A} = |\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|$$
liefert
$$\delta_{\alpha 1} = \sum_{\nu'=1}^{n'} c^*_{\alpha,\nu'}\, c_{\alpha\nu'} \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\}$$
und somit
$$\sum_{\nu'=1}^{n'} |c_{1\nu'}|^2 = 1$$

sowie

$$c_{\alpha\nu'} = 0 \quad \forall \alpha \in \{2, \dots, n\}\,,\; \nu' \in \{1, \dots, n'\}\,.$$

Mit (F.42) folgt daraus

$$\check{\Psi} = \Psi \otimes \Psi'\,, \quad \|\Psi'\| = 1\,, \tag{F.43}$$

für

$$\Psi' = \sum_{\nu'=1}^{n'} c_{1\nu'}\, \Psi'_{\nu'}\,.$$

Umgekehrt folgt aus (F.43) natürlich unmittelbar (F.41).

> **Anmerkung:** Tatsächlich wurde in der Herleitung von (F.43) die Voraussetzung (F.41) nur für Projektoren $\hat{A}$ benutzt. benutzt.

Das Ergebnis zeigt:

> Selbst wenn der Gesamtzustand eines zusammengesetzten Systems rein[22] ist, sind die partiellen Zustände der Teilsysteme i.a. gemischt.

Es ist also keineswegs so, daß gemischte Zustände nur aufgrund mangelnder Information des Experimentators auftreten!

Zu Aufgabe E76a: Die HERMITEzität von $\hat{Q}$ ist offensichtlich. Die HERMITEzität von $\hat{P}$ folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_1 \mid \hat{P}\,\Psi_2 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} \left(\Psi_1(\varphi)\right)^* \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\Psi_2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\Psi_1(\varphi)\right)^* \Psi_2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\left(\Psi_1(\varphi)\right)^* \frac{\hbar}{i}\,\Psi_2(\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}}_{\underset{\text{Period.}}{=}\;0} \\
&= \left\langle \hat{P}\,\Psi_1 \mid \Psi_2 \right\rangle \quad \forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in D_{\hat{P}}\,.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe E76b): Für $\Psi \in D_{\hat{P}\hat{Q}} \cap D_{\hat{Q}\hat{P}}$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\underline{\left[\hat{P}, \hat{Q}\right]_-}}\,\Psi\right)(\varphi) &= \underbrace{\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big(\varphi\,\Psi(\varphi)\Big)}_{=\frac{\hbar}{i}\,\Psi(\varphi)+\varphi\,\frac{\hbar}{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\Psi(\varphi)} - \varphi\,\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\Psi(\varphi) \\
&= \underline{\underline{\frac{\hbar}{i}}}\,\Psi(\varphi)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

[22]Bzgl. *reiner* und *gemischter* Zustände siehe Anmerkung 3 zu Folgerung 7.4.5.

Zu Aufgabe E76c): Mit

$$Y_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{+i\varphi} \quad \forall\, \varphi \in (0, 2\pi)$$

gilt offensichtlich

$$Y_0 \in D_{\hat P}\,, \quad \|Y_0\| = 1$$

und

$$\hat P\, Y_0 = \hbar\, Y_0\,.$$

Daraus folgt

$$\Big(\hat P - \underbrace{\Big\langle Y_0 \mid \hat P\, Y_0 \Big\rangle}_{=\hbar}\Big) Y_0 = 0$$

und somit auch

$$\min_{\substack{\Psi \in C^1(S^1)\\ \|\Psi\|=1}} \left\| \Big(\hat P - \Big\langle \Psi \mid \hat P\, \Psi \Big\rangle\Big) \Psi \right\| \;=\; 0\,.$$

Die Ungleichung[23]

$$\sup_{\substack{\Psi \in C^1(S^1)\\ \|\Psi\|=1}} \left\| \Big(\hat Q - \Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle\Big) \Psi \right\| \;\leq\; 2\pi\,.$$

folgt aus

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle \;&=\; \int_0^{2\pi} \varphi\, |\Psi(\varphi)|^2 \, d\varphi \\ &\in\; \Big[0, 2\pi\, \|\Psi\|^2\Big]\end{aligned}$$

gemäß

$$\begin{aligned}\left\| \Big(\hat Q - \Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle\Big) \Psi \right\|^2 \;&=\; \left\langle \Psi \,\middle|\, \Big(\hat Q - \Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle\Big)^2 \Psi \right\rangle \\ &=\; \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\varphi - \Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle}_{\in[0,2\pi]}\Big)^2 |\Psi(\varphi)|^2 \, d\varphi \\ &\leq\; (2\pi)^2 \quad \text{für alle normierten } \Psi \in C^1(S^1)\,.\end{aligned}$$

Anmerkung: Die HEISENBERGsche Unschärferelation

$$\left\| \Big(\hat P - \Big\langle \Psi \mid \hat P\, \Psi \Big\rangle\Big) \Psi \right\| \left\| \Big(\hat Q - \Big\langle \Psi \mid \hat Q\, \Psi \Big\rangle\Big) \Psi \right\| \;\geq\; \frac{\hbar}{2}$$

kann hier also nicht für alle normierten $\Psi \in D_{\hat Q} \cap D_{\hat P}$ erfüllt sein.

[23]Tatsächlich gilt sogar Gleichheit.

Zu Aufgabe E77a): Angenommen, es gelte

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]_- = \frac{\hbar}{i}\,\hat{1}\,. \tag{F.44}$$

Dann folgt daraus

$$\begin{aligned}\left[\hat{A},\hat{B}^\nu\right]_- &= \frac{\hbar}{i}\,\nu\,\hat{B}^{\nu-1}\\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^\nu\right)_{|_{x=\hat{B}}} \qquad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Da $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gemäß Lemma 8.3.4 beschränkt sind, gilt damit auch

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}\,,\,e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\right]_- &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,e^{-i\,\lambda\,x}\right)_{|_{x=\hat{B}}}\\ &= -\hbar\,\lambda\,e^{-i\,\lambda\,\hat{B}} \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

und somit[24]

$$\begin{aligned}&\left\langle e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi\,\middle|\,\hat{A}\,e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi\right\rangle\\ &= \left\langle e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi\,\middle|\,\left[\hat{A}\,,\,e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\right]_-\,\Psi\right\rangle + \left\langle e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\Psi\,\middle|\,e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}\,\hat{A}\,\Psi\right\rangle\\ &= \left\langle\Psi\mid\left(\hat{A}-\hbar\,\lambda\right)\Psi\right\rangle \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,,\ \Psi\in\mathcal{H}\end{aligned} \tag{F.45}$$

Da $e^{-i\,\lambda\,\hat{B}}$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ unitär ist, steht das im Widerspruch zur Beschränktheit von $\hat{A}$. Also kann (F.44) nicht gelten.

Zu Aufgabe E77b): Wir betrachten nur den nichttrivialen Fall

$$\left[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\,,|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right]_- \neq 0\,,$$

also

$$\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle\neq 0\,,\quad \Psi_1\not\propto\Psi_2\,.$$

Aus

$$\begin{aligned}&\left[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\,,|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right]_-\,(\Psi_1+\lambda\,\Psi_2)\\ &= \left(\lambda\,\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle + |\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2\right)\Psi_1 - \left(\langle\Psi_2\mid\Psi_1\rangle + \lambda\,|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2\right)\Psi_2\end{aligned}$$

[24] Wenn $\hat{B}$ unbeschränkt ist, folgt (F.45) u.U. für kein einziges $\Psi\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$ aus der Gültigkeit von (F.44) auf $D_{\hat{B}\hat{A}}\cap D_{\hat{A}\hat{B}}$, wie Aufgabe E76b) zeigt; siehe auch (Galapon, 2002).

folgt dann

$$
\begin{aligned}
& i\Big[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\,,|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\Big]_-\,(\lambda_1\,\Psi_1+\lambda_2\,\Psi_2)=E\;(\lambda_1\,\Psi_1+\lambda_2\,\Psi_2)\\
\iff & \left\{\begin{array}{l}\lambda\,\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle+|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2=-i\,E\,,\\ \langle\Psi_2\mid\Psi_1\rangle+\lambda\,|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2=i\,\lambda\,E\end{array}\right.\\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl}\lambda & = & \mp\,i\,\lambda_1\,\dfrac{|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|}{\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle}-\dfrac{|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2}{\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle}\,,\\ E & = & \pm\,|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|\;.\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Die Eigenvektoren des selbstadjungierten Operators $i\Big[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\,,|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\Big]_-$ sind also die Vielfachen von

$$
\Psi_1-\left(\pm\,i\,\lambda_1\,\frac{|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|}{\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle}+\frac{|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|^2}{\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle}\right)\Psi_2
$$

und alle Vektoren ($\neq\ 0$), die orthogonal zu Ψ_1 und zu Ψ_2 sind. Die möglichen Eigenwerte sind dementsprechend

$$
0\,,\quad +|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|\quad\text{und}\quad -|\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle|\;.
$$

Zu Aufgabe E78: Aus der Baker-Hausdorff-Formel

$$
e^{\hat A+\hat B}=e^{-\frac12[\hat A,\hat B]_-}\,e^{\hat A}\,e^{\hat B}\,.
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
e^{\hat A}\,e^{\hat B} &= e^{+\frac12[\hat A,\hat B]_-}\qquad \underbrace{e^{\hat A+\hat B}}_{=e^{+\frac12[\hat A,\hat B]_-}\,e^{\hat B}\,e^{\hat A}}\\
&= e^{+[\hat A,\hat B]_-}\,e^{\hat B}\,e^{\hat A}
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich durch formales Einsetzen von

$$
\hat A=\tau\frac{\partial}{\partial x^j}\,,\quad \hat B=is\,x^k
$$

und

$$
\begin{aligned}
[\hat A,\hat B]_- &= \tau\,is\,[\frac{\partial}{\partial x^j}\,,x^k]_-\\
&= i\,\tau s\,\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

direkt die Weyl***schen Vertauschungsrelationen***

$$
e^{\tau\frac{\partial}{\partial x^j}}\,e^{is\,x^k}=e^{i\tau s\,\delta_{jk}}\,e^{is\,x^k}\,e^{\tau\frac{\partial}{\partial x^j}}\,. \tag{F.46}
$$

Gemäß Theorem 8.3.33 (Satz von STONE) und (4.18) gilt

$$e^{\tau \frac{\partial}{\partial x^j}}\, \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \tau\, \mathbf{e}_j)$$

für hinreichend gutartige $\Phi(\mathbf{x})$ und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{e^{\tau \frac{\partial}{\partial x^j}}\, e^{is\, x^k}}}\, \Psi(\mathbf{x}) &= e^{is\left(x^k + \tau\, \delta_{jk}\right)}\, \Psi(\mathbf{x} + \tau\, \mathbf{e}_j) \\ &= \underline{\underline{e^{i\tau s\, \delta_{jk}}\, e^{is\, x^k}\, e^{\tau \frac{\partial}{\partial x^j}}}}\, \Psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

für hinreichend gutartige $\Psi(\mathbf{x})$ — im Einklang mit (F.46).

Zu Aufgabe E79: Da $\check{L}$ beschränkt ist, ist die Definition

$$\overline{\check{L}}\left(\lim_{\nu\to\infty} \Psi_\nu\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \check{L}(\Psi_\nu)$$

für alle CAUCHY-Folgen $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}$ erlaubt und liefert die eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung $\overline{\check{L}}$ von $\check{L}$ auf die HILBER-Raum-Vervollständigung $\overline{\mathcal{T}} \subset \mathcal{H}$ (vgl. Folgerung 8.3.27). Falls $\mathcal{T}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, also $\overline{\mathcal{T}}$ mit $\mathcal{H}$ übereinstimmt, ist damit die Eindeutigkeit der beschränkten linearen Fortsetzung L von $\check{L}$ auf ganz $\mathcal{H}$ gezeigt. Andernfalls ist eine einfache Möglichkeit durch

$$L(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\check{L}}(\hat{P}_{\overline{\mathcal{T}}}\, \Psi) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}$$

gegeben.

Zu Aufgabe E80a): Daß ω als Grenzwert linearer Funktionale linear ist, ist klar. Aber $\mathcal{T}_\Phi$ kann nicht mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ übereinstimmen. Es läßt sich nämlich leicht eine Folge von Zahlen $\lambda_\nu \in \{1, 0\}$ so konstruieren, daß die Teilfolgen $\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu$ für $N \to \infty$ **nicht** konvergieren. Dann gilt zwar

$$\hat{A}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu\, |\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\nu| \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\;,$$

aber auch

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{Spur}\left(\hat{P}_{\Phi_\nu} \hat{A}_0\right) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,$$

so daß $\omega(\hat{A}_0)$ nicht definiert ist.

Zu Aufgabe E80b): Die Behauptung folgt direkt aus

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\operatorname{Spur}\left(\hat{P}_{\Phi_\nu} \hat{1}\right)}_{=1} = 1 \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,.$$

Zu Aufgabe E80c): Die Behauptung folgt direkt aus

$$\mathrm{Spur}\left(\hat{P}_{\Phi_\nu}\hat{A}^\dagger\hat{A}\right) = \left\|\hat{A}\,\Phi_\nu\right\|^2 \quad \forall\,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Zu Aufgabe E80d): Angenommen es gebe einen statistischen Operator $\hat{T}$ mit

$$\omega(\hat{A}) = \mathrm{Spur}\left(\hat{T}\,\hat{A}\right) \quad \forall\,\hat{A}\in\mathcal{T}_\Phi\,.$$

Dann müßte insbesondere

$$\begin{aligned}\omega\left(\sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\nu|\right) &= \mathrm{Spur}\left(\hat{T}\sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu\rangle\langle\Phi_\nu|\right)\\ &= \sum_{\nu=1}^N \left\langle\Phi_\nu\,\middle|\,\hat{T}\,\Phi_\nu\right\rangle \quad \forall\,N\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

gelten, was aber nicht sein kann, weil die linke Seite stets Null ist während die rechte Seite für $N\to\infty$ gegen $\mathrm{Spur}(\hat{T}) = 1$ konvergiert.

Zu Aufgabe E81: Gemäß Definition 9.1.2 ist zu zeigen, daß die Behauptungen von Lemma 9.1.12 gelten, wenn man statt der Distribution $F(\mathbf{x})$ jeweils eine gewöhnliche Funktion $\psi(\mathbf{x})\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ einsetzt:

Die erste Behauptung folgt dann unmittelbar durch Variablensubstitution $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$, die zweite durch Anwendung der klassischen Formel

$$\det\hat{M}\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\chi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_\mathbf{x} = \left|\det\hat{M}\right|\int\chi(\hat{M}\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_\mathbf{x} \quad \forall\,\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{F.47}$$

auf

$$\chi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\,\varphi(\hat{M}^{-1}\mathbf{x})\,.$$

Beweisskizze zu (F.47): Zu jedem $L>0$ sei eine einfache Parametrisierung $\left(\mathbf{x}_L(s,t,u), s_1(L),\ldots,u_2(L)\right)$ des Würfels

$$\mathcal{G}_L \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3 : \left|x^j\right|\leq L \quad \forall\,j\in\{1,2,3\}\right\}$$

gewählt. Dann ist $\left(\hat{M}\mathbf{x}_L(s,t,u), s_1(L),\ldots,u_2(L)\right)$ — von einer eventuell falschen Reihenfolge der Parameter s,t,u abgesehen — eine einfache Parametrisierung von $\hat{M}\mathcal{G}$ und mit

$$\begin{aligned}(\hat{M}\mathbf{a})\cdot\left((\hat{M}\mathbf{b})\times(\hat{M}\mathbf{c})\right) &\underset{(2.34)}{=} \det\left((\hat{M}\mathbf{a})(\hat{M}\mathbf{b})(\hat{M}\mathbf{c})\right)\\ &= \det\left(\hat{M}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\right)\\ &\underset{\text{L 7.3.6}}{=} \det(\hat{M})\,\det(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\\ &\underset{(2.34)}{=} \det(\hat{M})\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \quad \forall\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{F.48}$$

folgt für jedes $L > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{M}\mathcal{G}_L} \chi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\\
&= \int_{u_1(L)}^{u_2(L)} \int_{t_1(L)}^{t_2(L)} \int_{s_1(L)}^{s_2(L)} \chi\Big(\hat{M}\mathbf{x}_L(s,t,u)\Big) \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial s}\hat{M}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial t}\hat{M}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\times\Big(\frac{\partial}{\partial u}\hat{M}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\bigg)\bigg|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\underset{(\mathrm{F.48})}{=} \left|\det(\hat{M})\right| \int_{u_1(L)}^{u_2(L)} \int_{t_1(L)}^{t_2(L)} \int_{s_1(L)}^{s_2(L)} \chi\Big(\hat{M}\mathbf{x}_L(s,t,u)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\times\Big(\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_l(s,t,u)\Big)\bigg)\bigg|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&= \left|\det(\hat{M})\right| \int_{\mathcal{G}_L} \chi(\hat{M}\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\lim_{L\to\infty}\int_{\hat{M}\mathcal{G}_L} \check{\chi}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} = \lim_{L\to\infty}\int_{\mathcal{G}_L} \check{\chi}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \quad \forall \check{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

folgt daraus (F.47). ▮

Der erste Teil der 3. Behauptung entspricht der PARSEVALschen Gleichung, Regel (F12). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \widetilde{\psi}(-\mathbf{p})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}} &\underset{(\mathrm{F.2})}{=} \psi(0)\\
&= \int \delta(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}\\
&\underset{\text{Parseval}}{=} \int \widetilde{\delta}(\mathbf{p})\,\widetilde{\psi}(-\mathbf{p})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{p}} \quad \forall\,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

und somit der zweite Teil der dritten Behauptung, was übrigens die **formale** Schreibweise

$$\widetilde{\delta}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int \delta(\mathbf{x})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}}$$

rechtfertigt.

Die 4. Behauptung ist für gewöhnliche Funktionen $F(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$ trivial.

Die 5. Behauptung folgt für $\psi_1(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ statt $F(\mathbf{x})$ schließlich mit

$$\begin{aligned}
&\int\left(\int \psi_2(\mathbf{x}')\,\psi_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\right)\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \int \psi_2(\mathbf{x}')\left(\int \varphi(\mathbf{x}')\,\psi_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\right)\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\,\psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

aus den Definitionen 9.1.6 und 9.1.2, angewandt auf $F = h$.

Zu Aufgabe E82: Die Behauptung folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\int \left(\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \varphi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \;&\underset{\text{Def. 9.1.2}}{=}\; \int \frac{\Delta\, \varphi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \\
&= \left(\int \frac{\Delta_{\mathbf{x}}\, \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}\right)_{|\mathbf{x}=0} \\
&= \left(\Delta_{\mathbf{x}} \int \frac{\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}\right)_{|\mathbf{x}=0} \\
&= \left(\Delta_{\mathbf{x}} \int \frac{\varphi(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}\right)_{|\mathbf{x}=0} \\
&\underset{(4.63)}{=} -4\pi\, \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)\,.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Rein formal folgt die Behauptung natürlich aus (4.63) durch den Grenzübergang $\varphi(\mathbf{x}') \to \delta(\mathbf{x}')$ vor (anstatt nach) Anwendung des LAPLACE-Operators. Eine seriöse Rechtfertigung dieser Schlußweise ist aber keineswegs einfacher, als der angegebene direkte Beweis.

Zu Aufgabe E83: Die Behauptung folgt gemäß

$$\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } |x| \geq R^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int \chi\big(x^2 - R^2\big)\, \psi\big(x^2 - R^2\big)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \chi\big(x^2 - R^2\big)\, \psi\big(x^2 - R^2\big) \Big(\varphi(x) + \varphi(-x)\Big) \mathrm{d}x \\
&\underset{\xi = x^2}{=} \int_0^\infty \psi(\xi - R^2)\, \underbrace{\chi(\xi - R^2)}_{=0\ \forall\, \xi \leq 0}\, \frac{\varphi\big(\sqrt[+]{\xi}\big) + \varphi\big(-\sqrt[+]{\xi}\big)}{2\sqrt[+]{\xi}}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int \underbrace{\psi(\xi - R^2)}_{\text{statt }\ \delta(\xi - \mathrm{R}^2)}\, \underbrace{\chi(\xi - R^2)\, \frac{\varphi\big(\sqrt[+]{\xi}\big) + \varphi\big(-\sqrt[+]{\xi}\big)}{2\sqrt[+]{\xi}}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R})}\, \mathrm{d}\xi \quad \forall\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$

Ergänzendes Literaturverzeichnis

Adami, C. (2004). The physics of information. *quant-ph/0405005*, Seiten 1–28. 91

Bhatia, R. (1997). *Matrix analysis*. Springer-Verlag, New York.

Cooke, R., Keane, M., und Moran, W. (1985). An elementary proof of Gleason's theorem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 98:117–128. 85

Courant, R. und Hilbert, D. (1968). *Methoden der Mathematischen Physik I*. Springer-Verlag. 55, 56

Ebert, H. (1967). *Physikalisches Taschenbuch*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. 15

Eckert, K., Schliemann, J., Bruß, D., und Lewenstein, M. (2002). Quantum correlations in systems of indistinguishable particles. *Annals of Physics*, 299:88–127. quant-ph/0203060. 51

Fischer, H. und Kaul, H. (2001). *Mathematik für Physiker*, Band 1. B.G. Teubner, Stuttgart, 4. Auflage. Grundkurs. 3

Fischer, H. und Kaul, H. (2003). *Mathematik für Physiker*, Band 3. B.G. Teubner, Stuttgart. 3

Fischer, H. und Kaul, H. (2004). *Mathematik für Physiker*, Band 2. B.G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. 3, 68, 115

Fuchs, C. A. (2002). Quantum mechanics as quantum information (and only a little more). *quant-ph/0205039*, Seiten 1–59. 85

Galapon, E. A. (2002). Pauli's theorem and quantum canonical pairs: the consistency of a bounded, self-adjoint time operator canonically conjugate to a Hamiltonian with non-empty point spectrum. *Proc. Roy. Soc. London A*, 458:451–472. 228

Gelfand, I. und Schilow, G. (1962). *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, Band II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 108

Gjurchinovski, A. (2002). Polarization measurements - a numerical approach. *Physica Macedonica*, 52:69–76. physics/0401105. 15

Gleason, A. M. (1957). Measures on the closed subspaces of a hilbert space. *J. Math. Mech.*, 6:885–893. 85

Grosche, G., Ziegler, V., Ziegler, D., und Zeidler, E., Herausgeber (2003). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil II*. B. G. Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden, 8. Auflage. 3

Jahnke, E., Emde, F., und Lösch, F. (1960). *Tafeln höherer Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 67, 69, 71

Kemble, E. C. (1937). *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics with Elementary Applications*. Dover Publications, Inc., New York. 115

Lücke, W. (edyn). Elektrodynamik .
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf. 68, 113, 189

Lücke, W. (fuan). Mathematische Methoden der Physik: Funktionalanalytische Methoden.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/fuan.pdf. 58, 83, 86

Lücke, W. (nlqo). Introduction to photonics.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/nlqo.pdf. 176

Lücke, W. (qip). Introduction to quantum information processing.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/qip.pdf. 23, 127, 214

Lücke, W. (tdst). Thermodynamik und Statistik .
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/tdst.pdf. 90

Nielsen, M. A. (2000). Quantum information theory. *quant-ph/0011036*. PhD Dissertation, The University of New Mexico (1998). 53

Rédei, L. (1959). *ALGEBRA*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig. Erster Teil. 57

Reed, M. und Simon, B. (1972). *Methods in Modern Mathematical Physics*, Band I: Functional Analysis. Academic Press. 93

Reed, M. und Simon, B. (1975). *Methods in Modern Mathematical Physics*, Band II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press. 88

Shannon, C. E. (1949). *The mathematical theory of communication*. University of Illinois Press. 91

Simon, B. (1971). *Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms.* Princeton series in physics. Princeton University Press.

Tilma, T. und Sudarshan, E. (2002). Generalized Euler angle paramterization for SU(n). *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:10467–10501. math-ph/0205016. 126

Zeidler, E., Herausgeber (2003). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden, 2. Auflage. 3

Ergänzender Index

Abbildung
  antiunitäre, 47
  beschränkte, 75
  differenzierbare
    schwach, 62
    stark, 62
  en, Komposition von, 30
  injektive, 28
  konjugiert lineare, 48
  lineare, 40, 93
  multilineare
    beschränkte, 98
  rückeindeutige, 28
  stark stetige, 14
  stetige, 75
  unitäre, 49
Anfangsbedingung, 101, 102
antilinear, 12
antiunitär, 47, 49

BAKER-HAUSDORFF-Formel, 127, 148
Basis, 10, 56
  HILBERT
    -Raum-, 62
  HILBERT
    -Raum-, 62
  Orthonormal-, 12
  reziproke, 123
beschränkt
  Abbildung, 75
    multilineare, 98
  Bilinearform, 96, 97
  Folge, 61, 79
  Funktional, 75, 94, 95, 97
  Menge, 61, 73
  Operator, 73, 74, 79, 89
  polynomial, 102, 108
BESSELsche Ungleichung, 57
Bilinearform, 49, 50, 52
  antisymmetrische, 49, 51
  beschränkte, 96, 97
  Komponenten, 50, 51
  SCHMIDT-Zerlegung, 53
  symmetrische, 49, 51
BLOCH-Darstellung, 20
BOLTZMANN-Konstante, 90
BORNsche Näherung, 115
bra-ket-Schreibweise, 44

C^*-Identität, 144
CAUCHY
  -Folge, 62, 65
COULOMB-Potential, 112
CRAMERsche Regel, 123

Defektindizes, 88, 146
Definitionsbereich, 71
  dichter, 74, 75, 85, 88
δ-Funktion, 104, 108, 112
δ-Folge, 104, 109
Determinante, 28, 30, 31, 39, 125
Diagonalisierbarkeit
  von Operatoren
    gemeinsame, 41
dicht, 55, 58, 68, 70, 72, 74, 75
Differentialgleichung
  fundamentales Lösungssystem, 110
  partielle, 111, 113
Differentialgleichungen
  für Distributionen, 110, 111
Differentialoperator, 111
Dimension, 10

Distribution
  Differentialgleichung für eine, 110
  Differentiation einer, 102
  Operationen mit einer, 103
  partielle Ableitungen, 104
    Vertauschbarkeit, 104
  reguläre, 102–105
  Schreibweise, 102
  temperierte, 101, 108, 112, 113, 149
  Träger einer, 105
Dreiecksungleichung, 13
Dualraum, 49
dyadisches Produkt, 52

Eigen
  -Funktion, 140, 142
  -Raum, 41, 80
  -Vektor, 36, 39, 51, 80, 81, 122, 124
  -Wert, 36–38, 40, 41, 80–82, 124
Eigenschaften
  komplementäre, 19
Entropie, 90
  von Neumann-, 90
Entwicklung
  Multipol-, 135
  Taylor-, 148
  Taylor-, 68, 103, 135
Erwartungswert, 43, 87
Eulersche Winkel, 126

Faltung, 105
Folge
  beschränkte, 79
  Cauchy-, 62, 65
  δ-, 104, 109
Form
  Bilinear-, 49, 50, 52, 53
    beschränkte, 96, 97
  Semibilinear-, 50, 97
    Hermitesche, 50, 97
Fourier
  -Reihen, 56
  -Transformation, 108, 146
freie Energie, 90
Funktion
  δ-, 104, 108
  Eigen-, 140, 142
  en, Kugel-
    1. Art, 189
  Greensche, 112, 113
    retardierte, 113
  Heaviside-, 105
  polynomial beschränkte, 102, 108
  quadratintegrable, 148
  temperierte, 102
  verallgemeinerte, 104
Funktional
  beschränktes, 75, 94, 95, 97, 148
  Hermitesches, 95
  lineares, 44, 52, 75, 149
    beschränktes, 148
    normiertes, 46
    positives, 45
  normiertes, 95
  positives, 95
  stetiges, 101
Funktionen
  -Raum, 66
  Komposition von, 91
  von Operatoren, 89, 91

Generator einer 1-parametrigen Gruppe, 42, 43, 93
Greensche Funktion, 112, 113
  retardierte, 113
Gruppe
  1-parametrige
    unitärer Operatoren, 42, 43, 92, 93
  Matrix-, 125
    GL$(2, \mathbb{C})$, 125, 127
    SL$(2, \mathbb{C})$, 125
    SU(2), 125, 127
    U(2), 125

Hülle
  lineare, 9, 58, 59, 65–70, 99
Hamilton

-Operator, 43, 89, 102, 111, 139, 142
Heaviside
-Funktion, 105
Heisenberg
-Bild, 92
Hermitesch
Funktional, 95
Operator, 72, 79–82, 139, 140, 145, 147
Polynome, 69, 142
Semibilinearform, 50, 97
Hilbert
-Raum, 62, 65, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 148
-Vervollständigung, 66
separabler, 66, 139

im wesentlichen selbstadjungiert, 87
injektive Abbildung, 28
inneres Produkt, 11, 52
Intensität
elektromagnetischer Wellen, 17
invers
Operator, 24
isometrisch, 32, 77

Jones
-Matrix, 19–21, 39, 120
-Vektor, 17–19, 36, 43, 47, 118, 124

kanonische
Gesamtheit, 90
Zustandssumme, 90
kommensurabel, 88
komplementär, 19, 22
komplexe
Konjugation
einer Distribution, 105
Komponenten
Vektor-, 11
Komposition
von Abbildungen, 30
von Funktionen, 91
Konjugation, 47–50, 93, 94, 97
komplexe
einer Distribution, 105
konjugiert linear, 48, 50
Konvergenz
schwache, 60, 74
starke, 14, 60, 62
Kugel
-Funktionen
1. Art, 189

Laguerre
Polynome, 71
Laplace-Gleichung
inhomogene, 112
Legendre
-Polynome, 67
linear
Abbildung, 40, 93
abhängig, 10
anti-, 12
Differentialgleichung
für Distributionen, 110
Funktional, 44, 52, 75, 149
beschränktes, 148
normiertes, 46
positives, 45
Hülle, 9, 58, 59, 65–70, 99
konjugiert, 48, 50
Operator, 24, 71, 124, 125, 127
polarisiert, 15, 17, 119, 120
unabhängig, 10

Matrix
-Elemente, 50
-Gruppe, 125
eines Operators, 25–27, 31, 51
Hadamard-, 124
Jones-, 19–21, 39, 120
Komponenten, 51
Pauli-, 19, 39
transponierte, 29
unitäre, 128
Multipolentwicklung, 135

Norm, 13
  EUKLIDische, 53, 97, 98
  nicht EUKLIDische, 144
  Operator-, 144
    vollständig bzgl. der, 144
normal
  Zustand, 95

Observable, 86, 87, 92
  kommensurable, 88
Operator
  -Funktionenkalkül, 89, 91
  -Norm, 144
  -Produkt, 72
  -Schreibweise, 24
  -Summe, 72
  adjungierter, 32, 33, 75, 76
  beschränkter, 73, 74, 79, 89
  Definitionsbereich, 71
  Dichte-, 82
  Differential-, 111
  Einschränkung, 72
  en, Tensorprodukt von, 99
  en, vertauschbare, 88
  Erweiterung, 72, 91
    HERMITEsche, 140
    selbstadjungierte, 88, 102
  HAMILTON-, 43, 89, 102, 111, 139, 142
  HERMITESCHer, 79
  HERMITESCHer, 72
  HERMITEscher, 80–82, 87, 88, 139, 140, 145, 147
  Impuls-, 73
  inverser, 24
  invertierbarer, 31, 40, 124, 125, 139
  isometrischer, 32, 77, 139
  kompakter, 79–82, 144
  linearer, 24, 71, 124, 127
    invertierbarer, 24
  Matrix, 25–27, 31, 51
  normaler, 38
  Orts-, 73
  Polarzerlegung, 40, 127
  positiver, 124
  Projektions-, 22, 84, 85, 144
    komplementärer, 22
  selbstadjungiert
    im wesentlichen, 111
  selbstadjungierter, 32, 36, 39, 40, 42, 75, 85–89, 91, 111, 124, 127
    im wesentlichen, 87, 102
    nicht im wesentlichen, 140
    Spektrum, 86
  Spektral-, 89
  Spur, 44, 45, 47, 82
  Spurklasse-, 82, 90
  statistischer, 82, 84, 85, 87, 90, 149
  symmetrischer, 72, 88
  unbeschränkter, 73, 79, 92
  unitärer, 32, 33, 39, 40, 42, 77, 89, 92, 124, 125, 146
  vollstetiger, 79
orthogonal, 19
  -Projektoren, 34
Orthonormal
  -System
    diskretes, 12
Orthonormal
  -Basis, 12
  -System
    maximales, 12
Orthonormalbasis
  rechtshändige, 119
Orthonormalisierung, 66
Orthonormalsystem, 57
  maximales, 57, 140

Parallelogramm-Gleichung, 143
PAULI-Matrizen, 19, 39
Permutation, 28
  Signatur einer, 28
POISSON
  -Gleichung, 149
Polarisationsidentität, 21, 32, 49, 138
polarisiert

elliptisch, 15, 119, 120
linkshändig, 43
rechtshändig, 43
linear, 15, 17, 119, 120
zirkular, 15, 17, 119, 120
links-, 15, 36, 119, 120
rechts-, 15, 36, 119, 120
Polarzerlegung, 40, 127
Polynome
HERMITEsche, 69, 142
LAGUERREsche, 71
LEGENDRE, 189
LLEGENDRE-, 67
Potential
COULOMB-, 112
elektrostatisches, 112
Gravitations-, 112, 135
Produkt
-Ungleichung, 143
dyadisches, 52
inneres, 11, 50, 52, 98
komplexes, 12
Operator-, 72
Tensor-, 52–54, 97, 98
algebraisches, 99
von, 98
topologisches, 98
von Vektoren, 97, 98
Projektionsoperator
en, nicht vertauschbare, 144
Projektor, 35, 36, 77, 78, 84, 85
Propagator, 114
quantenmechanischer, 114
PYTHAGORAS
Satz von, 13

Randbedingungen, 112, 113
Raum
Dual-, 49
Eigen-, 41, 80
EUKLIDischer
separabler, 57
Folgen-, 94
HILBERT-
Basis, 62
HILBERT-, 62, 65, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 148
Basis, 62
separabler, 66, 83, 85, 139
Vervollständigung, 66
SCHWARTZ-, 70, 101
Zustands-, 84
Regel
CRAMERsche, 123
retardiert, 112
reziproke Basis, 123

Satz
Fundamental-
der Algebra, 37
von GLEASON, 85
Riesz
von RIESZ, 94
von RIESZ, 44, 52, 75, 97
Spektral-, 38, 85
von STONE, 42, 93
von PYTHAGORAS, 13
SCHMIDT
-Zahl, 53
-Zerlegung, 53
SCHRÖDINGER
-Bild, 89, 92
-Gleichung, 90, 102
Gleichung, 101, 103, 113
freie, 114
schwach
differenzierbar, 62
konvergent, 60, 74
stetig, 93
SCHWARTZ
-Distribution
temperierte, 101, 108, 113, 149
-Raum, 70, 101
SCHWARZsche Ungleichung, 14, 68, 95, 145
separabel, 57, 83

sesquilinear, 50
Signatur, 28
Spektral
 -Operatoren, 88
 -Satz, 38, 85
 -Schar, 85–87, 144
Spektrum, 86
Spiegelung
 Raum-Zeit-, 17, 47
Spur
 -Klasse, 82
 einer Operators, 125
 eines Operators, 44, 45, 47, 82
 Operator-, 83
Stammfunktion
 einer Distribution, 109
stark
 differenzierbar, 62
 konvergent, 14, 60, 62
 stetig, 14, 93
statistischer Operator, 82, 84, 85, 149
stetig
 Abbildung, 75
 Funktional, 101
 schwach, 93
 stark, 14, 93
 voll-, 79
Strahlteiler, 128
 symmetrischer, 128, 129
Symmetrie
 WIGNER-, 92
symmetrisch
 Operator, 72
 Strahlteiler, 128

TAYLOR-Entwicklung, 68, 103, 135, 148
temperierte
 Funktion, 70, 102
 SCHWARTZ-Distribution, 101, 108, 112, 113, 149
Tensor, 49, 52
 -Produkt, 52–54, 97, 98
  algebraisches, 53, 54, 99
  EUKLIDisches, 54
  topologisches, 98
  von Operatoren, 54, 99
Testfunktion, 105
 temperierte, 102
Träger, 105
Transposition, 28
transversal, 15

Ungleichung
 BESSELsche, 57
 Dreiecks-, 13
 Produkt-, 143
 SCHWARZsche, 95
 SCHWARZsche, 14, 68, 145
unitär, 32, 77, 89
Unschärferelation
 HEISENBERGsche, 145

Vektor, 9
 -Raum
  -Basis, 10
  Dimension, 10
  endlichdimensionaler, 10
  EUKLIDischer, 12
  komplexer, 9
 Eigen-, 36, 39, 51, 80, 81, 122, 124
 JONES-, 17–19, 36, 43, 47, 118, 124
 Komponenten, 11
 Norm, 13
 orthogonal, 19
verallgemeinerte Funktion, 104
Vertauschbarkeit
 von Operatoren, 41
Vertauschungsrelationen, 147
 WEYLsche, 148

Wellengleichung
 inhomogene, 112
  retardierte Lösung, 112
WEYLschen Vertauschungsrelationen, 148
WIGNER-Symmetrie, 92

Zerlegung der Eins, 106

Zustand, 46, 84, 87, 92, 128, 147
  gemischter, 47
  Gleichgewichts-, 90
  normaler, 95
  Polarisations-, 17, 43, 118, 124
  reiner, 46