

Mathematische Methoden der Physik:  
Funktionentheoretische Methoden

Technische Universität Clausthal  
SS 1994 – WS 1997/98

W. Lücke



## Vorwort

Der bis jetzt nur abgehandelte ‘Teil I’ beinhaltet Anwendungen der Theorie der analytischen Funktionen einer einzigen komplexen Veränderlichen auf folgende Gebiete:

Ebene Elektrostatik ,  
Lineare elektrische Netzwerke ,  
Dispersionsrelationen in klassischer Elektrodynamik und Quantentheorie .

Obwohl dies keinesfalls als Ersatz für eine Mathematikvorlesung über Funktionentheorie gedacht ist, werden alle notwendigen mathematischen Hilfsmittel im physikalischen Zusammenhang erarbeitet.

**Literaturempfehlung:** ([Kyrälä, 1972](#))



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Schwingungsvorgänge</b>	<b>7</b>
1.1	Lineare harmonische Schwingungen . . . . .	7
1.1.1	Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	7
1.1.2	Wechselstromwiderstände . . . . .	9
1.1.3	Leistungsanpassung . . . . .	12
1.2	Überlagerung mit gleicher Frequenz . . . . .	13
1.2.1	Gleichorientierte Kreisschwingungen . . . . .	13
1.2.2	Entgegengesetzt orientierte Kreisschwingungen . . . . .	14
1.2.3	Orthogonale lineare Schwingungen . . . . .	14
1.3	Überlagerung mit unterschiedlichen Frequenzen . . . . .	15
1.3.1	Zwei beliebige Frequenzen . . . . .	15
1.3.2	Ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz . . . . .	16
1.3.3	Beliebiges Frequenzspektrum . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Grundzüge der Funktionentheorie</b>	<b>19</b>
2.1	Holomorphe Funktionen und konforme Abbildungen . . . . .	19
2.1.1	Konforme Abbildungen und ihre Bedeutung . . . . .	19
2.1.2	Holomorphe Funktionen . . . . .	24
2.1.3	Komplexe Wegintegrale . . . . .	28
2.1.4	Potenzreihenentwicklungen . . . . .	33
2.2	Randwertprobleme der ebenen Elektrostatik . . . . .	36
2.2.1	Das Grundproblem . . . . .	36
2.2.2	Bestimmung der Greenschen Funktion durch konforme Abbildung . . . . .	39
2.2.3	Beispiele . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Die Heaviside-Methode</b>	<b>47</b>
3.1	Lineare 2-Pole . . . . .	47
3.1.1	Distributionstheoretische Grundlagen . . . . .	47
3.1.2	Grundgleichungen und Kausalitätsprinzip . . . . .	53
3.1.3	Heaviside-Formel und charakteristische Funktion . . . . .	58
3.2	Vierpolketten . . . . .	62
3.2.1	Kettenmatrix . . . . .	62
3.2.2	Anwendung der Heaviside-Methode . . . . .	65

3.2.3	Einschalten eines belasteten Transformators . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Dispersionsrelationen</b>	<b>69</b>
4.1	Dispersion elektromagnetischer Wellen . . . . .	69
4.1.1	Materialkonstanten . . . . .	69
4.1.2	Analytizitätseigenschaften . . . . .	73
4.1.3	Kramers-Kronig-Relation . . . . .	77
4.1.4	Subtraktionen . . . . .	80
4.2	Quantenmechanische Streuamplituden . . . . .	82
4.2.1	Grundbeziehungen der 1-Teilchen-Streuung . . . . .	82
4.2.2	Analytizitätseigenschaften der Streuamplitude . . . . .	86
4.2.3	Dispersionsrelationen für festen Impulsübertrag . . . . .	90
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

# Kapitel 1

## Behandlung von Schwingungsvorgängen mithilfe komplexer Zahlen

### 1.1 Lineare harmonische Schwingungen

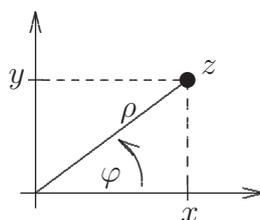
#### 1.1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  entsprechen bekanntlich 2-er Vektoren (Zahlenpaare)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . In Polarkoordinaten (siehe Abb. 1.1) ist diese Zuordnung durch

$$z = e^{r+i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} e^r \cos \varphi + ie^r \sin \varphi$$

gegeben, wobei  $\varrho$  natürlich nur mod  $2\pi$  bestimmt ist. Die Addition entspricht derjenigen für Vektoren:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$



$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \end{aligned} ; \quad \varrho = e^r \text{ für geeignetes } r \in \mathbb{R}^1.$$

Abb. 1.1: 2-dim. Polarkoordinaten

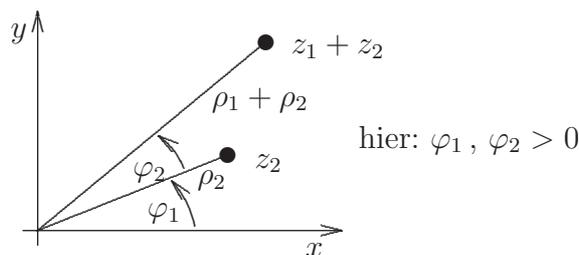


Abb. 1.2: Komplexe Multiplikation

Zusätzlich führt man jedoch die Multiplikation

$$\boxed{e^{r_1+i\varphi_1} \cdot e^{r_2+i\varphi_2} \stackrel{\text{def}}{=} e^{(r_1+r_2)+i(\varphi_1+\varphi_2)}} \quad (1.1)$$

ein, mit der die komplexen Zahlen zu einem **Körper** werden. Wie in Abb. 1.2 veranschaulicht, wird bei Multiplikation von  $z_2$  mit  $z_1$  der  $z_2$  entsprechende Vektor um den Polarwinkel des  $z_1$  entsprechenden Vektors dem Urzeigersinn entgegengesetzt gedreht und mit dem Betrag des  $z_1$  entsprechenden Vektors multipliziert.<sup>1</sup>

$$\begin{pmatrix} e^{r_1+r_2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ e^{r_1+r_2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = e^{r_1} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{r_2} \cos \varphi_2 \\ e^{r_2} \sin \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen die bekannten Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Die Multiplikation ist somit äquivalent zu

$$\boxed{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)}, \quad (1.2)$$

also zur üblichen Multiplikation unter Beachtung von

$$\boxed{i^2 \stackrel{\text{def}}{=} i \cdot i = -1.}$$

Übliche Bezeichnungen für  $z = x + iy$ :

$$\begin{array}{ll} \Re(z) \stackrel{\text{def}}{=} x & \text{\textit{Realteil}} \text{ von } z, \\ \Im(z) \stackrel{\text{def}}{=} y & \text{\textit{Imaginärteil}} \text{ von } z, \\ |z| \stackrel{\text{def}}{=} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{\textit{Betrag}} \text{ von } z, \\ \arg z \stackrel{\text{def}}{=} \varphi = \arctan \frac{y}{x} & \text{\textit{Argument}} \text{ von } z, \\ \bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy & \text{zu } z \text{ \textit{konjugiert komplexe} Zahl.} \end{array}$$

<sup>1</sup>Der Körper der komplexen Zahlen ist also isomorph zum Körper der reellen orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen beliebiger Determinante.

Einfache Folgerungen:

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad (1.3)$$

$$\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.4)$$

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2, \quad (1.5)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad (1.6)$$

$$\Re(\bar{z}_1 z_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\Im(\bar{z}_1 z_2) = \text{3. Komp. von } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

**Übungsaufgabe 1** Man behandle die Bewegungsgleichung für die **ebene** Bewegung eines Elektrons im konstanten homogenen Magnetfeld als Differentialgleichung einer komplexwertigen Funktion.

### 1.1.2 Wechselstromwiderstände

Die komplexe Funktion der Zeit

$$z(t) = \underbrace{A}_{>0} e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad \omega, \varphi \text{ reell} \quad (1.9)$$

beschreibt eine gleichförmige Kreisbewegung (Abb. 1.3).

Die Projektion von  $z(t)$  auf die  $x$ -Achse liefert die harmonische Schwingung

$$\Re(z(t)) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Multiplikation von  $z(t)$  mit einer komplexen Zahl  $\mathcal{R}$  ändert die **Amplitude**  $A$  um das  $|\mathcal{R}|$ -fache und verschiebt die **Phase** um  $\arg(\mathcal{R})$ , läßt aber die **Kreisfrequenz**  $\omega$  unverändert:

$$\mathcal{R}z(t) = |\mathcal{R}| A e^{i(\omega t + \varphi + \arg(\mathcal{R}))}. \quad (1.10)$$

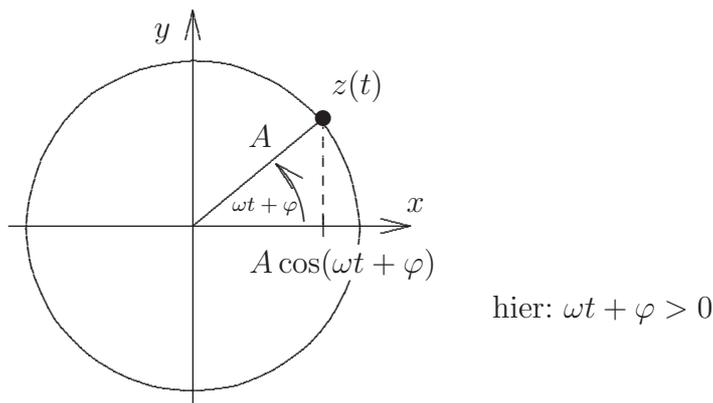


Abb. 1.3: Gleichförmige Kreisbewegung

Daher läßt sich die Wirkungsweise aus Kondensatoren, Spulen und ohmschen Widerständen aufgebaute 2-Pole auf Wechselströme 1. Art (rein sinusförmig) **nach Abklingen des Einschaltvorganges** als komplexes OHMSches Gesetz

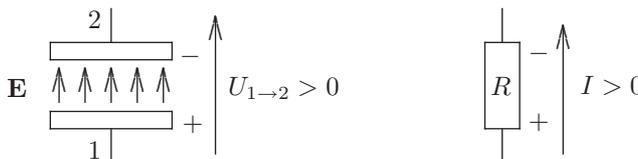
$$\boxed{\mathcal{U}(t) = \mathcal{R} \mathcal{I}(t)} \quad (1.11)$$

schreiben, wobei:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \underbrace{U}_{>0} e^{i(\omega t + \varphi_U)} : \text{komplexe Spannung,} \\ \mathcal{I}(t) &= \underbrace{I}_{>0} e^{i(\omega t + \varphi_I)} : \text{komplexer Strom,} \\ \mathcal{R} : & \text{komplexer Widerstand (Impedanz).} \end{aligned}$$

Man beachte:

$$U_{1 \rightarrow 2}(t) = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \Phi_1 - \Phi_2$$



Übliche Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \Re(\mathcal{R}) : & \text{Wirkwiderstand (Resistanz),} \\ \Im(\mathcal{R}) : & \text{Blindwiderstand (Reaktanz),} \\ |\mathcal{R}| : & \text{Scheinwiderstand.} \end{aligned}$$

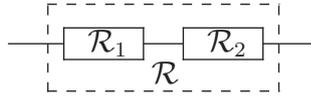
<sup>2</sup>Physikalisch relevant sind natürlich nur die Realteile von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{I}$ .

**Übungsaufgabe 2** Man zeige:

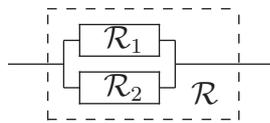
1.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} R & \text{für ideale OHMSche Widerstände,} \\ \frac{1}{i\omega C} & \text{für ideale Kondensatoren } (C > 0), \\ i\omega L & \text{für ideale Spulen } (L > 0). \end{cases}$$

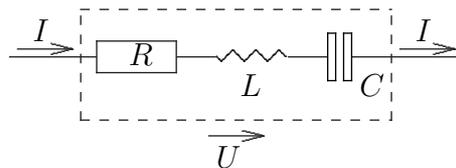
2.  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$  bei Serienschaltung:



3.  $\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}$  bei Parallelschaltung:



Beispiel Schwingkreis:<sup>3</sup>



hier ist

$$\mathcal{R} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

und das komplexe OHMSche Gesetz beschreibt die Zeitableitung  $\mathcal{I}(t) = \dot{Q}(t)$  der **asymptotischen** Lösung der Differentialgleichung

$$R\dot{Q}(t) + L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U e^{i(\omega t + \varphi_U)}$$

für die (komplexe) Kondensatorladung  $Q(t)$ , die dem Lösungsansatz

$$Q(t) = Q e^{i(\omega t + \varphi_Q)}$$

entspricht und somit die Bedingungen

$$i\omega L\mathcal{I}(t) = L\ddot{Q}(t), \quad \frac{1}{i\omega C}\mathcal{I}(t) = \frac{1}{C}Q(t)$$

erfüllt. Aus dem OHMSchen Gesetz folgt unmittelbar:

$$\boxed{|\mathcal{I}(t)| = \frac{|\mathcal{U}(t)|}{|\mathcal{R}|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{maximal für } \omega^2 = \frac{1}{LC}.} \quad (1.12)$$

**Warnung:** Das Fehlen eines Kondensators entspricht **nicht** dem Limes  $C \rightarrow 0$ , **sondern** dem Limes  $C \rightarrow \infty$ .

**Übungsaufgabe 3** Man zeige, daß dagegen

$$\boxed{|\mathcal{Q}(t)| \text{ maximal für } \omega^2 = \max \left\{ 0, \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \right\}} \quad (1.13)$$

ist<sup>4</sup> und diskutierte die Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung.

### 1.1.3 Leistungsanpassung

Die **Wirkleistung**  $\bar{N}$ , d.h. der zeitliche Mittelwert der Leistung, ist für die Kreisfrequenz  $\omega$

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Re(\mathcal{U}(t)) \Re(\mathcal{I}(t)) \, dt \\ &= \frac{UI}{4} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (e^{i(\omega t + \varphi_U)} + e^{-i(\omega t + \varphi_U)}) (e^{i(\omega t + \varphi_I)} + e^{-i(\omega t + \varphi_I)}) \, dt \\ (1.3) \quad &= \frac{UI}{2} \cos(\underbrace{\varphi_U - \varphi_I}_{\text{Verlustwinkel}}). \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\bar{N} = \frac{1}{2} \Re(\mathcal{U}(t) \overline{\mathcal{I}(t)}) \stackrel{(1.11)}{=} \frac{1}{2} |\mathcal{I}(t)|^2 \underbrace{\Re(\mathcal{R})}_{\text{Wirkwiderst.}}} \quad (1.14)$$

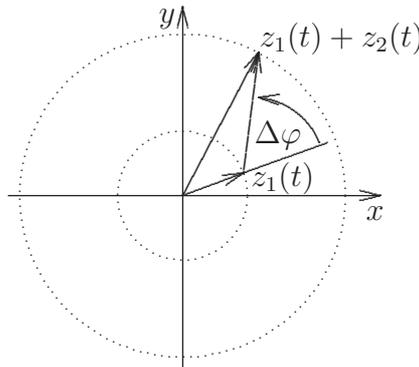
**Übungsaufgabe 4** Man zeige, daß ein Verbraucherwiderstand  $\mathcal{R}$  einem Wechselstromgenerator mit Innenwiderstand  $\mathcal{R}_i$  genau dann die maximale Wirkleistung (bei gegebenem  $\omega$ ) entzieht, wenn  $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_i}$ .

<sup>4</sup>Man bestimme das Minimum von  $(1/|\mathcal{Q}|)^2$  als Funktion von  $\omega^2$  durch Differentiation.

## 1.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

### 1.2.1 Gleichorientierte Kreisschwingungen

Anschaulich ist klar, daß die Überlagerung gleichförmiger Kreisbewegungen **gleicher** Kreisfrequenz  $\omega$  wieder eine solche ist:



mathematisch ist das im komplexen Formalismus ebenso klar, da gemäß (1.9)/(1.10) eine komplexe Zahl  $\mathcal{R}$  existieren muß, für die

$$z_2(t) = \mathcal{R} z_1(t)$$

und somit

$$z_1(t) + z_2(t) = (1 + \mathcal{R})z_1(t)$$

gilt. Durch Projektion auf die  $x$ -Achse erkennt man daraus mit (1.10):

$$\boxed{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = |1 + \mathcal{R}| A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 + \arg(1 + \mathcal{R}))}$$

mit:  $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_2}{A_1} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$ .

(1.15)

Die Menge der linearen harmonischen Schwingungen fester Frequenz und Schwingungsrichtung ist also invariant bzgl. Überlagerung (Addition) von Schwingungen.

**Übungsaufgabe 5** Man zeige:

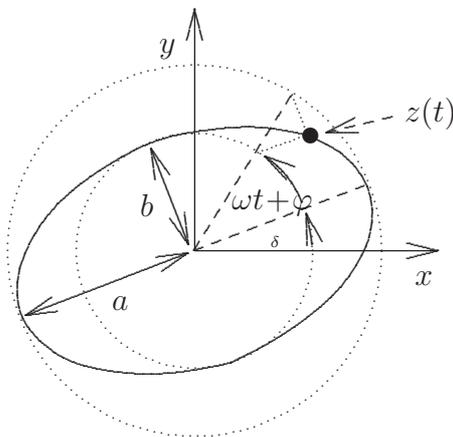
$$\boxed{|1 + \mathcal{R}| = \sqrt{1 + 2|\mathcal{R}| \cos \arg(\mathcal{R}) + |\mathcal{R}|^2}}, \quad (1.16)$$

$$\boxed{\arg(1 + \mathcal{R}) = \arctan \frac{|\mathcal{R}| \sin(\arg(\mathcal{R}))}{1 + |\mathcal{R}| \cos(\arg(\mathcal{R}))}}. \quad (1.17)$$

### 1.2.2 Entgegengesetzt orientierte Kreisschwingungen

Elliptische harmonische Schwingungen sind solche der Form

$$\boxed{z(t) = e^{i\delta} (a \cos(\omega t + \varphi) + i b \sin(\omega t + \varphi))}. \quad (1.18)$$



Sie ergeben sich bei Überlagerung **gegenläufiger** gleichförmiger Kreisbewegungen gleicher Umlaufzeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\begin{aligned} & A_+ e^{i(\omega t + \varphi_+)} + A_- e^{i(\omega t + \varphi_-)} \\ &= e^{i\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}} \left( A_+ e^{i\left(\omega t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right)} + A_- e^{-i\left(\omega t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right)} \right) \\ &= e^{i\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}} \left( (A_+ + A_-) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) + i(A_+ - A_-) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \right) \\ &= (1.18) \text{ mit:} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = A_+ + A_-, \quad b = A_+ - A_-, \quad \delta = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}, \quad \varphi = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}}. \quad (1.19)$$

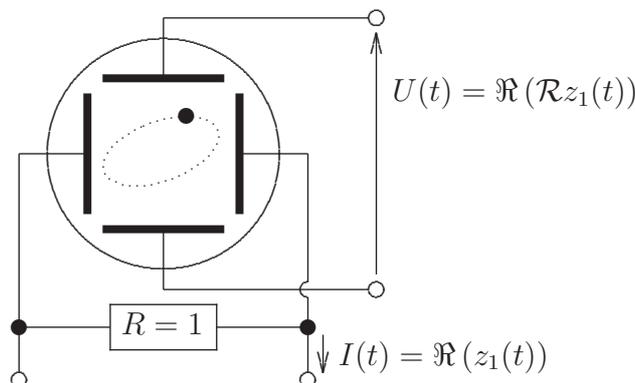
### 1.2.3 Orthogonale lineare Schwingungen

Durch Überlagerung orthogonaler linearer Schwingungen entstehen ebenfalls elliptische Schwingungen:

$$\begin{aligned} & \Re(z_1(t)) + i\Re(\mathcal{R}z_1(t)) \\ & \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1+i\mathcal{R}}{2} z_1(t) + \frac{1+\overline{\mathcal{R}}}{2} \overline{z_1(t)} \\ &= \text{Überlagerung zweier gegenläufiger Kreisschwingungen} \\ &= \text{elliptische Schwingung (nach 1.2.2)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Die Bahnellipse ist also bis auf einen Maßstabsfaktor  $|z_1|$  durch  $\mathcal{R}$  bestimmt.

Daher läßt sich ein komplexer Widerstand auf einem Oszillographen leicht sichtbar machen (*Würzlausverfahren*, relativ ungenau):



**Übungsaufgabe 6** Man zeige, daß sich (1.20) in die Form (1.18) mit

$$\boxed{\frac{1 - i\mathcal{R}}{1 + i\mathcal{R}} = e^{-i2\delta} \frac{a - b}{a + b}} \quad (1.21)$$

bringen läßt (Auswertung entspr. Übungsaufgabe 14)

## 1.3 Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen

### 1.3.1 Zwei beliebige Frequenzen

Die Überlagerung zweier linearer harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzbeträge ist i.a. **keine** harmonische Schwingung mehr.

**Übungsaufgabe 7** Man zeige, daß

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= (A + B) \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \cos(\omega_- t + \varphi_-) + (A - B) \sin(\omega_+ t + \varphi_+) \sin(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

mit

$$\omega_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{2}, \quad \varphi_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2}$$

gilt<sup>5</sup> (**kleiner Modulationssatz**) und diskutiere das Ergebnis (Schwebung!) für  $|\omega_1 - \omega_2| \ll |\omega_1 + \omega_2|$ ,  $|A - B| \ll |A + B|$ .

<sup>5</sup>Bzgl. der Übertragung auf fortschreitende ebene Wellen siehe z.B. (Reider, 1997, S. 10, Abb. 1.2).

### 1.3.2 Ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz

Die (komplexwertige) Funktion  $f(t)$  erfülle die 5 sog. **DIRICHLETschen Bedingungen**

- (i)  $f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f$  ist stückweise stetig.
- (iii)  $\Re(f)$  und  $\Im(f)$  sind stückweise monoton,
- (iv)  $f$  ist beschränkt,
- (v) §f§ stimmt an Sprungstellen mit dem Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert überein

Dann läßt sich zeigen (siehe Anhang B von (Lücke, ein)):

1. Es gilt die sog. **FOURIERSche Reihenentwicklung**

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{in\omega_0 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\
 \text{wobei: } c_n(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{+\pi/\omega_0} f(t') e^{-in\omega_0 t'} dt'.
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

2. Die Konvergenz in (1.22) ist gleichmäßig über jedem **abgeschlossenen** Stetigkeitsintervall von  $f$ .
3. Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{d}{dt} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} \frac{c_n(f)}{in\omega_0} e^{in\omega_0 t} \\
 &\text{an jeder Stetigkeitsstelle von } f.
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

4. Falls  $f$  insgesamt stetig und stückweise differenzierbar ist, gilt

$$c_n(f) = \frac{c_n(\dot{f})}{in\omega_0} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.
 \tag{1.24}$$

### 1.3.3 Beliebige Frequenzspektrum

Die (komplexwertige) Funktion  $f(t)$  erfülle die in 1.3.2 angegebenen DIRICHLETschen Bedingungen mit Ausnahme der Periodizitätsbedingung (i) und sei absolut integrierbar, d.h.:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} |f(t)| dt < \infty.$$

Dann läßt sich zeigen (siehe Anhang B von (Lücke, ein)), daß die sog. **FOURIER-Transformierte**

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.25)$$

existiert und die Bedingung

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt.

Die FOURIER-Transformation (1.25) ist ein gutes Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen.

Beispiel (1-dim. freie SCHRÖDINGER-Gleichung):

Statt der **partiellen** Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{1}{2m} \underbrace{\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2}_{\text{Impulsop.}} \Psi(x, t) \quad (1.27)$$

untersucht man (zunächst formal) die entsprechende Gleichung für die modifizierte FOURIER-Transformierte

$$\hat{\Psi}(p, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} \tilde{\Psi}\left(\frac{p}{\hbar}, t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar} px} dx \quad (1.28)$$

von  $\Psi(x, t)$  hinsichtlich der Variablen  $x$ . Aufgrund der Umkehrformel

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \hat{\Psi}(p, t) e^{+\frac{i}{\hbar} px} dp \quad (1.29)$$

ergibt sich dafür

$$0 = \int \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(p, t) - \frac{p^2}{2m} \hat{\Psi}(p, t) \right) e^{+\frac{i}{\hbar} px} dp$$

und somit (formaler Beweis als Übungsvorschlag) die (für jeweils festes  $p$ ) **gewöhnliche** Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\Psi}(p, t) = \frac{p^2}{2m} \hat{\Psi}(p, t).$$

Die Lösungen letzterer sind offensichtlich von der Form

$$\Psi(x, t) = \hat{\Psi}(p) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t}.$$

Somit sind die Lösungen von (1.27) gemäß (1.29) von der Form

$$\boxed{\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \hat{\Psi}(p) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m} t - px \right)}}_{\text{ebene Welle}} dp,} \quad (1.30)$$

wobei gemäß (1.28)

$$\boxed{\hat{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(y, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} px} dx} \quad (1.31)$$

gilt – was man in diesem einfachen Falle natürlich auch direkt hätte erraten können.

# Kapitel 2

## Grundzüge der Funktionentheorie

### 2.1 Holomorphe Funktionen und konforme Abbildungen in der Ebene

#### 2.1.1 Konforme Abbildungen und ihre Bedeutung

Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\mathcal{O} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

eines offenen Teilgebietes  $\mathcal{O}$  des  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^2$  nennt man (direkt) **konform**, falls eine Maßstabsfunktion  $\lambda(x, y) > 0$  und eine (modulo  $2\pi$  definierte) Winkelfunktion  $\varphi(x, y)$  existieren mit:<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \lambda(x(t), y(t)) \mathbb{D}_{\varphi(x(t), y(t))} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

für alle stetig differenzierbaren Bahnkurven  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  in  $\mathcal{O}$ ,

wobei  $\mathbb{D}_{\varphi}$  die Drehung der  $x$ - $y$ -Ebene im entgegenges. Uhrzeigersinn um den Winkel  $\varphi$  bezeichnet.

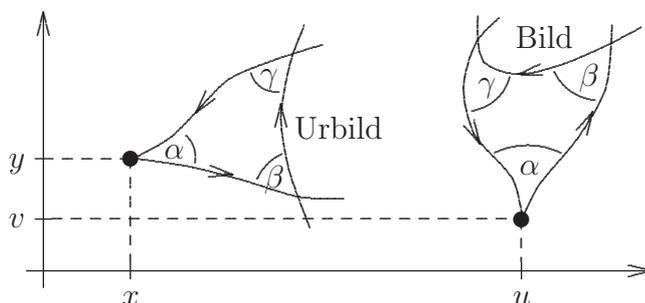
(2.2)

**Übungsaufgabe 8** Man zeige:

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Aus (2.2) folgt insbesondere, daß  $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u & \frac{\partial}{\partial y} u \\ \frac{\partial}{\partial x} v & \frac{\partial}{\partial y} v \end{pmatrix}$  das Vielfache einer Drehmatrix, also antisymmetrisch und orthogonal ist. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zur Gültigkeit der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (2.19).

1. Die stetig differenzierbare Abbildung (2.1) ist genau dann konform, wenn sie **winkeltreu** ist, d.h. falls die Beträge der Schnittwinkel zwischen glatten Kurven sowie die Orientierung geschlossener Wege unter der Abbildung erhalten bleiben:



2. Falls die stetig differenzierbare Abbildung (2.1) konform ist, kann  $\left\| \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right\|$  in  $\mathcal{O}$  kein Maximum annehmen.  
(siehe auch (2.36))
3. Die Komposition konformer Abbildungen ist konform.  
(siehe auch (2.14))
4. Konforme Abbildungen sind **lokal** umkehrbar und die lokalen Umkehrabbildungen sind ebenfalls konform.  
(siehe auch (2.16))
5. Wenn (2.1) konform ist, so auch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, -y) \\ -v(x, -y) \end{pmatrix}$$

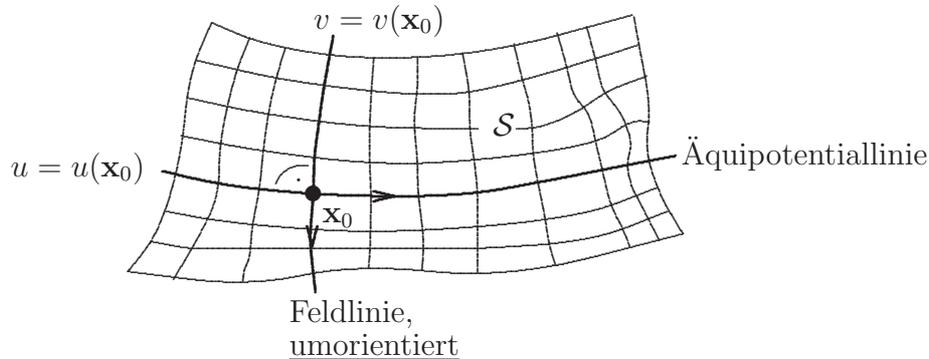
des an der  $x$ -Achse gespiegelten Gebietes  $\mathcal{O}$  in den  $\mathbb{R}^2$ .  
(siehe auch (2.18))

Global (also über ganz  $\mathcal{O}$ ) umkehrbare konforme Abbildungen eignen sich ausgezeichnet zur Konstruktion orthogonaler, ebener Koordinatensysteme aus bereits vorgegebenen (vgl. hierzu (Moon und Spencer, 1961)).

Umgekehrt sieht man leicht (Beweis als Übungsvorschlag), daß die stetig differenzierbare Abbildung (2.1) winkeltreu ist, falls sie mindestens ein orthogonales, ebenes Koordinatensystem wieder auf ein solches gleicher Orientierung abbildet und die damit verbundene lokale Längenänderung (Stauchung oder Streckung) für beide Koordinatenlinien, die jeweils durch einen Punkt gehen, gleich ist.

|| Daher lassen sich unterschiedliche Situationen (gewissen Typs) der ebenen Elektrostatik im ladungsfreien Gebiet konform aufeinander abbilden:

Sei  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück im ladungsfreien Gebiet eines **ebenen** elektrostatischen Problems, das von Äquipotential- und elektrostatischen Feldlinien begrenzt werde. Dann liefern Äquipotentiallinien ( $u = \text{konst.}$ ) und elektrische Feldlinien ( $v = \text{konst.}$ ) insgesamt eine natürliche Koordinatisierung von  $\mathcal{S}$  :



**Vereinbarung:** Wir identifizieren gelegentlich  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  stillschweigend mit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  bzw.  $z = x + iy$ .

Sei  $u(\mathbf{x})$  das elektrostatische Potential. Wegen

$$\Delta u = 0 \iff \text{rot} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} u \\ +\frac{\partial}{\partial x} u \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

und  $\Delta u = 0$  (ladungsfreies Gebiet!) ist

$$v(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} v(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (i \text{grad } u(x)) \cdot d\mathbf{x}', \tag{2.4}$$

wobei  $i$  die Drehung der  $x$ - $y$ -Ebene um  $90^\circ$  im entgegengesetzten Uhrzeigersinn bezeichnet, von der speziellen Wahl des Weges innerhalb  $\mathcal{S}$  von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}$  unabhängig.<sup>2</sup> Es ist evident, daß  $(u, v)$  ein **rechtshändiges, orthogonales** Koordinatensystem von  $\mathcal{S}$  liefert, **wenn** innerhalb  $\mathcal{S}$   $\text{grad } u \neq 0$  (fast überall) gilt. Außerdem ist die

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Man beachte, daß diese Definition von  $v$  die Gültigkeit der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (2.19) garantiert und dadurch – bei gegebenem  $u$  – bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt ist.

‘Liniendichte’ von  $u = \text{konst.}$ -Linien und  $v = \text{konst.}$ -Linien gleich:

$$\begin{aligned} & \text{Richtungsableitung von } u \text{ längs } v = \text{konst.}\text{-Linie} \\ &= \frac{\text{grad } u}{\|\text{grad } u\|} \cdot \text{grad } u \quad (= \|\text{grad } u\|) \\ &= \frac{i \text{ grad } u}{\|i \text{ grad } u\|} \cdot i \text{ grad } u \\ &= \frac{\text{grad } v}{\|\text{grad } v\|} \cdot \text{grad } v \\ & \text{Richtungsableitung von } v \text{ längs } u = \text{konst.}\text{-Linie.} \end{aligned}$$

Wenn also zwei entsprechende elektrostatische Situationen gegeben sind mit

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ v_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_2(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_2 \right\}$$

und

$$\text{grad } u_j \neq 0 \text{ in } \mathcal{S}_j \text{ für } j = 1, 2,$$

so existiert eine umkehrbare konforme Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}(x, y) \\ \tilde{v}(x, y) \end{pmatrix}$$

von  $\mathcal{S}_2$  auf  $\mathcal{S}_1$  mit;

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_2(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\tilde{u}(\mathbf{x}), \tilde{v}(\mathbf{x})) \\ v_1(\tilde{u}(\mathbf{x}), \tilde{v}(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_2.} \quad (2.5)$$

**Übungsaufgabe 9** Man interpretiere die  $v$ -Koordinate physikalisch.

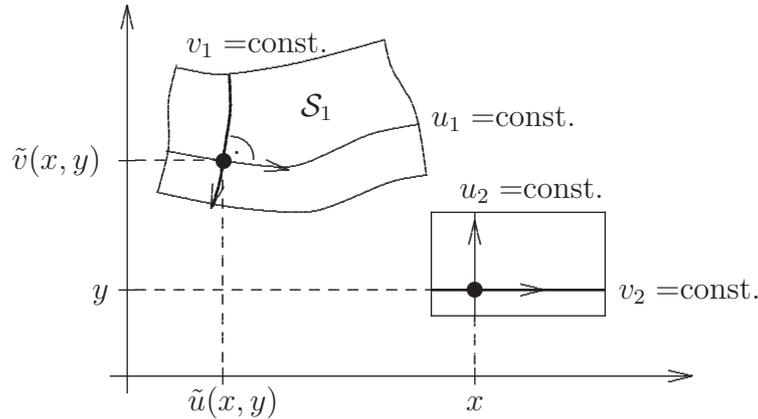
Die einfachste Situation o.a. Art ist die des homogenen Feldes:

$$\mathbf{E}_2 = -\text{grad } u_2 = \text{konst.} \neq 0.$$

Falls  $\mathbf{E}_2$  in Richtung der negativen  $x$ -Achse zeigt und  $\|\mathbf{E}_2\| = 1$  ist, fallen (bei geeigneter Wahl von  $\mathbf{x}_0$ ,  $u_2(\mathbf{x}_0)$ ,  $v_2(\mathbf{x}_0)$ )  $u_2$ ,  $v_2$  mit den kartesischen  $x$ ,  $y$ -Koordinaten zusammen:<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} u_2(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Wir arbeiten nur mit Maßzahlen bzgl. fest vorgebener physikalischer Einheiten.



Damit wird (2.5) zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\tilde{u}(\mathbf{x}), \tilde{v}(\mathbf{x})) \\ v_1(\tilde{u}(\mathbf{x}), \tilde{v}(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_2.$$

Somit ist die Abbildung

$$\boxed{\mathcal{S}_1 \ni \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v_1(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2 \quad \text{konform,}} \quad (2.6)$$

da sie die Umkehrabbildung von  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$  ist.

**Übungsaufgabe 10** Man zeige durch geometrische Betrachtungen:

1. Die dem Übergang vom komplexen Widerstand  $\mathcal{R}$  zum komplexen Leitwert  $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} 1/\mathcal{R}$  entsprechende Abbildung von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  in sich

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\left(\frac{1}{x+iy}\right) \\ \Im\left(\frac{1}{x+iy}\right) \end{pmatrix} \quad \text{ist konform.}} \quad (2.7)$$

(vgl. auch (2.15))

2. Dagegen ist die alleinige Spiegelung an der  $x$ -Achse

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{nicht konform.}} \quad (2.8)$$

**Übungsaufgabe 11** Man bestimme die Bilder der Kurven mit

- a)  $\Re(\mathcal{R}) = \text{konst.} > 0$

b)  $\Im(\mathcal{R}) = \text{konst.}, \Re(\mathcal{R}) > 0$

unter der Abbildung  $\mathcal{R} \mapsto 1/\mathcal{R}$ .

**Übungsaufgabe 12** Man zeige (2.2) für die Abbildung (2.6) durch **direkte** Rechnung unter Beachtung von (2.4).

## 2.1.2 Holomorphe Funktionen

In komplexer Schreibweise lautet (2.2) (vgl. auch (2.17))

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = \mathcal{R}(z(t)) \frac{d}{dt}z(t), \quad (2.9)$$

mit:

$$\begin{aligned} z(t) &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) + i y(t), \\ f(z) &\stackrel{\text{def}}{=} u(x, y) + i v(x, y), \\ \mathcal{R}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda(x, y) e^{i\varphi(x, y)}. \end{aligned}$$

In **Kurzschrift**:

$$df = \mathcal{R} dz.$$

Die (eindeutige) komplexwertige Funktion  $f(z)$  über  $\mathcal{O}$  (jetzt auch als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  aufgefaßt) entspricht also genau dann (exakter Beweis als Übungsvorschlag) einer konformen Abbildung (2.1), wenn die sog. **komplexe Ableitung**

$$f'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz}f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta z \neq 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.10)$$

für  $z \in \mathcal{O}$  existiert und stetig, sowie von Null verschieden ist.

**Erläuterungen:**

1. Natürlich ist  $f'(z) = \mathcal{R}(z)$ .
2. Der Konvergenzbegriff für komplexe Zahlenfolgen entspricht demjenigen für Vektorfolgen.
3. Die Stetigkeit von Abbildungen der komplexen Zahlenebene in sich entspricht derjenigen von Vektorfeldern über dem  $\mathbb{R}^2$ .

Man nennt  $f(z)$  **holomorph** an der Stelle  $z_0$ , falls die Ableitung (2.10) in einer Umgebung von  $z_0$  existiert und stetig,<sup>4</sup> aber nicht unbedingt von Null verschieden ist.

<sup>4</sup>Die Stetigkeit von  $f'(z)$  ist automatisch gegeben (Satz von GOURSAT).

### Übungsaufgabe 13

a) Man zeige die Gültigkeit der üblichen Differentiationsregeln:

**Linearität:**

$$\frac{d}{dz} (\mathcal{R}_1 f_1(z) + \mathcal{R}_2 f_2(z)) = \mathcal{R}_1 f_1'(z) + \mathcal{R}_2 f_2'(z), \quad (2.11)$$

**Produktregel:**

$$\frac{d}{dz} (f_1(z) f_2(z)) = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z), \quad (2.12)$$

$$(z^n)' = n z^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

**Kettenregel:**

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = g'(z) f'(g(z)), \quad (2.14)$$

**Quotientenregel:**

$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dz} f^{-1}(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = \dot{z}(t) f'(z(t)), \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dz} \overline{f(z)} = \overline{f'(z)}. \quad (2.18)$$

Dabei werden die Ausdrücke, die rechts auftauchen, jeweils als existent vorausgesetzt. Die Existenz der Ableitung links wird jeweils behauptet.

b) Man interpretiere (2.14), (2.16) und (2.17) geometrisch für den Fall, daß  $f$  und  $g$  konformen Abbildungen entsprechen.

**Übungsaufgabe 14** Man zeige, daß die spezielle MÖBIUS-Abbildung<sup>5</sup>

$$z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$$

von  $\{z \in \mathbb{C} : z \neq -1\}$  in  $\mathbb{C}$  konform und zu sich selbst invers ist und bestimme die Bilder der Kurven mit

<sup>5</sup>Diese Abbildung entspricht (1.21) mit  $z = i\mathcal{R}$ .

a)  $\Re(z) = \text{konst.} > 0$

b)  $\Im(z) = \text{konst.}$  und  $\Re(z) > 0$

unter dieser Abbildung.

Die Existenz der komplexen Ableitung (2.10) von

$$f(x + iy) = \underbrace{u(x, y)}_{\text{reell}} + i \underbrace{v(x, y)}_{\text{reell}}$$

verlangt insbesondere

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x \neq 0}} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = f'(z) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta y \neq 0}} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y},$$

d.h.:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = -i \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy).$$

Letzteres ist äquivalent zur Gültigkeit der sog. **CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x, y).} \quad (2.19)$$

Umgekehrt folgt aus (2.19), **sofern** die partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  stetig sind, für glatte Bahnkurven  $z(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(z(t)) &\hat{=} \left( \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) \right) = \begin{pmatrix} \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} u + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} u \\ \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} v + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} v \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \begin{pmatrix} \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} u - \dot{y} \frac{\partial}{\partial x} v \\ \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} v + \dot{y} \frac{\partial}{\partial x} u \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial x} v \end{pmatrix}}_{=\Re(z)} \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{=\dot{z}} \end{aligned}$$

(vgl. (2.9)) und somit die Existenz der **komplexen** Ableitung (2.10).

$f(z)$  ist also genau dann holomorph in dem offenen Gebiet  $\mathcal{O}$ , wenn  $f(x + iy)$  dort **stetige** partielle Ableitungen nach  $x$  und  $y$  besitzt, die den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (2.19) genügen.

**Übungsaufgabe 15** Man zeige:

a) (2.19) ist äquivalent dazu, daß das Vektorfeld

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\Re(f(x+iy)) \\ +\Im(f(x+iy)) \end{pmatrix} \hat{=} -\overline{f(z)} \quad (2.20)$$

rotations- und divergenzfrei ist.

b) Jede Stammfunktion  $F(z)$  von  $f(z)$  ist ein komplexes Potential von  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ , d.h.:

$$F'(z) = f(z) \implies \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Re(F(x+iy)). \quad (2.21)$$

Man sieht z.B. leicht (Beweis als Übungsvorschlag):

$$-2 \ln z = \text{komplexes Potential des ebenen Einheits-Monopols (eigentl. Linienladung) im Ursprung.} \quad (2.22)$$

**Anmerkung:**  $\ln z$  ist als Umkehrfunktion von  $\exp(z)$  natürlich nur lokal für  $z \neq 0$  definiert.

**Übungsaufgabe 16** Man zeige, daß der Grenzübergang zum idealen ebenen Einheits-Dipol in positiver  $x$ -Richtung genau der komplexen Ableitung des komplexen Monopol-Potentials entspricht, und diskutiere den Feldlinienverlauf entsprechend Übungsaufgabe 11.

Sei  $f(z)$  holomorph in dem offenen Gebiet  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Wegen

$$(2.19) \iff \text{rot} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rot} \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

existieren dann für jedes einfache ebene Flächenstück  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  eine offene Umgebung  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{S}$  sowie Potentialfunktionen  $\Phi(x,y)$ ,  $\Psi(x,y)$  mit:

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{grad } \Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x+iy \in \mathcal{N}.$$

Somit erfüllt

$$F(x+iy) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

in dieser Umgebung die CAUCHY-RIEMANSCHEN Differentialgleichungen und ist eine Stammfunktion von  $f$  :

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathcal{N}.$$

Resultat:

Wenn  $f(z)$  in einer Umgebung des einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  holomorph ist, dann besitzt  $f(z)$  in  $\mathcal{S}$  eine Stammfunktion.

(2.24)

### 2.1.3 Komplexe Wegintegrale

Sei  $F(z)$  in einer Umgebung des einfachen Wegstücks  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : t_1 \leq t \leq t_2 \right\}$  holomorph. Dann folgt aus dem Integralsatz der geöhnlichen Integralrechnung (auf  $\Re(F)$  und  $\Im(F)$  getrennt angewandt):

$$\begin{aligned} F(z(t_2)) - F(z(t_1)) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(x(t) + iy(t)) dt \\ &\stackrel{(2.17)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{F'(x(t) + iy(t))}_{=z(t)} \underbrace{(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))}_{=\dot{z}(t)} dt. \end{aligned}$$

Mit der üblichen (von der Wahl der speziellen Parametrisierung unabhängigen) Definition

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

folgt daraus der entsprechende Fundamentalsatz der komplexen Integration:

$$\int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

(2.25)

**falls**  $F(z)$  in einer Umgebung des stückweise glatten, stetigen Weges  $\mathcal{C}$  mit Anfangspunkt  $z_1$  und Endpunkt  $z_2$  **holomorph** ist.

**Warnung:**

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz \text{ stimmt i.a. } \mathbf{nicht} \text{ mit } \int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} \Re(f(x, y)) \\ \Im(f(x, y)) \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ überein!}$$

**Übungsaufgabe 17** Man zeige, daß für das Feld (2.20) gilt:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = -\Re \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.} \quad (2.26)$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot (i^{-1} d\mathbf{x}) = -\Im \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.} \quad (2.27)$$

Sei  $f(z)$  in einer Umgebung des einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  holomorph. Aufgrund der nachgewiesenen Existenz der komplexen Stammfunktion folgt dann aus (2.25) unmittelbar der sog. **CAUCHYsche Integralsatz**:<sup>6</sup>

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \text{ für jeden geschlossenen, stückweise glatten, stetigen Weg } \mathcal{C} \subset \mathcal{S}.} \quad (2.28)$$

**Übungsaufgabe 18** Man beweise (2.28) im reellen Vektorfeldformalismus – ohne Verwendung der komplexen Stammfunktion – mithilfe der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (beachte (2.23)) und des Satzes von STOKES.

(2.28) spielt häufig eine wichtige Rolle bei der Berechnung bestimmter Integrale.

Beispiel (GAUSSSches Wellenpaket):

Die Lösung der 1-dim. freien SCHRÖDINGER-Gleichung (1.27) zum Anfangswert

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad a > 0,$$

ist nach (1.30)/(1.28) gegeben durch

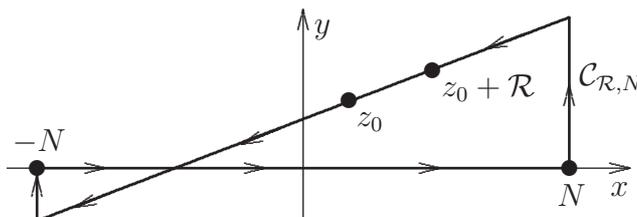
$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \hat{\Psi}(p) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m} t - px \right)} dp \quad (2.29)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} px} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\hbar a}} \int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2a}} + i\frac{p\sqrt{2a}}{2\hbar}\right)^2} e^{-2a\left(\frac{p}{2\hbar}\right)^2} dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Mithilfe des CAUCHYschen Integralsatzes läßt sich die Berechnung dieser Integrale zurückführen auf das sog. **LANDAU-Integral**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)} = \sqrt{\int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r e^{-r^2} dr d\varphi} = \sqrt{\pi}.$$

Abb. 2.1: Die geschlossenen Wege  $\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}$  (für  $\Re(\mathcal{R}) > 0 < \Im(\mathcal{R})$ )

Denn für die geschlossenen Wege  $\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}$  gemäß Abb. 2.1 sieht man leicht, daß

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{R},N}} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}x+z_0)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{R}} \quad (2.31)$$

für alle  $\mathcal{R}, z_0 \in \mathbb{C}$  mit:  $\Re(\mathcal{R}^2) > 0 < \Re(\mathcal{R})$ .

gilt. Mit (2.30) folgt hieraus

$$\hat{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-2a\left(\frac{p}{2\hbar}\right)^2}$$

und somit schließlich

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Psi(x,t)}} & \stackrel{(2.29)}{=} \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-2a\left(\frac{p}{2\hbar}\right)^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}t - px\right)} dp \\ & = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\left(\frac{\sqrt{2a+i2\hbar t/m}}{2\hbar}p - \frac{ix}{\sqrt{2a+i2\hbar t/m}}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{2a+i2\hbar t/m}} dp \\ & \stackrel{(2.31)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2a+i2\hbar t/m}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a+i2\hbar t/m}\right)}}, \end{aligned}$$

wobei nach (2.31) die Wurzel mit positivem Realteil zu nehmen ist.

**Übungsaufgabe 19** Man diskutiere das Ergebnis für Lösungen von (1.27) der Form

$$\Phi(x,t) = \int f(x') \Psi(x-x',t) dx'$$

im Grenzfall  $a \rightarrow 0$ .

Nach Übungsaufgabe 17 gilt

$$-\int_C f(z) dz = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + i \int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot (i^{-1} d\mathbf{x})$$

für

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\Re(f(x+iy)) \\ +\Im(f(x+iy)) \end{pmatrix},$$

sowie nach (2.21)

$$F'(z) = f(z) \implies \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Re(F(x+iy)).$$

Da  $F(z) = -2 \ln z$  nach (2.22) ein komplexes Potential des ebenen Einheits-Monopols ist, folgt somit für ein positiv orientiertes einfaches Flächenstück  $\mathcal{S}$ , das eine Umgebung des Ursprungs enthält:<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{S}} \frac{1}{z} dz &= \frac{-1}{4\pi i} \int_{\partial \mathcal{S}} \frac{d}{dz} (-2 \ln z) dz \\ &= \frac{+1}{4\pi i} \underbrace{\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{E}_{\text{Monop.}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}}_{=\text{Umlaufspannung}=0} + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{E}_{\text{Monop.}}(\mathbf{x}) \cdot i^{-1} d\mathbf{x}}_{\text{Gesamtladung innerhalb } \mathcal{S} \text{ (pro Längeneinheit)}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das ist kein Widerspruch zu (2.25), da  $\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$  **keine einwertige** Stammfunktion von  $1/z$  ist, sondern bei einem Umlauf um den Ursprung den Wert um  $i2\pi$  ändert. Dagegen besitzt  $z^{-2}$  die für  $z \neq 0$  holomorphe (insbesondere also einwertige) Stammfunktion  $-z^{-1}$ , weshalb nach (2.25)

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

gilt ((2.28) ist dagegen **nicht** anwendbar).

### Übungsaufgabe 20

a) Man überzeuge sich von

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_1(z_0)} (z - z_0)^{-n} dz = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für beliebiges  $n \in \mathbb{Z}_+$  durch explizite Berechnung des Wegintegrals – ohne Verwendung der Stammfunktion – in Polarkoordinaten (siehe auch (2.34)).

b) Man gebe eine entsprechende elektrostatische Interpretation für den Fall  $n = 2$  gemäß Übungsaufgabe 16.

<sup>7</sup>Im GAUSSschen Maßsystem gilt  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ .

Seien  $\mathcal{S}$  ein **positiv orientiertes**, einfaches Flächenstück,  $z_0 \in \underline{\mathcal{S}}$  und  $f(z)$  eine auf ganz  $\mathcal{S}$  stetige Funktion, die im Inneren von  $\mathcal{S} \setminus \{z_0\}$  holomorph ist. Dann gilt für hinreichend kleines  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz & \stackrel{(2.28)}{=} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ & = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{f(z(t))}{z(t) - z_0} \dot{z}(t) dt, \\ & \quad \text{wobei } z(t) \stackrel{\text{def}}{=} z_0 + r e^{i\omega t} \text{ mit } 0 < \omega \text{ bel.}, \\ & \stackrel{\omega=1}{=} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \\ & \stackrel{\text{Mittelw.-S.}}{=} 2\pi i f(z_0 + r e^{it'}) \quad \text{für geeign. } t' \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Für  $r \rightarrow 0$  ergibt sich daraus die sog. **CAUCHYsche Integralformel**:<sup>8</sup>

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in \underline{\mathcal{S}}, \text{ falls } \mathcal{S} \text{ positiv orientiert ist.}} \quad (2.32)$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $(z - z_0)^{-n}$  für  $z \neq z_0$  (siehe (2.13)) erkennt man fast unmittelbar:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Es existiert} \\ \left(\frac{d}{dz_0}\right)^n \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = n! \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z_0 \in \underline{\mathcal{S}}, \\ \text{falls } g(z) \text{ auf } \partial\mathcal{S} \text{ stetig ist.} \end{array}} \quad (2.33)$$

Mit (2.32) folgt daraus für obiges  $f(z)$  die Existenz der komplexen Ableitung beliebiger Ordnung:

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z)|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z_0 \in \underline{\mathcal{S}}, n \in \mathbb{N}.} \quad (2.34)$$

Insbesondere gilt also:

$$\boxed{f(z) \text{ holomorph in } \underline{\mathcal{S}} \implies f(z) \text{ beliebig oft differenzierbar in } \underline{\mathcal{S}}.} \quad (2.35)$$

**Übungsaufgabe 21** Man zeige, daß jedes stetig differenzierbare elektrostatische Feld  $\mathbf{E}(x, y)$  eines ebenen elektrostatischen Problems im ladungsfreien Gebiet **beliebig oft** differenzierbar ist.

<sup>8</sup>Bzgl. einer Verallgemeinerung für nicht holonome Funktionen siehe (Hörmander, 1967, Theorem 1.2.1).

**Übungsaufgabe 22** Man beweise mithilfe der CAUCHYSchen Integralformel (2.28) das sog. *Maximumsprinzip*<sup>9</sup>

$$\sup_{z \in \mathcal{S}} |f(z)| = |f(\hat{z})| \quad \text{für geeignetes } \hat{z} \in \partial \mathcal{S},$$

**falls**  $f(z)$  in einer Umgebung des einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  holomorph ist.

(2.36)

(Vgl. mit der 2. Aussage von Übungsaufgabe 8.)

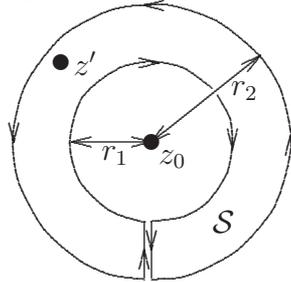
### 2.1.4 Potenzreihenentwicklungen

Sei  $f(z)$  holomorph in einer Umgebung von

$$\mathcal{S} = \overline{U_{r_2}(z_0)} \setminus U_{r_1}(z_0),$$

und sei  $z' \in \underline{\mathcal{S}}$ . Dann folgt mit (2.32):

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial U_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{z - z'} dz - \int_{\partial U_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{z - z'} dz \right).$$



Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z'} &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad \forall z \in \partial U_{r_2}(z_0) \end{aligned}$$

und, entsprechend,

$$\frac{1}{z - z'} = \frac{-1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n \quad \forall z \in \partial U_{r_1}(z_0)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Hinweis: Man zeige zunächst, daß

$$(|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in \partial U_r(z_0)) \implies (|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in \partial U_r(z_0))$$

für  $\overline{U_r(z_0)} \subset \underline{\mathcal{S}}$  gilt.

folgt daraus mit (2.28) sofort die sog. LAURENT-**Entwicklung**<sup>10</sup> von  $f(z)$  an der Stelle  $z_0$  :

$$f(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z' - z_0)^n \quad \text{absolut konvergent,}$$

**falls**  $f(z)$  in einer Umgebung von  $\overline{U_{|z'|}(z_0)} \setminus U_r(z_0)$  bzw.  $\overline{U_r(z_0)} \setminus U_{|z'|}(z_0)$  holomorph ist, wobei:<sup>11</sup>

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$
(2.37)

Für den Fall, daß  $f(z)$  auch in  $U_{|z'|}(z_0)$  holomorph ist, ergibt sich hieraus mit (2.28), (2.32) und (2.34) die sog. TAYLOR-**Entwicklung** von  $f(z)$  an der Stelle  $z_0$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{absolut konvergent,}$$

**falls**  $f(z)$  in einer Umgebung von  $\overline{U_{|z|}(z_0)}$  holomorph ist.

(2.38)

**Anmerkung:** Für holomorphe Funktionen ist also die Nullkonvergenz der Restgliedfolge der TAYLOR-Entwicklung automatisch gegeben.

Z.B. erfüllt  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$  überall die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (2.19), ist also eine **ganze analytische Funktion**, d.h. in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph. Daher ist die TAYLOR-Entwicklung von  $e^z$  an der Stelle  $z = 0$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ absolut konvergent,}$$
(2.39)

denn es existiert

$$\left( \left( \frac{d}{dz} \right)^n e^z \right)_{|z=0} = \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n e^{x+iy} \right)_{|x=y=0} = 1$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Man beachte, daß die (2.37) für  $z_0 = 0$  und  $|z'| = \text{const.}$  einer FOURIERSchen Reihenentwicklung in  $\arg(z')$  entspricht.

<sup>11</sup>Zunächst wäre über  $\partial U_{r_1}(z_0)$  bzw.  $\partial U_{r_2}(z_0)$  zu integrieren. Nach (2.28) liefert das aber das gleiche Ergebnis wie die Integration über  $\partial U_r(z_0)$ .

**Übungsaufgabe 23** man zeige, daß

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad \text{für } |z-1| < 1 \text{ absolut konvergent}$$

ist.

**Übungsaufgabe 24** Man beweise den **Residuensatz**:

Seien  $a_1, \dots, a_N$  innere Punkte des einfachen Flächenstücks  $\mathcal{S}$  und sei  $f(z)$  in einer Umgebung von  $\mathcal{S} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$  holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial \mathcal{S}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^N \operatorname{Res}(f(z))|_{z=a_\nu},$$

wobei

$$\operatorname{Res}(f(z))|_{z=a_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a_\nu)} f(z) dz$$

jeweils das **Residuum** von  $f$  an der Stelle  $z = a_\nu$  bezeichnet und mit dem Koeffizienten  $c_{-1}$  der LAURENT-Entwicklung von  $f$  an dieser Stelle übereinstimmt.

Aus der TAYLOR-Entwicklung folgt das **Prinzip der analytischen Fortsetzung**:

Seien  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  in einer Umgebung des einfachen Wegstücks  $\mathcal{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\boxed{(f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset) \implies (f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \mathcal{C})}$$

für jedes offene Gebiet  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ .

**Beweisskizze:** Es existiert eine Überdeckung von  $\mathcal{C}$  durch eine Folge von Kreisflächen, die folgende Bedingung erfüllen:

- (i) Der Mittelpunkt jedes Kreises liegt innerhalb des nächsten Nachbarkreises.
- (ii)  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  sind im Inneren jedes Kreises holomorph.
- (iii) Einer der Kreise liegt in  $\mathcal{O}$  und hat seinen Mittelpunkt auf  $\mathcal{C}$ .

innerhalb des durch (iii) charakterisierten Kreises besitzen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  die gleiche TAYLOR-Entwicklung und daher nach (i) und (ii) auch innerhalb aller übrigen Kreise. ■

**Übungsaufgabe 25** Man beweise den sog. *Monodromiesatz*:

Sei  $\mathcal{S}$  ein einfaches Flächenstück und sei  $f(z)$  in einer Umgebung von  $z_0 \in \underline{\mathcal{S}}$  holomorph. Zu jedem einfachen Wegstück  $\mathcal{C} \subset \underline{\mathcal{S}}$  mit Anfangspunkt  $z_0$  existiere eine in einer Umgebung von  $\mathcal{C}$  holomorphe Funktion, die in einer Umgebung von  $z_0$  mit  $f(z)$  übereinstimme. Dann existiert genau eine in ganz  $\underline{\mathcal{S}}$  holomorphe Funktion, die in einer Umgebung von  $z_0$  mit  $f(z)$  übereinstimmt.

**Übungsaufgabe 26** Man zeige, daß eine (nichttriviale, gutartige) *positiv frequente* Lösung

$$f(x, t) = \int \hat{f}(p) e^{-\frac{i}{\hbar}(c\sqrt{p^2+m^2c^2}t-px)} dp$$

der 1-dimensionalen KLEIN-GORDON-Gleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) f(x, t) = 0$$

die Bedingung

$$|x| > 1 + c|t| \implies f(x, t) = 0$$

zwar für  $t = 0$ , aber **nicht** für alle  $t$  erfüllen kann.<sup>12</sup>

## 2.2 Randwertprobleme der ebenen Elektrostatik

### 2.2.1 Das Grundproblem

Gegeben sei ein in 3-Richtung translationsinvariantes Gebiet, dessen orthogonaler Querschnitt (in der  $x$ - $y$ -Ebene) das (positiv orientierte) ‘gutartige’ Flächenstück  $\mathcal{S}$  sei. Im Inneren befinde sich (außer dem elektrostatischen Feld) lediglich eine bekannte, beliebig differenzierbare Ladungsverteilung  $\rho(x, y)$ . Den Rand des Gebietes

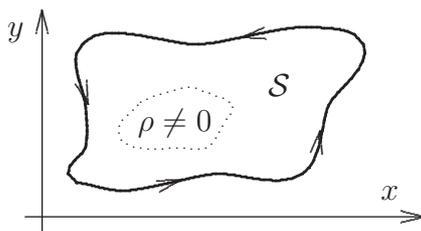
Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>Hinweis; Man zeige, daß **nicht**

$$f(x, 0) = \left( \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right)_{|t=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, +1]$$

gelten kann.

bilde die Oberfläche eines idealen Leiters.



Gesucht ist das elektrostatische Potential  $\Phi(x, y)$ , das (Normierung!) auf der Leiteroberfläche verschwindet. Mathematisch entspricht dem folgendes **Randwertproblem**:

Gesucht ist das stetige Skalarfeld  $\Phi(x, y)$  über  $\bar{\mathcal{S}}$ , das in  $\underline{\mathcal{S}}$  2-mal stetig differenzierbar ist, der POISSON-Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{S}}$$

(GAUSSsches Maßsystem) genügt und die DIRICHLETschen **Randbedingungen**

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}$$

erfüllt,

Die Lösung dieses Problems ist eindeutig, wie man sich leicht mithilfe des Maximumprinzips (2.36) klarmachen kann.

**Beweis:** Seien  $\Phi_1, \Phi_2$  zwei Lösungen des Problems. Dann ist

$$\Phi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)$$

Lösung zur trivialen Ladungsverteilung  $\rho = 0$ . erfüllt insbesondere also die LAPLACE-Gleichung in  $\bar{\mathcal{S}}$ . Somit ist  $\Phi(x, y)$  nach 2.1.1 Realteil des komplexen Potential

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

mit

$$\Psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \cdot i^{-1} d\mathbf{x},$$

wobei  $\mathbf{x}_0$  eine beliebiger, aber fest gewählter, Punkt aus  $\underline{\mathcal{S}}$  ist und die Integration längs eines beliebigen gutartigen Weges in  $\bar{\mathcal{S}}$  von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}$  auszuführen ist. Da  $F(x + iy)$  innerhalb  $\underline{\mathcal{S}}$  holomorph ist, gilt dasselbe gemäß Kettenregel (2.14) auch für

$$G_{\pm}(x + iy) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\pm F(x+iy)}.$$

Da der Realteil von  $F$  auf  $\partial\mathcal{S}$  verschwindet, gilt

$$|G_{\pm}(z)| = 1 \quad \forall z \in \partial\mathcal{S}.$$

Aufgrund des Maximumprinzips muß daher

$$\pm\Phi(z) \leq 0 \quad z \in \mathcal{S}$$

gelte, woraus die Behauptung folgt. ■

Mit  $\mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}})$  sei die Menge aller beliebig differenzierbaren Ladungsverteilungen  $\rho(x, y)$  bezeichnet, zu denen jeweils eine abgeschlossene (beschränkte) Teilmenge  $K$  von  $\underline{\mathcal{S}}$  existiert mit:

$$\rho(x, y) \neq 0 \implies (x, y) \in K.$$

Dann ist das DIRICHLETSche Randwertproblem zu  $\mathcal{S}$  für alle  $\rho \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}})$  gelöst, wenn man die sog. GREENSche **Funktion**  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$  dieses Problems gefunden hat, die durch folgende beiden Bedingungen charakterisiert ist:

$$(i) \quad \Delta_z G_{\mathcal{S}}(z, z') = -4\pi\delta(z - z') \quad \forall z, z' \in \underline{\mathcal{S}}.$$

Ausführlich: Für alle  $\rho \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}})$  ist

$$\Phi_{\rho}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int G_{\mathcal{S}}(z, z')(x + iy, x' + iy') \rho(x', y') dx' dy'$$

auf  $\bar{\mathcal{S}}$  stetig, in  $\underline{\mathcal{S}}$  2-mal stetig differenzierbar und erfüllt

$$\Delta\Phi_{\rho}(x, y) = -4\pi\rho(x, y) \quad \forall (x, y) \in \underline{\mathcal{S}}.$$

$$(ii) \quad G_{\mathcal{S}}(z, z') = 0 \quad \forall z \in \partial\mathcal{S}, z' \in \underline{\mathcal{S}}.$$

Ausführlich:

$$\Phi_{\rho}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}}), \mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}.$$

Bedingung (i) ist offensichtlich erfüllt, wenn  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$  von der Form

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\mathcal{S}}(z, z') &= H_{\mathcal{S}}(z, z') - 2 \ln |z - z'|, \\ H_{\mathcal{S}}(z, z') &\text{ hinreichend gutartig für } z, z' \in \bar{\mathcal{S}}, \\ \Delta_z H_{\mathcal{S}}(z, z') &= 0 \quad \forall z, z' \in \underline{\mathcal{S}} \end{aligned}} \quad (2.40)$$

ist, da

$$\Phi(x, y) = -2 \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

nach (2.22) jeweils ein elektrostatisches Potential des ebenen Einheitsmonopols bei  $z'$  ist, für das natürlich (i) erfüllt ist.

**Übungsaufgabe 27** man zeige, daß tatsächlich

$$\boxed{\Delta \int \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \rho(x', y') dx' dy' = 2\pi\rho(x, y) \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}}), \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{S}}}$$

(2.41)

gilt.

### 2.2.2 Bestimmung der GREENSchen Funktion durch konforme Abbildung und der RIEMANNsche Abbildungssatz

Betrachtet sei zunächst  $G_{U_1(0)}(z, 0)$ , d.h. das elektrostatische Potential des ebenen Monopols im Ursprung, das für  $|x + iy| = 1$  verschwindet.

**Anmerkung:** Ob  $\partial\mathcal{S}$  tatsächlich durch eine Leiteroberfläche realisiert ist, spielt für diesen Spezialfall keine Rolle.

Nach (2.22) gilt

$$G_{U_1(0)}(z, 0) = \Phi_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Re(-2 \ln z).$$

**Erinnerung** an die Konstruktion des komplexen Potentials:

Man wählt zunächst einen Normierungspunkt  $\mathbf{x}_0$  und legt die Normierungskonstanten  $\Phi_1(\mathbf{x}_0)$ ,  $\Psi_1(\mathbf{x}_0)$  (in 2.1.1 mit  $u(\mathbf{x}_0)$  und  $v(\mathbf{x}_0)$  bezeichnet) fest. Hier:

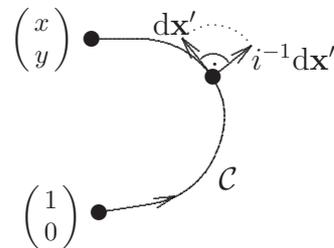
$$x_0 + iy_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \Phi_1(\mathbf{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(\mathbf{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Dann bestimmt man

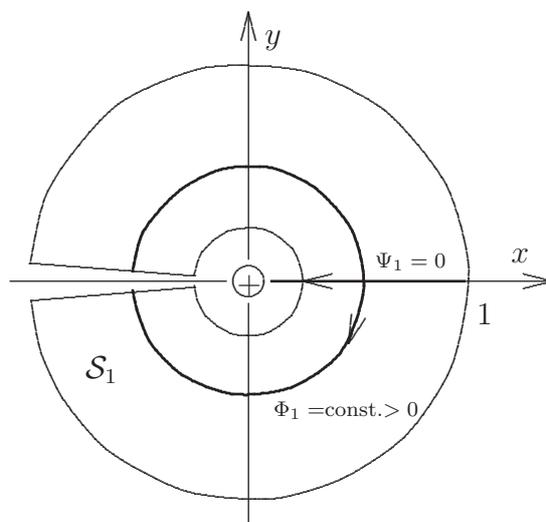
$$\Phi_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_1^{x+iy} \mathbf{E}_{\text{Monop.}}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}'$$

sowie entsprechend (2.4) lokal

$$\Psi_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_1^{x+iy} \mathbf{E}_{\text{Monop.}}(\mathbf{x}') \cdot i^{-1} d\mathbf{x}',$$



wobei die Integration längs eines Weges mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt  $x + iy$  innerhalb eines geeignet festgelegten Flächenstücks  $\mathcal{S}_1$  auszuführen ist:



Das Ergebnis ist das komplexe Potential

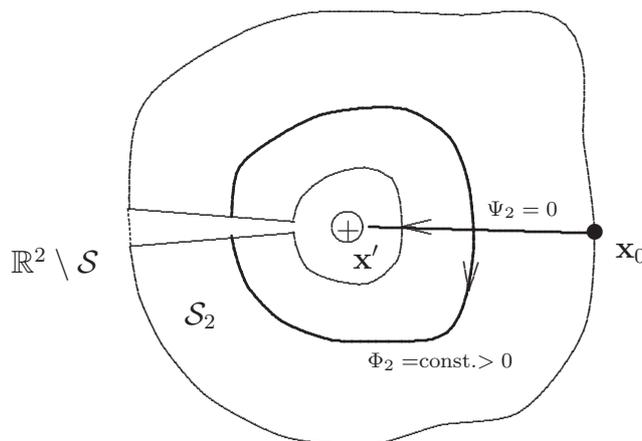
$$\begin{aligned} F_1(x + iy) &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1(x, y) + i\Psi_1(x, y) \\ &= -2 \ln |x + iy| - 2i \arg(x + iy) \\ &= -2 \ln(x + iy). \end{aligned}$$

Entsprechend könnte man im allgemeinen Fall vorgehen, wenn die elektrische Feldstärke bekannt wäre:

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} G_{\mathcal{S}}(z, z') = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}'') \cdot d\mathbf{x}'', \\ \Psi_2(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}'') \cdot i^{-1} d\mathbf{x}'', \end{aligned}$$

wobei nun  $\mathcal{S}, z' \in \underline{\mathcal{S}}$  und  $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathcal{S}$  fest gewählt sind und  $\mathbf{E}$  die Feldstärke für die Ladungsverteilung  $\rho(x, y) = \delta(x - x') \delta(y - y')$  innerhalb der Leiterröhre mit dem Querschnitt  $\mathcal{S}$  bezeichnet. Das  $\mathcal{S}_1$  entsprechende Flächenstück sei hier mit  $\mathcal{S}_2$

bezeichnet:



Falls  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  so gewählt sind, daß

$$\{\Phi_1(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_1\} = \{\Phi_2(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_2\} = [0, \Phi']$$

und

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_1\} = \{\Psi_2(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}_2\} = [-\Psi', +\Psi'] \subset (-2\pi, +2\pi)$$

gilt, dann existiert nach (2.5) genau eine umkehrbare konforme Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Re(\tilde{f}(x+iy)) \\ \Im(\tilde{f}(x+iy)) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

von  $\underline{\mathcal{S}}_2$  auf  $\underline{\mathcal{S}}_1$  mit

$$\begin{aligned} F_2(x+iy) &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_2(x+iy) + i\Psi_2(x+iy) \\ &= \Phi_1(\tilde{f}(x+iy)) + i\Psi_1(\tilde{f}(x+iy)) \\ &= -2 \ln(\tilde{f}(x+iy)) \quad \forall x+iy \in \underline{\mathcal{S}}_2. \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $\Phi' \rightarrow \infty, \Psi' \rightarrow 2\pi$  wird (2.42) zu einer umkehrbaren konformen Abbildung von  $\underline{\mathcal{S}} \setminus \{\mathbf{x}'\}$  in  $U_1(0) \setminus \{0\}$  und  $F_2(z)$  zu einem **mehrwertigen** komplexen Potential mit

$$F_2(z) = -2 \ln(\tilde{f}(z)) \text{ mod } 4\pi i \tag{2.43}$$

und

$$G_{\mathcal{S}}(z, z') = \Re(F_2(z)). \tag{2.44}$$

**Übungsaufgabe 28** Man beweise mithilfe der LAURENT-Entwicklung (2.37) den **Satz von RIEMANN**:

Seien  $\underline{\mathcal{S}}$  ein einfaches offenes Gebiet und  $z' \in \underline{\mathcal{S}}$ . Dann läßt sich jede in  $\underline{\mathcal{S}} \setminus \{z'\}$  holomorphe und **beschränkte** Funktion  $\tilde{f}(z)$  zu einer in ganz  $\underline{\mathcal{S}}$  holomorphen Funktion fortsetzen.

(vgl. auch Satz von LIOUVILLE, Übungsaufgabe 42)

Nach dem Satz von RIEMANN ist die konforme Abbildung (2.42) von  $\underline{\mathcal{S}} \setminus \{z'\}$  in  $U_1(0) \setminus \{0\}$  durch eine in ganz  $\underline{\mathcal{S}}$  holomorphe Funktion  $f(z)$  gegeben. Analog ist die Umkehrabbildung durch eine in ganz  $U_1(0)$  holomorphe Funktion  $\tilde{f}^{-1}(z)$  gegeben:

$$\tilde{f}(f^{-1}(z)) = z \quad \forall z \in U_1(0).$$

Nach (2.16) kann deshalb die komplexe Ableitung von  $\tilde{f}$  auch an der Stelle  $z'$  nicht verschwinden.

**Ergebnis:** Es sollte eine umkehrbare konforme Abbildung (2.42) von  $\underline{\mathcal{S}}$  in  $U_1(0)$  existieren, für die (2.44) mit (2.43) und

$$\tilde{f}(x' + iy') = 0, \quad (2.45)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{S}}}} \tilde{f}(x + iy) = 1 \quad (2.46)$$

gilt.

Sei nun (2.42) **irgendeine** umkehrbare konforme Abbildung von  $\underline{\mathcal{S}}$  in  $U_1(0)$ , für die (2.45) und (2.46) gelten. Dann erfüllt das gemäß (2.43) definierte (mehrwertige)  $F_2(z)$  die Normierungsbedingung

$$F_2(z_0) = 0 \pmod{4\pi i}$$

und das gemäß (2.44) definierte **einwertige**  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$  die an die GREENSche Funktion gestellte Randbedingung (ii):

$$G_{\mathcal{S}}(z, z') = 0 \quad \forall z \in \partial\mathcal{S}.$$

Da (2.42) konform ist, ist insbesondere  $\tilde{f}'(z') \neq 0$ . Somit zeigen (2.45) und die TAYLOR-Entwicklung von  $\tilde{f}$  an der Stelle  $z'$ , daß

$$\tilde{f}(z) = (z - z') \tilde{h}_{z'}(z)$$

und daher

$$-2 \ln(\tilde{f}(z)) = -2 \ln(z - z') - 2 \ln(\tilde{h}_{z'}(z))$$

in einer Umgebung von  $z'$  gilt, in der  $\tilde{h}_{z'}(z)$  holomorph und von Null verschieden ist. Da  $\tilde{f}$  umkehrbar, insbesondere also nach (2.45)  $\tilde{f}(z) \neq 0$  für  $z \neq z'$  ist, erkennt man daraus durch analytische Fortsetzung, daß  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$  tatsächlich von der Form (2.40) ist. Somit bestimmt die konforme Abbildung (2.42) mit (2.45) und (2.46) tatsächlich die GREENSche Funktion  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$ .

**Anmerkung:** Daß  $G_{\mathcal{S}}(z, z')$  durch die Randbedingung (ii) und durch (2.40) eindeutig bestimmt ist, folgt nach dem gleichen Argument wie die Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems zu gegebenem  $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ .

Das zugehörige komplexe Potential  $F_2(z)$  ist durch die (2.46) entsprechende Normierungsbedingung  $F(z_0) = 0 \bmod 4\pi i$  bis auf ein additives Vielfaches von  $4\pi i$  eindeutig festgelegt. Damit ist  $\tilde{f}$  durch (2.43) (Dank der Einwertigkeit der Exponentialfunktion) eindeutig bestimmt.

Die Wahl eines anderen Normierungspunktes  $z_0 \in \partial\mathcal{S}$  entspricht offenbar einer Multiplikation von  $\tilde{f}(z)$  mit einem festen Phasenfaktor  $e^{i\varphi}$  und umgekehrt (Beweis als Übungsvorschlag). Dementsprechend gilt:

**Satz 2.2.1 (RIEMANNscher Abbildungssatz)** *Zu jeder offenen, einfach zusammenhängenden Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\mathbb{C}$  mit nicht leerem, stetigen Rand und zu jedem  $z' \in \underline{\mathcal{S}}$  existiert genau eine konforme Abbildung (2.42) von  $\underline{\mathcal{S}}$  in  $U_1(0)$  mit:*

$$f(z') = 0 \quad \text{und} \quad f'(z') > 0.$$

Der rein mathematische Beweis<sup>13</sup> des RIEMANNschen Abbildungssatzes, dessen Verallgemeinerung auf Riemannsche Flächen auch als **Hauptsatz der konformen Abbildungen** bezeichnet wird, ist recht kompliziert.

### 2.2.3 Beispiele

Nach 2.2.2 sollte also die Lösung des Grundproblems nach folgendem Schema möglich sein:

Man wählt zunächst zu jedem  $z' \in \underline{\mathcal{S}}$  eine in  $\underline{\mathcal{S}}$  holomorphe und umkehrbare Funktion  $\tilde{f}_{z'}(z)$ , die den Bedingungen

$$\boxed{\frac{d}{dz} \tilde{f}_{z'}(z) \neq 0 \quad \forall z \in \underline{\mathcal{S}},} \tag{2.47}$$

$$\boxed{\{\tilde{f}_{z'}(z) : z \in \underline{\mathcal{S}}\} = U_1(0),} \tag{2.48}$$

$$\boxed{\tilde{f}_{z'}(z') = 0} \tag{2.49}$$

<sup>13</sup>Siehe z.B. (Kyrala, 1972, Appendix A).

genügt. Damit bestimmt man die GREENSche Funktion

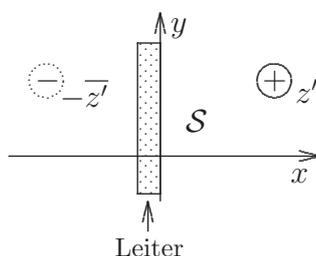
$$G_{\mathcal{S}}(z, z') = -2 \ln \left| \tilde{f}_{z'}(z) \right| \quad (2.50)$$

und mit deren Hilfe schließlich die Lösung

$$\Phi_{\rho}(x, y) = \int G_{\mathcal{S}}(z, z') \rho(z') dx' dy' \quad (2.51)$$

des DIRICHLETSchen Randwertproblems zur Ladungsverteilung  $\rho \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{S}})$ .

**Beispiel**  $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$  :



Hier erfüllt

$$\tilde{f}_{z'}(z) = g_{z'}(z) \wedge \underline{\mathcal{S}},$$

wobei

$$g_{z'}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z' - z}{z' + z} \quad \text{für } z \neq -\bar{z}',$$

die Bedingungen (2.47)–(2.49) (vgl. Übungsaufgabe 14). Nach (2.50) ist daher

$$G_{\mathcal{S}}(z, z') = \underbrace{-2 \ln |z - z'|}_{\hat{=} \text{eb. Monop. bei } z'} + 2 \ln |z + \bar{z}'| \underbrace{\phantom{-2 \ln |z - z'|}}_{\hat{=} \text{Spiegelladung}}.$$

Im vorliegenden Beispiel ist  $\mathcal{S}$  zwar **unbeschränkt**, die angegebene Methode funktioniert aber trotzdem.

**Beispiel**  $\mathcal{S} = \overline{U_1(0)}$  : hier erfüllt

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{z'}(z) &= g_{g_1^{-1}(z')}(g_1^{-1}(z)) \\ &= \frac{\frac{1-z'}{1+z'} - \frac{1-z}{1+z}}{\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right) + \frac{1-z}{1+z}} \\ &\stackrel{\text{Ü. 14}}{=} \frac{1+z'}{1+z'} \frac{z-z'}{1-\bar{z}'z} \end{aligned}$$

die Bedingungen (2.47)–(2.49) und ist umkehrbar. Nach (2.50) ist daher

$$G_{U_1(0)}(z, z') = -2 \ln |z - z'| + 2 \ln |1 - \bar{z}'z|.$$

Insbesondere gilt also

$$\begin{array}{l} \text{für } r \in (0, 1) : \\ \hline G_{U_1(0)}(z, r) = \underbrace{-2 \ln |z - r|}_{\hat{=} \text{eb. Monop. bei } r} + \underbrace{2 \ln |1 - \bar{z}'z|}_{\hat{=} \text{Spiegelladung}} - 2 \ln(r). \end{array} \quad (2.52)$$

Aus diesem Beispiel erkennen wir mit (2.50) für hinreichend gutartiges  $\mathcal{S}$  :

$$G_{\mathcal{S}}(z, z') = -2 \ln \left| \frac{f(z) - f(z')}{1 - \overline{f(z')}f(z)} \right| \quad (2.53)$$

für **jede** umkehrbare konforme Abbildung der Form (2.42) von  $\underline{\mathcal{S}}$  in  $U_1(0)$ .

**Übungsaufgabe 29** Man bestimme mithilfe von (2.52) das elektrostatische Feld zweier paralleler zylindrischer Leiter gleichen Durchmessers aber unterschiedlichen Potentials im sonst ladungsfreien Raum.

**Übungsaufgabe 30** Man bestimme die GREENSche Funktion für folgende Gebiete:

1.  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \setminus U_1(0)$ ,
2.  $\mathcal{S} = \overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}$ ,
3.  $\mathcal{S} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Bzgl. weiterer Beispiele sowie ähnlicher Anwendungen in Hydro- und Aerodynamik siehe z.B. (Magnus und Oberhettinger, 1949).

**Übungsaufgabe 31** Man bestimme die Kapazität (pro Längeneinheit) eines Kondensators bestehend aus einer unendlich langen Leiterröhre kreisförmigen Querschnitts und einem zur Achse parallelen, unendlich dünnen Innenleiters.



# Kapitel 3

## Die HEAVISIDE-Methode zur Berechnung linearer Netzwerke

### 3.1 Lineare 2-Pole

#### 3.1.1 Distributionstheoretische Grundlagen

Sei  $I(t)$  resp.  $U(t)$  die an einem Kondensator der Kapazität  $C$  anliegende reelle Stromstärke resp. Spannung. Dann gilt (vgl. 1.1.2):

$$C U(t) = Q(t) = Q(0) + \int_0^t I(t') dt'.$$

Falls der Strom also nur während des Zeitintervalls  $(0, \Delta t)$  fließt und der Kondensator für negative Zeiten ungeladen ist, folgt:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \int_0^t I(t') dt' & \text{für } t \geq \Delta t. \end{cases}$$

Man muß also damit rechnen, daß auch für recht gutartige Ströme die zugehörige Spannung nicht mehr integrierbar ist!

Um der FOURIER-Transformation (1.25) für solche  $U(t)$  dennoch einen Sinn zu verleihen, greift man auf die Distributionstheorie zurück:

Eine komplexwertige Funktion  $f(t)$  über  $\mathbb{R}$  bezeichnet man als **temperierte Funktion**, wenn sie der Bedingung

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^n \left( \frac{d}{dt} \right)^m f(t) \right| < \infty$$

für alle  $n, m \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots\}$  genügt. Die Menge aller temperierten Funktionen über  $\mathbb{R}$  bezeichnet man mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Man sagt, die Folge der Funktionen  $\varphi_\mu(t)$

konvergiere in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  gegen die Funktion  $\varphi(t)$ , falls

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^n \left( \frac{d}{dt} \right)^m \varphi_\mu(t) \right|$$

für alle  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  gegen Null konvergiert. Man schreibt dafür auch

$$\varphi_\mu \rightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Unter einer temperierten Distribution (einer einzigen Variablen) versteht man eine Abbildung  $\varphi \mapsto F(\varphi)$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $\mathbb{C}$ , die linear und stetig ist. **Linear** meint:

$$F(z_1\varphi_1 + z_2\varphi_2) = z_1 F(\varphi_1) + z_2 F(\varphi_2)$$

für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . **Stetig** meint:

$$\varphi_\mu \rightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies F(\varphi_\mu) \rightarrow F(\varphi).$$

Die Menge aller temperierten Distributionen bezeichnet man mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . Insbesondere läßt sich jede temperierte Funktion  $F(t)$  auch als temperierte Distribution auffassen, indem man

$$F(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int F(t)\varphi(t) dt \quad (3.1)$$

definiert. Nun gibt es viele Paare linearer stetiger Abbildungen  $\hat{T}, \hat{T}'$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in sich, die die Bedingung

$$\int (\hat{T}F)(t)\varphi(t) dt = \int F(t)(\hat{T}'\varphi)(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (3.2)$$

für alle  $F(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  erfüllen.  $\hat{T}, \hat{T}'$  sind dann natürlich einander eineindeutig zugeordnet und man kann (3.2) als **Definitionsgleichung** für die Fortsetzung der Operation  $\hat{T}$  auf die Menge aller temperierten **Distributionen** verwenden, wenn man die Integralschreibweise (3.1) **formal** für alle temperierten Distributionen verwendet.

In diesem Sinne bezeichnet man (temperierte) Distributionen auch als **verallgemeinerte Funktionen**.

**Übungsaufgabe 32** Man mache sich klar, daß die bekannte  $\delta$ -Funktion in diesem Sinne als **verallgemeinerte Funktion** zu verstehen ist.

Damit läßt sich die FOURIER-Transformation (1.25) auch für temperierte Distributionen erklären, indem man in der für die Quantenmechanik fundamentalen

Beziehung

$$\int \tilde{F}(\omega) \overline{\tilde{\varphi}(\omega)} d\omega = \int F(t) \overline{\varphi(t)} dt \quad \forall \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

wobei entsprechend (1.26):

$$\overline{\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\tilde{\varphi}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega,$$
(3.3)

für  $F(t)$  auch temperierte Distributionen zuläßt.

**Anmerkung:** Für  $g(t) = \overline{\varphi(t)}$  geht (3.3) in die sog. **PARSEVALSche Gleichung**

$$\int F(t)g(t) dt = \int \tilde{F}(\omega)\tilde{g}(-\omega) d\omega,$$

für  $F(t) = \varphi(t)$  in die sog. **PLANCHERELSche Gleichung**

$$\int |\varphi(t)|^2 dt = \int |\tilde{\varphi}(\omega)|^2 d\omega$$

über.

Man schreibt natürlich (1.25) **formal** auch für (temperierte) Distributionen, also

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(t)e^{-i\omega t} dt,$$

und entsprechend (1.26)

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{F}(\omega)e^{+i\omega t} dt.$$

**Übungsaufgabe 33** Man zeige, daß in diesem Sinne die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t} dt = \delta(t)$$

gelten.

Da der zur Ableitung  $\hat{T} = \frac{d}{dt}$  gehörige *transponierte* Operator  $\hat{T}' = -\frac{d}{dt}$  ist, definiert man gemäß (3.2) die Ableitung der temperierten Distribution  $F(t)$  durch

$$\dot{F}(\varphi) = \int \dot{F}(t) \varphi(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int F(t) \dot{\varphi}(t) dt. \quad (3.4)$$

Da man jede polynomial beschränkte, stetige Funktion  $F(t)$  im Sinne von (3.1) als temperierte Distribution auffassen kann (indem man das Integral als geöhnlichen RIEMANN-Integral interpretiert), lassen sich all diese Funktionen im distributions-theoretischen Sinne nicht nur FOURIER-transformieren, sondern auch beliebig oft differenzieren.

**Anmerkung:** Man kann zeigen (nicht elementar), daß für jede temperierte Distribution  $F(t)$

$$F(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^n G(t) \quad \text{im distributionstheoretischen Sinne} \quad (3.5)$$

mit geeignetem natürlichem  $n$  und polynomial beschränktem, stetigem  $G(t)$

gilt.

**Übungsaufgabe 34** Man zeige, daß

$$\delta(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^2 (t\theta(t)) \quad \text{im distributionstheoretischen Sinne}$$

gilt, wobei

$$\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

die sog. HEAVISIDE-**Funktion** bezeichnet.

Die Ableitung im distributionstheoretischen Sinne – auch **schwache Ableitung** genannt – erlaubt z.B. eine exakte Interpretation der SCHRÖDINGER-Gleichung für

Anfangsbedingungen  $\Psi(x, 0)$ , die nicht im gewöhnlichen Sinne differenzierbar sind:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + V(x, t) \right) \Psi(x, t)$$

meint (für hinreichend gutartiges  $V(x, t)$ ):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \int \Psi(x, t) \varphi(x) dx = \int \Psi(x, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + V(x, t) \right) \varphi(x) dx$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

(3.6)

Wenn  $\hat{T}$  die sog. **Faltung** mit einer temperierten Funktion  $\psi(t)$  ist, d.h.<sup>1</sup>

$$\left( \hat{T}F \right) (t) = (F * \psi)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int F(t') \psi(t - t') dt' \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

dann ist gemäß (3.2)

$$\int (F * \psi)(t) \varphi(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int F(t) (\varphi * \psi_-)(t) dt \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})', \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

wobei:  $\psi_-(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(-t)$ ,

(3.7)

zu definieren.

**Übungsaufgabe 35** Man zeige mithilfe von (3.5), daß die temperierte Distribution  $(F * \psi)(t)$  im Sinne von (3.1) der gewöhnlichen Funktion  $\int F(t') \psi(t - t') dt'$  entspricht:

$$(F * \psi)(t) = \int F(t') \psi(t - t') dt' \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})', \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
(3.8)

Mit  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})$  bezeichnet man die Menge aller (komplexwertigen) beliebig differenzierbaren Funktionen über  $\mathbb{R}$ , deren sämtliche Ableitungen polynomial beschränkt sind. Gemäß (3.2) lautet dann die Definition der Multiplikation einer temperierten Distribution  $F(t)$  mit einer Funktion  $k(t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})$ :

$$\int (k(t) F(t)) \varphi(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int F(t) (k(t) \varphi(t)) dt \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})', \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$
(3.9)

weshalb man auf die großen Klammern verzichten kann. Man beachte:

$$F * \psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}) \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})', \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

<sup>1</sup>Man beachte, daß das Faltungsprodukt  $*$  kommutativ ist (Beweis als Übungsvorschlag).

**Anmerkung:** Mithilfe von (3.7) läßt sich zeigen (indem man  $\psi(t)$  durch eine  $\delta$ -Folge ersetzt), daß alle für temperierte Distributionen  $F(t)$  **erklärten** Beziehungen gültig sind, wenn sie für alle  $F(t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})$  gültig sind. Beispiel:

$$\int (\psi(t) F(t)) e^{-i\omega t} dt = \int F(t) (\psi(t) e^{-i\omega t}) dt \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'. \quad (3.10)$$

Nicht erfaßt durch (3.2) ist der Übergang zur konjugiert komplexen Distribution:

$$\int \overline{F(t)} \varphi(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\int F(t) \overline{\varphi(t)} dt} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

**Übungsaufgabe 36** Man beweise folgende Regeln für die FOURIER-Transformation (1.25/(1.26)):<sup>2</sup>

Nr.	Distribution	FOURIER-Transformierte
0	$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{F}(\omega) e^{+i\omega t} dt$	$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(t) e^{-i\omega t} dt$
1	$z_1 F_1(t) + z_2 F_2(t)$	$z_1 \tilde{F}_1(\omega) + z_2 \tilde{F}_2(\omega)$
2	$\frac{d}{dt} F(t)$	$i\omega \tilde{F}(\omega)$
3	$-it F(t)$	$\frac{d}{d\omega} \tilde{F}(\omega)$
4	$F(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \tilde{F}(\omega)$
5	$e^{+i\omega t_0} F(t)$	$\tilde{F}(\omega - \omega_0)$
6	$\overline{F(t)}$	$\overline{\tilde{F}(-\omega)}$
7	$\overline{F(-t)}$	$\overline{\tilde{F}(\omega)}$
8	$\delta(t)$	$1/\sqrt{2\pi}$
9	$1/\sqrt{2\pi}$	$\delta(\omega)$
10	$\psi(t) F(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\tilde{\psi} * \tilde{F})(\omega)$
11	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\psi * F)(t)$	$\tilde{\psi}(\omega) \tilde{F}(\omega)$
12	$e^{-t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}$
13	$F(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$

**Übungsaufgabe 37** Man bestimme  $\tilde{U}(\omega)$  für  $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

### 3.1.2 Grundgleichungen und Kausalitätsprinzip

Als (linearer) **temperierter 2-Pole** sei ein elektronischer Baustein bezeichnet, für den temperierte Distributionen  $U_\delta(t)$  und  $I_\delta(t)$  existieren, mit denen der Zusammenhang zwischen anliegender (reeller) Spannung  $U(t)$  und (reeller) Stromstärke  $I(t)$  stets durch

$$\boxed{U(t) = (U_\delta * I)(t) \quad \forall I = \bar{I} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} \quad (3.11)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Regel 12 ist lediglich ein Spezialfall von (2.31).

und

$$I(t) = (I_\delta * U)(t) \quad \forall U = \bar{U} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

gegeben ist.<sup>3</sup> Wir nennen einen temperierten 2-Pol<sup>4</sup> **konventionell**, wenn (komplexwertige) Polynome  $\check{P}(\omega)$ ,  $\check{Q}(\omega)$  existieren mit<sup>5</sup>

$$\tilde{U}(\omega) = \frac{\check{P}(\omega)}{\check{Q}(\omega)} \tilde{I}(\omega) \quad \forall I = \bar{I} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \omega \in \{\omega' \in \mathbb{R} : \check{Q}(\omega') \neq 0\}. \quad (3.12)$$

Dabei ist die Gleichheit zweier temperierter Distributionen  $\tilde{F}_1(\omega)$ ,  $\tilde{F}_2(\omega)$  innerhalb einer offenen Teilmenge  $\mathcal{O}$  von  $\mathbb{R}$  allgemein folgendermaßen definiert:

$$\tilde{F}_1(\omega) = \tilde{F}_2(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad F_1(\varphi) = F_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \quad (3.13)$$

### Übungsaufgabe 38

Man zeige

1. Kapazitäten, Induktivitäten und OHMSche Widerstände sind konventionelle (temperierte) 2-Pole mit

$$\tilde{U}_\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{R}(\omega) \quad \forall \omega \neq 0,$$

wobei  $\mathcal{R}(\omega)$  gemäß Übungsaufgabe 2 gegeben ist.

2. Für konventionelle 2-Pole gilt stets

$$2\pi \tilde{I}_\delta(\omega) = 1/\tilde{U}_\delta(\omega)$$

außerhalb einer endlichen Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

3. Die Parallelschaltung zweier konventioneller 2-Pole ergibt wieder einen konventionellen 2-Pol mit

$$\tilde{I}_\delta(\omega) = \tilde{I}_\delta^{(1)}(\omega) + \tilde{I}_\delta^{(2)}(\omega)$$

außerhalb einer endlichen Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>3</sup>Die Grenzfälle  $U_\delta = 0$  (Kurzschluß) und  $I_\delta = 0$  (vollständige Isolation) sind also, streng genommen, nicht zugelassen.

<sup>4</sup>Man kann zeigen, daß bei einem beliebigen Netzwerk linearer 2-Pole (ohne innere Spannungsquellen) Potentiale und Ströme an allen Verbindungspunkten festliegen, wenn die Potentiale an zwei Verbindungspunkten (als Funktionen der Zeit) gegeben sind – sofern der (komplexe) Leitwert für keine Paar von Verbindungspunkten verschwindet (einfach zusammenhängendes Netzwerk).

<sup>5</sup>Da  $U(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  i.a. nicht verschwindet, müssen wir die FOURIER-Transformation von  $U(t)$  natürlich im distributionstheoretischen Sinne interpretieren. Wir werden sehen (Beweis von Satz 3.1.1), daß es für kausale 2-Pole genügt, den Zusammenhang zwischen  $\tilde{U}(\omega)$  und  $\tilde{I}(\omega)$  auf einem (beliebig kleinen) offenen Intervall von  $\mathbb{R}$  zu kennen.

4. Die Serienschaltung<sup>6</sup> zweier konventioneller 2-Pole ergibt wieder einen konventionellen 2-Pol mit

$$\tilde{U}_\delta(\omega) = \tilde{U}_\delta^{(1)}(\omega) + \tilde{U}_\delta^{(2)}(\omega)$$

außerhalb einer endlichen Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

Wir nennen einen temperierten 2-Pol **kausal**, wenn er die Bedingungen

$$I(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \implies \quad U(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (3.14)$$

für alle  $I \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und

$$U(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \implies \quad I(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (3.15)$$

für alle  $U \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  erfüllt.<sup>7</sup>

**Anmerkung:** Die beiden Kausalitätsbedingungen entsprechen unterschiedlichen Betriebsbedingungen. (3.14) geht davon aus, daß man den Strom (im Prinzip) beliebig steuern kann und dieser dann die Ursache für die Spannung ist. Entsprechend geht (3.15) davon aus, daß man alternativ auch die Spannung (im Prinzip) beliebig steuern kann, die dann die Ursache für den Strom ist. Die Kausalitätsbedingung folgt dann jeweils aus der Forderung, daß die Wirkung der Ursache nicht zeitlich vorauslaufen darf ('no output before input').

Die Kausalitätsbedingungen (3.14) und (3.15) sind offensichtlich äquivalent dazu, daß die **charakteristischen** (verallgemeinerten) **Funktionen**  $U_\delta(t)$  und  $I_\delta(t)$  für  $t < 0$  verschwinden. Sie dienen dazu, die i.a. nur außerhalb einer endlichen Menge bekannten FOURIER-Transformierten  $\tilde{I}_\delta(\omega)$ ,  $\tilde{U}_\delta(\omega)$  für alle  $\omega$  festzulegen. Zum Beispiel legt die Bedingung  $I(t) = C \dot{U}(t)$  für einen idealen Kondensator nur

$$\sqrt{2\pi} \tilde{U}(\omega) = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}(\omega) \quad \text{für } \omega \neq 0$$

und damit  $U_\delta(t)$  nur bis auf eine additive Konstante fest. (3.14) legt diese Konstante so fest, daß  $U_\delta(t)$  mit der **regulären** Distribution  $U_\delta(t) = \frac{1}{C} \theta(t)$  übereinstimmt.

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>Ein einfaches Beispiel eines konventionellen 2-Pols, der sich nicht aus Parallel- und Serienschaltung elementarer 2-Pole ergibt, ist z.B. die WHEATSTONESche Brücke (zur Berechnung siehe (Lunze, 1967, Aufgabe 2.91)).

<sup>7</sup>Für beliebige  $a < b$  ist die Bedingung

$$I(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b) \quad \iff \quad U(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

i.a. jedoch **nicht** erfüllt, wie schon die Parallelschaltung eines Kondensators mit einem OHMSchen Widerstand zeigt.

Zur allgemeinen Auswertung der Kausalitätsbedingungen benötigen wir die sog. LAPLACE-**Transformation**  $\mathcal{L}$  für temperierte Distributionen  $F(t)$ :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}F)(\omega + i\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(t) (k(t) e^{-i(\omega+i\tau)t}) dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \tau < 0, \\
 \text{falls } t'_0 \in \mathbb{R} \text{ und } k(t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}) \text{ existieren mit:} & \\
 F(t) &= k(t) F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 \text{und} & \\
 k(t) &= 0 \quad \forall t < t'_0.
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

**Anmerkungen:**

- (i) Nach (3.10) entspricht die LAPLACE-Transformierte von  $F(t)$  für festes  $\tau < 0$  der FOURIER-Transformierten von  $k(t) e^{\tau t} F(t)$ .
- (ii) Oft definiert man die LAPLACE-Transformation nur für den Fall, daß  $F(t) = 0$  für  $t < 0$  ist.
- (iii) In der mathematischen Literatur schreibt man die LAPLACE-Transformation gewöhnlich als Funktion der Variablen  $s \stackrel{\text{def}}{=} i(\omega + i\tau)$  über der rechten Halbebene.<sup>8</sup>

**Übungsaufgabe 39** Man zeige mithilfe von (3.5): Falls die temperierte Distribution  $F$  der Bedingung

$$F(t) = 0 \quad \forall t < t_0$$

für geeignetes  $t_0 \in \mathbb{R}$  genügt, dann ist die LAPLACE-Transformierte  $(\mathcal{L}F)(\omega + i\tau)$  für  $\tau < 0$  eindeutig definiert und **holomorph** und es gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow -0} \int (\mathcal{L}F)(\omega + i\tau) \tilde{\varphi}(\omega - \omega') d\omega = \int \tilde{F}(\omega) \tilde{\varphi}(\omega - \omega') d\omega \quad \forall \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \omega' \in \mathbb{R}.
 \tag{3.17}$$

Dabei ist die Konvergenz in (3.17) für festes  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $N > 0$  **gleichmäßig** bzgl.  $\omega' \in [-N, +N]$ .

Daß (3.12) bzw. (3.18) und (3.14) zusammen die charakteristische Funktion  $U_\delta(t)$  bereits eindeutig festlegen, besagt der folgende Satz.

<sup>8</sup>Siehe z.B. (Doetsch, 1958; Doetsch, 1956; Voelker und Doetsch, 1950).

**Satz 3.1.1** Seien  $U_1(t), U_2(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$  und seien  $t_0, a, b \in \mathbb{R}$ , wobei  $a < b$ . Dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} U_1(t) = U_2(t) \quad \forall t < t_0 \\ \tilde{U}_1(\omega) = \tilde{U}_2(\omega) \quad \forall \omega \in (a, b) \end{array} \right\} \implies \tilde{U}_1(\omega) = \tilde{U}_2(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

**Beweisskizze:** Wir wählen ein  $\omega_0 \in (a, b)$  und  $\epsilon > 0$  klein genug, daß  $U_{2\epsilon}(\omega_0) \subset (a, b)$  gilt. Weiterhin wählen wir eine temperierte Funktion  $\tilde{\varphi}_\epsilon(\omega)$ , die außerhalb  $U_\epsilon(0)$  verschwindet. Nach Übungsaufgabe 39 ist dann

$$f_\epsilon(\omega + i\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int (\mathcal{L}U_1 - \mathcal{L}U_2)(\omega' + \omega + i\tau) \tilde{\varphi}_\epsilon(\omega' - \omega_0) d\omega'$$

für  $\tau < 0$  holomorph und konvergiert für  $\tau \rightarrow -0$  gleichmäßig bzgl.  $\omega \in U_\epsilon(0)$  gegen Null. Daher ist mit

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f_\epsilon(z) & \text{falls } \Im(z) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

durch

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\epsilon(0)} \frac{F(z')}{z' - z} dz'$$

eine in  $U_\epsilon(0)$  holomorphe Funktion mit

$$g(z) \stackrel{(2.28)}{=} \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\{z' \in U_\epsilon(0): \Im(z') < 0\}} \frac{F(z')}{z' - z} dz' \stackrel{(2.32)}{=} f_\epsilon(z) & \text{für } \Im(z) < 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\{z' \in U_\epsilon(0): \Im(z') > 0\}} \frac{F(z')}{z' - z} dz' = 0 & \text{für } \Im(z) > 0. \end{cases}$$

Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung muß  $g(z)$  in ganz  $U_\epsilon(0)$  und damit  $f_\epsilon(z)$  für  $\Im(z) < 0$  verschwinden. Indem man  $\varphi_\epsilon$  für  $\epsilon \rightarrow +0$  gegen die  $\delta$ -Funktion konvergieren läßt, erhält man somit

$$(\mathcal{L}U_1)(\omega_0 + i\tau) = (\mathcal{L}U_2)(\omega_0 + i\tau) \quad \forall \tau < 0$$

und daraus wiederum mit dem Prinzip der analytischen Fortsetzung:

$$(\mathcal{L}U_1)(z) = (\mathcal{L}U_2)(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \Im(z) < 0.$$

Nach (3.17) folgt daraus die Gleichheit der FOURIER-Transformierten von  $U_1(t)$  und  $U_2(t)$  und somit die Behauptung. ■

### 3.1.3 HEAVISIDE-Formel und charakteristische Funktion

Voraussetzungsgemäß ist der komplexe Widerstand  $\mathcal{R}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{U}_\delta(\omega)$  eines konventionellen 2-Pols stets von der Form

$$\mathcal{R}(\omega) = \hat{P}(\omega) + \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \quad \text{außerhalb einer endlichen Teilmenge von } \mathbb{R} \quad (3.18)$$

für geeignete Polynome  $\hat{P}$ ,  $P$ ,  $Q$  mit  $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$ .

Daher<sup>9</sup> läßt sich  $\mathcal{R}(\omega)$  stets in die komplexe Ebene mit Ausnahme endlich vieler Singularitätspunkte (komplexe Nullstellen von  $Q$ ) fortsetzen und der Beweis von Satz 3.1.1 zusammen mit Übungsaufgabe 39 zeigt:

Für kausale konventionelle Zweipole läßt sich der komplexe Widerstand analytisch in die offene untere komplexe Halbebene fortsetzen und stimmt dort mit dem  $\sqrt{2\pi}$ -fachen der LAPLACE-Transformierten der charakteristischen Funktion überein.<sup>10</sup>

$$(\mathcal{L}U_\delta)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{R}(z) \quad \forall z \in \mathbb{R} - i\mathbb{R}_+ \quad (3.19)$$

$(\mathbb{R}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \in \mathbb{R} : \pm\tau > 0\})$ .

Entsprechend Anmerkung (i) zu (3.16) gilt also:<sup>11</sup>

$$U_\delta(t) = \frac{e^{-\tau t}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{R}(\omega + i\tau) e^{i\omega t} d\omega \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tau < 0. \quad (3.20)$$

Die Auswertung von (3.20) basiert auf der sog. HEAVISIDE-**Formel**:<sup>12</sup>

$$\frac{e^{-\tau t}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{P(\omega + i\tau)}{Q(\omega + i\tau)} e^{i\omega t} d\omega \right) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen } z_j \\ \text{von } Q}} \theta(t) i \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{izt} \right) \Big|_{z=z_j} \quad (3.21)$$

im distributionstheoretischen Sinne für  $\tau < 0$  und  $P$ ,  $Q$  gemäß (3.18).

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Man beachte die Quotientenregel und den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 3.1.2).

<sup>10</sup>Man beachte, daß die Kausalitätsbedingung (3.14) äquivalent dazu ist, daß  $U_\delta(t)$  für  $t < 0$  verschwindet.

<sup>11</sup>Daß die rechte Seite von (3.20) im Falle (3.18) tatsächlich für  $t < 0$  verschwindet erkennt man leicht durch Grenzbetrachtung  $\tau \rightarrow -\infty$ . Für einen nur aus elementaren 2-Polen zusammengesetzten 2-Pol geht  $\mathcal{R}(\omega)$  in  $\tilde{\mathcal{R}}(\omega) = \mathcal{R}(\omega + i\tau)$  über, wenn man zu jeder Induktivität  $L$  einen OHMSchen Widerstand  $-\tau L$  in Serie und zu jeder Kapazität  $C$  einen OHMSchen Widerstand  $\frac{-1}{\tau C}$  parallel schaltet.

<sup>12</sup>Das Residuum  $\text{Res}(f(z))|_{z=z'}$ , der Funktion  $f(z)$  an der Stelle  $z = z'$  wurde in Übungsaufgabe 24 erklärt.

**Beweis von (3.21) für  $|t| > \epsilon > 0$ :** Zunächst sieht man leicht, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{P(\omega + i\tau)}{Q(\omega + i\tau)} e^{i(\omega + i\tau)t} d\omega \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{e^{-\tau t}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{P(\omega + i\tau)}{Q(\omega + i\tau)} e^{i\omega t} d\omega \right)$$

im distributionstheoretischen Sinne gilt. Für den Weg

$$\mathcal{C}_N^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \partial \{z \in U_N(0) : \pm \Im(z) > 0\}$$

konvergiert andererseits

$$\int_{\mathcal{C}_N^\pm} \frac{P(z + i\tau)}{Q(z + i\tau)} e^{i(z + i\tau)t} dz - \int_{-N}^{+N} \frac{P(z + i\tau)}{Q(z + i\tau)} e^{i(z + i\tau)t} dz$$

für  $N \rightarrow \infty$  gleichmäßig bzgl.  $\pm t > \epsilon$  gegen Null. Da aus dem CAUCHYSchen Integralsatz (2.28)

$$\int_{\mathcal{C}_N^-} \frac{P(z + i\tau)}{Q(z + i\tau)} e^{i(z + i\tau)t} dz = 0$$

und für hinreichend großes  $N$  und hinreichend kleines  $r > 0$

$$\int_{\mathcal{C}_N^+} \frac{P(z + i\tau)}{Q(z + i\tau)} e^{i(z + i\tau)t} dz = \sum_{\substack{\text{Nullstellen } z_j \\ \text{von } Q}} \int_{\partial U_r(z_j)} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{izt} dz$$

folgt, ergibt sich daraus die Gültigkeit von (3.21) für  $|t| > \epsilon > 0$ . ■

**Übungsaufgabe 40** Man zeige, daß (3.21) für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, weil (3.21) für  $|t| > \epsilon$  gilt, wie klein auch immer man  $\epsilon > 0$  wählt.

**Übungsaufgabe 41** Man zeige, daß jede in die offenen untere komplexe Halbebene fortsetzbare rationale Funktion dort tatsächlich mit der LAPLACE-Transformierten einer temperierten Distribution übereinstimmt, die für  $t < 0$  verschwindet.

Aufgrund der Regeln 1, 2 und 8 für die FOURIER-Transformation (Übungsaufgabe 36) folgt nun aus (3.20) und (3.21):

$$U_\delta(t) = \widehat{P} \left( -i \frac{d}{dt} \right) \delta(t) + \sum_{\substack{\text{Nullstellen } z_j \\ \text{von } Q}} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{izt} \right) \Big|_{z=z_j} i \theta(t) \quad (3.22)$$

mit  $\widehat{P}$   $P$ ,  $Q$  gemäß (3.18).

**Übungsaufgabe 42** Man beweise mithilfe der TAYLOR-Entwicklung (2.38) und der Formel (2.34) den **Satz von LIOUVILLE**:

Jede in ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe und polynomial beschränkte Funktion ist ein Polynom.

Zur Bestimmung der Residuen in (3.22) benutzt man:

**Satz 3.1.2 (Fundamentalsatz der Algebra)** Zu jedem Polynom  $n$ -ten Grades  $Q(z)$  existieren komplexe Zahlen  $a, z_1, \dots, z_n$  mit

$$Q(z) = a \prod_{j=1}^n (z - z_j) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Beweisskizze:** Wenn  $Q(z)$  keine Nullstelle besitzt, dann ist gemäß Quotientenregel (2.15) auch  $1/Q(z)$  in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph und beschränkt und somit nach dem Satz von LIOUVILLE konstant. Wenn  $z_1$  eine Nullstelle von  $Q(z)$  ist, so erkennt man aus der TAYLOR-Entwicklung von  $Q(z)$  um die Stelle  $z = z_1$  herum mit dem Satz von LIOUVILLE, daß auch  $Q(z)/(z - z_1)$  ein Polynom ist. Durch  $n$ -fache Anwendung dieses Arguments folgt die Behauptung. ■

**Anmerkung:** Für große  $n$  lassen sich die Nullstellen  $z_j$  i.a. nur approximativ (mit dem Computer) ermitteln.

Der Einfachheit halber sei nur der Fall betrachtet, daß die  $z_j$  in Satz 3.1.2 paarweise verschieden sind (**einfache Nullstellen**). Mit der LAURENT-Entwicklung (2.37) und dem Satz von LIOUVILLE ergibt sich für  $P, Q$  entspr. (3.18) dann die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^n (z - z_j)^{-1} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right)_{|z=z_j}$$

(Beweis als Übungsvorschlag) und daraus mit der CAUCHYSchen Integralformel (2.32)

$$\operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{izt} \right)_{|z=z_j} = e^{iz_j t} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right)_{|z=z_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, t \in \mathbb{R}.$$

Durch Multiplikation der Partialbruchzerlegung mit  $z - z_j$  und Grenzübergang  $z \rightarrow z_j$  ergibt sich mit Satz 3.1.2

$$\operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right)_{|z=z_j} = \frac{P(z_j)}{a \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)} = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$

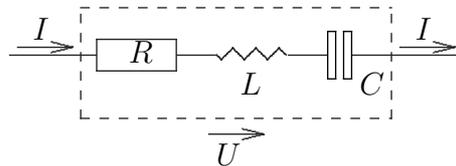
Damit läßt sich für (3.22) schreiben:

$$U_\delta(t) = \widehat{P} \left( -i \frac{d}{dt} \right) \delta(t) + \sum_{\substack{\text{Nullstellen } z_j \\ \text{von } Q}} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)} e^{iz_j t} i \theta(t) \quad (3.23)$$

mit  $\widehat{P}$   $P$ ,  $Q$  gemäß (3.18), falls  $Q$  nur einfache Nullstellen besitzt.

Alle bisherigen Betrachtungen gelten natürlich entsprechend, wenn man die Rollen von  $\mathcal{R}(\omega)$  und  $\mathcal{G}(\omega) = 1/\mathcal{R}(\omega)$  sowie von  $U(t)$  und  $I(t)$  vertauscht (**Dualität**)!

**Übungsaufgabe 43** Man zeige, daß der Zusammenhang zwischen  $U(t)$  und  $I(t)$  für den Schwingkreis



(vgl. 1.1.2) durch

$$U(t) = RI(t) + L \dot{I}(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' \quad (3.24)$$

und

$$I(t) = \frac{d}{dt} \Re \left( \frac{1}{i\omega_R} e^{-(\rho - i\omega_R)t} \int_{-\infty}^t e^{+(\rho - i\omega_R)t'} \frac{U(t')}{L} dt' \right) \quad (3.25)$$

gegeben ist, wobei

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{2L}, \quad \omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \rho^2} \quad (3.26)$$

(vgl. Übungsaufgabe 3).

**Anmerkung:** (3.24) läßt sich auch direkt erraten und verifizieren. (3.25) läßt sich auch mithilfe der Methode der *Variation der Konstanten* aus der Differentialgleichung

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \dot{Q}(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{U(t)}{L}$$

ableiten (siehe Abschn. 5.3.3 von (Lücke, ein)).

**Literatur zur Netzwerktheorie:** (Brown und Nilsson, 1962; Carson, 1953; Lunze, 1967; Mathis, 1987; Papoulis, 1962; Schouten, 1961; Wagner und Thoma, 1962)

## 3.2 Vierpolketten

### 3.2.1 Kettenmatrix

Als **Vierpol** bezeichnet man einen elektronischen Baustein mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangs-Polen. Wenn man mit einem äußeren Zweipol  $\hat{=} \mathcal{R}_a(\omega)$  abschließt, ergibt sich ein Zweipol mit Strom  $I_e(t)$  und Spannung  $U_e(t)$ , während zum äußeren Zweipol der Strom  $I_a(t)$  und Spannung  $U_a(t)$  gehören:



Einen (linearen) Vierpol nennen wir **konventionell**, wenn eine Matrix-wertige Funktion  $\mathbb{M}(\omega)$  existiert, deren Elemente rationale (komplex-wertige) Funktionen von  $\omega$  sind, mit der für die FOURIER-Transformierten der reellen Ströme und Spannungen **stets** die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_e(\omega) \\ \tilde{I}_e(\omega) \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\omega) \begin{pmatrix} \tilde{U}_a(\omega) \\ \tilde{I}_a(\omega) \end{pmatrix}, \quad \det \mathbb{M}(\omega) \neq 0, \quad (3.27)$$

für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  mit Ausnahme endlich vieler (nur vom Vierpol abhängiger)  $\omega$ -Werte.

gelten. Man bezeichnet  $\mathbb{M}(\omega)$  als die **Kettenmatrix** des Vierpols. Diese Form der Vierpol-Matrix ist zur Beschreibung der Serienschaltung von Vierpolen (siehe 3. Teil von Aufgabe 44) geeignet.<sup>13</sup>

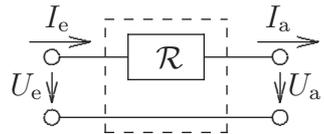
Mit  $\mathbb{M}^v(\omega)$  bezeichnen wir die Kettenmatrix des vertierten Vierpols (Eingang und Ausgang vertauscht):

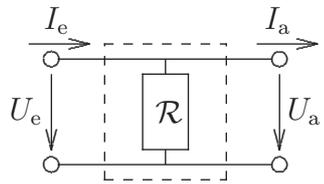
$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_a(\omega) \\ -\tilde{I}_a(\omega) \end{pmatrix} = \mathbb{M}^v(\omega) \begin{pmatrix} \tilde{U}_e(\omega) \\ -\tilde{I}_e(\omega) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

**Übungsaufgabe 44** Man zeige:

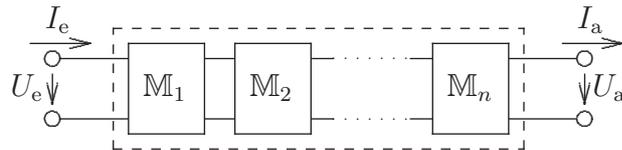
Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Für die Parallelschaltung von Vierpolen ist dagegen die Leitwertform der Vierpol-Matrix geeigneter (siehe z.B. (Lunze, 1967, S. 231)).

1.  $M(\omega) = M^v(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{R}(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für den Vierpol 

2.  $M(\omega) = M^v(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\mathcal{R}(\omega) & 1 \end{pmatrix}$  für den Vierpol 

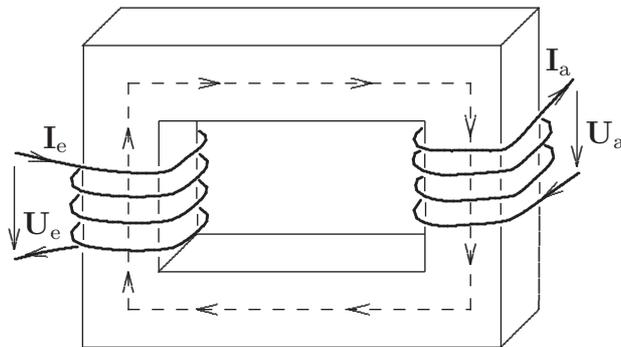
3.  $M(\omega) = M_1(\omega) M_2(\omega) \cdots M_n(\omega)$  für die Vierpolkette



4.  $M^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} +M_{11}^v(\omega) & -M_{12}^v(\omega) \\ -M_{21}^v(\omega) & +M_{22}^v(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^v \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$

5.  $M = M^v \iff (M_{11} = M_{22} \wedge \det M = 1) .$

Ein Beispiel für einen linearen Vierpol, der sich nicht durch einfache Vernetzung (sondern induktive Kopplung) konventioneller Zweipole ergibt, ist der sog. **Transformator**,



der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_e &= +L_{11}\dot{I}_e - L_{12}\dot{I}_a, \\ U_a &= -L_{22}\dot{I}_a - L_{21}\dot{I}_e, \\ \text{mit } \mathbf{Kopplungsgrad} \kappa &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{L_{12}L_{21}}{L_{11}L_{22}} \neq 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

charakterisiert ist (vgl. Aufgabe 30 von (Lücke, edyn)). Also ist die Kettenmatrix

$$\mathbb{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{L_{11}}{L_{21}} & iL_{12} \frac{1-\kappa}{L_{21}} \\ 1 & \frac{L_{22}}{L_{21}} \end{pmatrix} \text{ für den Transformator.} \quad (3.30)$$

**Übungsaufgabe 45** Man zeige (3.30) und dafür:

$$\det \mathbb{M}(\omega) = \frac{L_{12}}{L_{21}}.$$

Falls eine Formgröße  $F$  existiert mit

$$L_{jk} = n_j n_k F, \quad (3.31)$$

wobei  $n_1$  und  $n_2$  die entsprechenden Windungszahlen sind, nennt man den Transformator **fast ideal**. Dann ist der Kopplungsgrad  $\kappa = 1$  bzw. die sog. **Streuung**  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \kappa = 0$  und

$$\mathbb{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ \frac{1}{i\omega n_1 n_2 F} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \text{ für den fast idealen Transformator.} \quad (3.32)$$

Im Grenzfall  $F \rightarrow \infty$  nennt man den Transformator **ideal**.

**Anmerkung:** Die Gleichungen (3.29) und (3.31) ergeben sich durch einfache Anwendung der sog. quasistationären Näherung (Vernachlässigung von  $\frac{c}{\dot{\mathbf{E}}}$ )

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}}$$

der MAXWELLSchen Gleichungen (im GAUSSschen System), indem man

- (i) die durch Hysteresis bedingten Verluste vernachlässigt (Verwendung von  $\mu$ ),
- (ii) die Wirbelströme im Weicheisen vernachlässigt (aufgrund der Lamellen-Konstruktion möglich),
- (iii) den OHMSchen Widerstand der Wicklungen vernachlässigt und
- (iv) die Abhängigkeit des magnetischen Gesamtflusses durch den Eisenkernquerschnitt von der Schnittstelle vernachlässigt (*Streuungsfreiheit*).

Experimentell läßt sich die Kettenmatrix eines linearen Vierpols im Prinzip durch Kurzschluß- (d.h.  $\mathcal{R}_a = U_a = 0$ ) und Leerlauf-Betrieb (d.h.  $1/\mathcal{R}_a = I_a = 0$ ) bestimmen; denn:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{U}_e(\omega) = M_{12}(\omega) \tilde{I}_a(\omega) \\ \tilde{I}_e(\omega) = M_{22}(\omega) \tilde{I}_a(\omega) \end{array} \right\} \text{ bei Kurzschlußbetrieb,} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{U}_e(\omega) = M_{11}(\omega) \tilde{U}_a(\omega) \\ \tilde{I}_e(\omega) = M_{21}(\omega) \tilde{U}_a(\omega) \end{array} \right\} \text{ bei Leerlaufbetrieb.} \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Anwendung der HEAVISIDE-Methode

Ein Vierpol heiße *kausal*, falls er der Bedingung

$$U_e = I_e = 0 \forall t < 0 \iff U_a = I_a = 0 \forall t < 0 \quad (3.35)$$

genügt. Damit ist klar, daß sich die in 3.1.3 dargelegte HEAVISIDE-Methode auch zur Berechnung konventioneller kausaler Vierpole verwenden läßt:

Man schreibt<sup>14</sup> entsprechend (3.18)

$$\mathbb{M}(\omega)^{-1} = \left( \hat{P}_{jk}(\omega) + \frac{P_{jk}}{Q_{jk}} \right)_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} \quad (3.36)$$

für geeignete Polynome  $\hat{P}_{jk}$ ,  $P_{jk}$ ,  $Q_{jk}$  mit

$$\text{Grad}(P_{jk}) < \text{Grad}(Q_{jk}) \forall j, k \in \{1, 2\} .$$

und läßt die zu (3.27) quivalente Gleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_a(\omega) \\ \tilde{I}_a(\omega) \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\omega)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{U}_e(\omega) \\ \tilde{I}_e(\omega) \end{pmatrix} \text{ für fast alle } \omega \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

in direkter Verallgemeinerung von (3.11)/(3.22) durch

$$\begin{aligned} U_a(t) &= \hat{P}_{11} \left( -i \frac{d}{dt} \right) U_e(t) + \sum_{\substack{\text{Nullst. } z_j^{11} \\ \text{von } Q_{11}}} \int_{-\infty}^t a_j^{11}(t') U_e(t') dt' \\ &+ \hat{P}_{12} \left( -i \frac{d}{dt} \right) I_e(t) + \sum_{\substack{\text{Nullst. } z_j^{12} \\ \text{von } Q_{12}}} \int_{-\infty}^t a_j^{12}(t') I_e(t') dt' \end{aligned} \quad (3.38)$$

<sup>14</sup>Man beachte die 4. Aussage von Übungsaufgabe 44

sowie

$$\begin{aligned}
 I_a(t) = & \widehat{P}_{21} \left( -i \frac{d}{dt} \right) U_e(t) + \sum_{\substack{\text{Nullst. } z_j^{21} \\ \text{von } Q_{21}}} \int_{-\infty}^t a_j^{21}(t') U_e(t') dt' \\
 & + \widehat{P}_{22} \left( -i \frac{d}{dt} \right) I_e(t) + \sum_{\substack{\text{Nullst. } z_j^{22} \\ \text{von } Q_{22}}} \int_{-\infty}^t a_j^{22}(t') I_e(t') dt',
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
 a_l^{jk}(t) & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_l^{jk})} i \frac{P_{jk}(z)}{Q_{jk}(z)} e^{izt} dz \\
 & = i \frac{P_{jk}(z_l^{jk})}{Q'_{jk}(z_l^{jk})} e^{iz_l^{jk}t} \quad \text{falls } z_l^{jk} \text{ einfache Nullstelle von } Q_{jk}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

**Übungsaufgabe 46** Man zeige, daß

$$\widetilde{U}_e(\omega) = \frac{M_{11}(\omega)\mathcal{R}_a(\omega) + M_{12}(\omega)}{M_{21}(\omega)\mathcal{R}_a(\omega) + M_{22}(\omega)} \widetilde{I}_e(\omega) \tag{3.41}$$

gilt, wenn man den Vierpol mit  $\mathcal{R}_a(\omega) \neq 0, \infty$  abschließt.

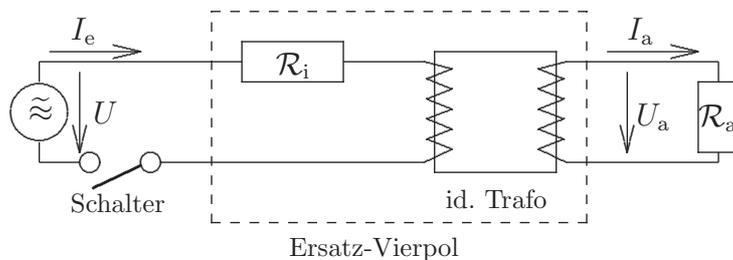
Mit (3.41) läßt sich (für rationales  $\mathcal{R}_a(\omega)$ ) entsprechend 3.1.3 je nach Wahl eine der beiden Größen  $U_e(t)$  oder  $I_e(t)$  in (3.38)/(3.39) eliminieren.

### 3.2.3 Beispiel: Einschalten eines belasteten Transformators

**Übungsaufgabe 47** Ein mit dem OHMschen Widerstand  $\mathcal{R}_a(\omega) = (n_1/n_2)^2 R$  abgeschlossener **idealer** Transformator werde zur Zeit  $t = 0$  an einen Generator der Wechselfrequenz

$$U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

mit Innenwiderstand  $\mathcal{R}_i(\omega) = R + i\omega L$  angeschlossen.



Man zeige:

$$U_a(t) = \begin{cases} \frac{n_2}{n_1} U_0 \Re \left( \frac{e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} - e^{-\frac{2R}{L}t + i\varphi_0}}{2 + i\omega_0 L/R} \right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



# Kapitel 4

## Dispersionsrelationen

### 4.1 Dispersion elektromagnetischer Wellen<sup>1</sup>

#### 4.1.1 Bedeutung und Analytizitätseigenschaften der Materialkonstanten

Das Verhalten elektromagnetischer Wellen in Materie wird (in Dipol-Näherung) durch die **MAXWELLSchen Gleichungen**

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{makro}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho_{\text{makro}}(\mathbf{x}, t), \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.4)$$

für die **makroskopischen** Felder gegeben, wobei  $(\rho_{\text{makro}}, \mathbf{J}_{\text{makro}})$  die Strom-Ladungsverteilung der **Überschußladungen** bezeichnet (vgl. (Lücke, edyn)). Dabei hängt die sog. **Magnetisierung**

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{4\pi} = \text{magn. Dipoldichte}$$

linear und (räumlich) lokal von  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , die sog. **dielektrische Polarisierung**

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{4\pi} = \text{elektr. Dipoldichte}$$

sowie die Stromdichte  $\mathbf{J}_{\text{makro}}(\mathbf{x}, t)$  linear und lokal von  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  ab — sofern die Gleichungen (4.1)–(4.3) überhaupt sinnvoll anwendbar sind.

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Vgl. mit H.-J. Borchers: *Eine Bemerkung zur Ausbreitung von Licht in dispergierenden Medien*

Für **homogene, isotrope** Medien sollten daher temperierte Distributionen  $\tilde{\chi}_e(t)$ ,  $\tilde{h}(t)$  und  $\tilde{\sigma}(t)$  existieren mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{h}(t-t') \mathbf{B}(\mathbf{x}, t') dt', \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\chi}_e(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt', \\ \mathcal{J}_{\text{makro}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\sigma}(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Einstufung vom  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  als Ursache und  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{J}_{\text{makro}}$  als Wirkung führt auf folgende **Kausalitätsbedingung**:<sup>2</sup>

$$\tilde{h}(t) = \tilde{\chi}_e(t) = \tilde{\sigma}(t) = 0 \quad \forall t < 0. \quad (4.6)$$

Weiterhin sollten die inversen FOURIER-Transformierten  $h(\omega)$ ,  $\chi_e(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  gewöhnliche Funktionen sein, die für  $\omega \rightarrow \pm\infty$  hinreichend schnell gegen Null konvergieren. Dann sind aber auch  $\tilde{h}(t)$ ,  $\tilde{\chi}_e(t)$ ,  $\tilde{\sigma}(t)$  gewöhnliche Funktionen, die zudem für  $t \rightarrow +\infty$  exponentiell abfallen sollten (gedämpfte Wirkung).

**Übungsaufgabe 48** Man zeige, daß die gemäß

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\rho \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) &= f(t), \\ x(t) = \dot{x}(t) &= 0 \quad \text{für } t < t_0, \end{aligned}$$

durch  $f(t)$  erzwungene, schwach (d.h.  $0 < \rho$  klein) gedämpfte Schwingung von der Form

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{r}(t-t') f(t') dt'$$

ist, wobei

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \rho^2 - (\omega + i\rho)^2}$$

in eine Umgebung der abgeschlossenen oberen komplexen Halbebene fortsetzbar ist und

$$\begin{aligned} \tilde{r}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int r(-\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \rho^2}{2\pi}} e^{-\rho t} \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}\right) \theta(t) \end{aligned}$$

gilt (vgl. Übungsaufgabe 43).

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Das exakte Verschwinden für  $t < 0$  ist nicht wirklich wichtig, aber eine zweckmäßige Idealisierung der makroskopischen Eigenschaften.

Dann folgt mit der Kausalitätsbedingung (4.6), daß

$$\begin{aligned} h(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{h}(t) e^{izt} dt \\ \chi_e(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\chi}_e(t) e^{izt} dt \quad (\text{dielektrische Suszeptibilität}) \\ \sigma(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\sigma}(t) e^{izt} dt \quad (\text{spezifische Leitfähigkeit}) \end{aligned}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung der **abgeschlossenen** oberen Halbebene holomorphe beschränkte Funktionen sind. Entsprechendes gilt somit für die sog. **Dielektrizitätskonstante**

$$\epsilon(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 4\pi \chi_e(\omega)$$

und die reziproke **Permeabilität**

$$1/\mu(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - 4\pi h(z).$$

Da  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{\chi}_e$  und  $\tilde{\sigma}$  reell sein müssen, folgen gemäß Regel 7 für die FOURIER-Transformation und dem Prinzip der analytischen Fortsetzung im Zusammenhang mit (2.18) die sog. **crossing relations**

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(z) &= \overline{\epsilon(-\bar{z})} \\ 1/\mu(z) &= \overline{1/\mu(-\bar{z})} \\ \sigma(z) &= \overline{\sigma(-\bar{z})} \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \Im(z) \geq 0. \quad (4.7)$$

Das asymptotische Verhalten auf der reellen Achse ist:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(\omega) &\rightarrow 1 \\ \mu(\omega) &\rightarrow 1 \\ \sigma(\omega) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \omega \rightarrow \pm\infty. \quad (4.8)$$

Bzgl. der inversen FOURIER-Transformierten

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \\ \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \\ \mathcal{D}(\mathbf{x}, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \\ \mathcal{B}(\mathbf{x}, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

hinsichtlich der Variablen  $t$  lauten die MAXWELLSchen Gleichungen unter der Voraussetzung (4.5) für den Fall  $\rho_{\text{makro}} = 0$ :

$$\text{rot } \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \left( \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi \sigma(\omega)}{\omega} \right) \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega). \quad (4.9)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) = i \frac{\omega \mu(\omega)}{c} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega).} \quad (4.10)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0,} \quad (4.11)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega) = 0.} \quad (4.12)$$

**Anmerkung:** Die Materialkonstanten  $\epsilon(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  gehen in die MAXWELLSchen Gleichungen also nur in der Kombination

$$\epsilon^+(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi \sigma(\omega)}{\omega}$$

ein, die man gewöhnlich als **komplexe Dielektrizitätskonstante** bezeichnet — obwohl aus physikalischer Sicht (vgl. Übungsaufgabe 48) bereits  $\epsilon(\omega)$  komplexwertig sein sollte. Wenn nur  $\epsilon^+(\omega)$  vorgegeben ist, kann man daher **mathematisch** so vorgehen, als seien  $\epsilon(\omega)$  und  $\sigma(\omega)$  reell, aber nicht für sich analytisch. Entsprechendes gilt für die **komplexe Leitfähigkeit**

$$\sigma^+(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\omega) - i \frac{\omega \epsilon(\omega)}{4\pi} \quad \left( = -i \frac{\omega}{4\pi} \epsilon^+(\omega) \right).$$

**Übungsaufgabe 49** Man zeige für beliebig vorgegebenes  $\omega \in \mathbb{R}$ , daß unter den Voraussetzungen (4.1)–(4.5)

$$\hat{\rho}_{\text{makro}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho_{\text{makro}}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} d\omega$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  Null sein muß, wenn  $\epsilon(\omega) \sigma^+(\omega)$  von Null verschieden **und**  $\rho_{\text{makro}} \in \mathcal{S}'$  ist.<sup>3</sup> Man diskutiere das Ergebnis physikalisch.

Aus (4.9)/(4.10) und (4.12) folgt wegen

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega)) = \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega)) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega)$$

(Entwicklungssatz) mit dem sog. **komplexen Brechungsindex**

$$\boxed{\mathcal{N}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mu(\omega) \left( \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi \sigma(\omega)}{\omega} \right)}} \quad \text{mit positivem Realteil} \quad (4.13)$$

<sup>3</sup>**Hinweis:** Man bilde die Divergenz beider Seiten von Gleichung (4.9) und verwende die Verallgemeinerung von (4.11) für den Fall  $\rho_{\text{makro}} \neq 0$ .

die Gleichung

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{N}(\omega)^2 \right) \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega) = 0.$$

Entsprechend ergibt sich

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{N}(\omega)^2 \right) \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

mit (4.11) anstelle von (4.12). Daher liegt der spezielle Lösungsansatz

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathbf{E}_0(\omega) \exp\left(i \frac{\omega \mathcal{N}(\omega)}{c} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)\right), \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathbf{H}_0(\omega) \exp\left(i \frac{\omega \mathcal{N}(\omega)}{c} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)\right) \\ \text{mit } \mathbf{s}(\omega) \cdot \mathbf{s}(\omega) &= 1 \end{aligned}} \quad (4.14)$$

nahe, der unter den Voraussetzungen

$$\boxed{\mathbf{s}(\omega) \cdot \mathbf{E}_0(\omega) = 0, \quad \mathbf{H}_0(\omega) = \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} \mathbf{s}(\omega) \times \mathbf{E}_0(\omega)} \quad (4.15)$$

den Gleichungen (4.9)–(4.12) tatsächlich genügt. Die Überlagerung der für  $\Im(\mathcal{N}(\omega)) \neq 0$  in Fortpflanzungsrichtung gedämpften, ebenen, elektromagnetischen Wellen

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{\beta(\omega)}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)} \mathbf{E}_0(\omega) e^{-i\omega \left(t - \frac{n(\omega)}{c} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)\right)} d\omega \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{\beta(\omega)}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)} \mathbf{H}_0(\omega) e^{-i\omega \left(t - \frac{n(\omega)}{c} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\omega)\right)} d\omega, \\ \text{mit : } \beta(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\omega}{c} \Im(\mathcal{N}(\omega)) \quad \mathbf{Absorptionskoeffizient}, \\ n(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \Re(\mathcal{N}(\omega)) \quad \mathbf{reeller Brechungsindex}, \end{aligned}} \quad (4.16)$$

mit Kreisfrequenz  $\omega$ , Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{s}(\omega)$  und Phasengeschwindigkeit  $c/n(\omega)$  stellt also eine spezielle Lösung der makroskopischen MAXWELLSchen Gleichungen (4.1)–(4.3) in einem homogenen, isotropen Medium mit den ( $\omega$ -abhängigen) Materialkonstanten  $\epsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  dar.

### 4.1.2 Analytizitätseigenschaften von $\mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)$

Aufgrund der erörterten Eigenschaften der Materialkonstanten ist

$$\boxed{g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon(z)}{\mu(z)} + 4\pi i \frac{\sigma(z)}{z \mu(z)}} \quad (4.17)$$

in einer Umgebung von

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \Im(z) \geq 0\}$$

holomorph und dort außerhalb jeder Umgebung von  $z = 0$  beschränkt. Außerdem gilt nach (4.13):

$$\boxed{\left(\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)}\right)^2 = g(\omega) \quad \text{für reelle } \omega \neq 0.} \quad (4.18)$$

Daraus folgt aber noch nicht, daß  $\mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)$  selbst Randwert einer entsprechenden holomorphen Funktion ist. Um das zu sehen, betrachten wir die orthogonale Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem homogenen, isotropen Medium mit der Materialkonstanten  $\mu(\omega)$ ,  $\epsilon(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$ , das den Halbraum  $x \geq 0$  ausfülle:

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  sei eine rechtshändige Orthonormalbasis mit  $\mathbf{e}_1$  in positiver  $x$ -Richtung. Im Vakuum links laufe eine ebene Welle

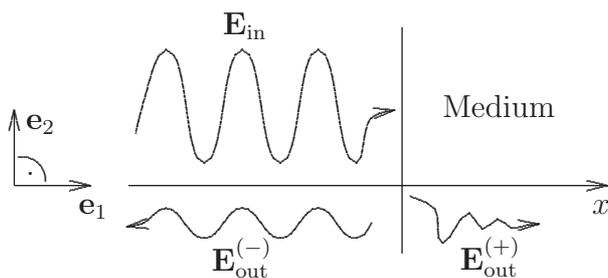
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{in}}(x, t) &= \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{2\pi}} \int E_{\text{in}}(\omega) e^{-i\omega(t-x/c)} d\omega, \\ \mathbf{H}_{\text{in}}(x, t) &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{E}_{\text{in}}(x, t) \end{aligned}$$

(vgl. (4.8)) auf die Grenzfläche zu. Die reflektierte Welle sei

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}}^{(-)}(x, t) &= \frac{-\mathbf{e}_2}{\sqrt{2\pi}} \int E_{\text{out}}^{(-)}(\omega) e^{-i\omega(t+x/c)} d\omega, \\ \mathbf{H}_{\text{out}}^{(-)}(x, t) &= -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{E}_{\text{out}}^{(-)}(x, t). \end{aligned}$$

Die im Medium fortlaufende, gedämpfte Welle sei

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}}^{(+)}(x, t) &= \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{2\pi}} \int E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) e^{-\frac{\beta(\omega)}{2}x} e^{-i\omega(t-\frac{n(\omega)}{c}x)} d\omega, \\ \mathbf{H}_{\text{out}}^{(+)}(x, t) &= \frac{\mathbf{e}_3}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) e^{-\frac{\beta(\omega)}{2}x} e^{-i\omega(t-\frac{n(\omega)}{c}x)} d\omega. \end{aligned}$$



Insgesamt liegt also die elektromagnetische Welle

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_{\text{out}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) & \text{für } x < 0, \\ \mathbf{E}_{\text{out}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) & \text{für } x > 0, \end{cases} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \begin{cases} \mathbf{H}_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}_{\text{out}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) & \text{für } x < 0, \\ \mathbf{H}_{\text{out}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

vor.  $E_{\text{out}}^{(-)}(\omega)$  und  $E_{\text{out}}^{(+)}(\omega)$  bestimmen sich aus  $E_{\text{in}}(\omega)$  aufgrund der Randbedingungen an der Grenzfläche. Aus (4.5) folgt nämlich bekanntlich (vgl. Abschn. 4.2.1 von (Lücke, edyn)), daß die zur Grenzfläche parallelen Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  stetig sein müssen. Im vorliegenden Fall bedeutet das

$$E_{\text{in}}(\omega) - E_{\text{out}}^{(-)}(\omega) = E_{\text{out}}^{(+)}(\omega)$$

und

$$E_{\text{in}}(\omega) + E_{\text{out}}^{(-)}(\omega) = \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} E_{\text{out}}^{(+)}(\omega).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) &= \frac{2}{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} + 1} E_{\text{in}}(\omega), \\ E_{\text{out}}^{(-)}(\omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} - 1 \right) E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) = \frac{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} - 1}{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} + 1} E_{\text{in}}(\omega) \end{aligned}$$

und somit für die reflektierte Welle gemäß Regel 10 für die FOURIER-Transformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}}^{(-)}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{r}(t - t') \mathbf{E}_{\text{in}}(x, t') dt' \\ \text{mit} & \\ \tilde{r}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} - 1}{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} + 1} e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Damit die reflektierte Welle nie auftreten kann, bevor die einfallende Welle die Grenzschicht erreicht, muß also

$$\tilde{r}(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \tag{4.20}$$

gelten. Entsprechend den für die Materialkonstanten bereits angestellten Überlegungen sollte sich

$$r(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} - 1}{\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} + 1} \tag{4.21}$$

zu einer in einer Umgebung der abgeschlossenen oberen komplexen Halbebene holomorphen, beschränkten Funktion  $r(z)$  fortsetzen lassen. Für  $r(\omega) \neq 1$  stimmt  $\left(\frac{1+r(\omega)}{1-r(\omega)}\right)^2$  gemäß (4.18) mit  $g(\omega)$  überein. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung stimmt daher  $\left(\frac{1+r(\omega)}{1-r(\omega)}\right)^2$  für alle  $z$  einer geeigneten Umgebung von  $P$  mit

$g(z)$  überein, für die  $r(z) \neq 1$  ist. Da  $g(z)$  in einer Umgebung von  $P$  holomorph, insbesondere also lokal beschränkt ist, muß  $r(z)$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $P$  von 1 verschieden sein. Folglich ist auch

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{\mu(z)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+r(z)}{1-r(z)}$$

in einer Umgebung von  $P$  (konsistent definiert) holomorph und dort außerhalb jeder Umgebung von  $z=0$  lokal beschränkt. Nach (4.13) und (4.8) gilt

$$\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} \rightarrow 1 \quad \text{für } \omega \rightarrow \pm\infty$$

und somit aufgrund des folgenden Satzes sogar

$$\boxed{\frac{\mathcal{N}(r e^{i\varphi})}{\mu(r e^{i\varphi})} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{gleichmäßig bzgl. } \varphi \in [0, \pi].} \quad (4.22)$$

**Satz 4.1.1 (PHRAGMÉN-LINDEÖF)** Sei  $R > 0$ , seien  $\varphi_0, \theta \in (0, 2\pi]$  und sei  $f(z)$  eine über dem abgeschlossenen Gebiet

$$G_{\theta,R} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z = r e^{i\varphi} : r \geq R, \varphi \in \left[ \varphi_0 - \frac{\theta}{2}, \varphi_0 + \frac{\theta}{2} \right] \right\}$$

stetige Funktion, die im Inneren von  $G_{\theta,R}$  holomorph ist und der Bedingung

$$\sup_{z \in G_{\theta,R}} e^{-|z|^p} |f(z)| < \infty$$

für geeignetes  $p < \frac{\pi}{\theta}$  genügt. Dann gilt:

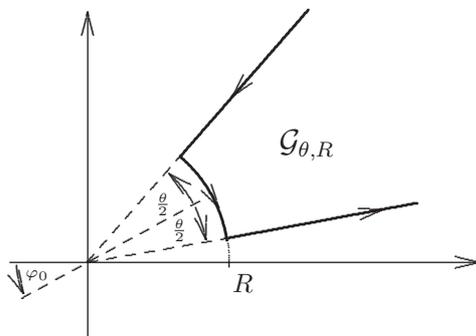
- $\sup_{z \in G_{\theta,R}} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial G_{\theta,R}} |f(z)|.$

2. Falls komplexe Zahlen  $a_{\pm}$  existieren mit

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r e^{i(\varphi_0 \pm \theta/2)}) = a_{\pm},$$

dann gilt:

$$f(r e^{i\varphi}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} a_+ = a_- \quad \text{gleichmäßig bzgl. } \varphi \in \left[ \varphi_0 - \frac{\theta}{2}, \varphi_0 + \frac{\theta}{2} \right].$$



**Übungsaufgabe 50** Man beweise<sup>4</sup> die 1. Aussage des Satzes von PHRAGMÉN-LINDELÖF mithilfe des Maximumprinzips (2.36). Die 2. Aussage beweise man für den Spezialfall<sup>5</sup>  $a_+ = a_- = 0$  unter der Voraussetzung hinreichend schnellen Abfalls von  $f(r e^{i(\varphi_0 \pm \theta/2)})$  für  $r \rightarrow +\infty$ .

### 4.1.3 KRAMERS-KRONIG-Relation

**Übungsaufgabe 51** Man beweise<sup>6</sup> folgenden **Hilfssatz**:

Sei  $f(\omega)$  über dem abgeschlossenen Intervall  $[\omega_0 - r, \omega_0 + r]$  absolut integrabel (vgl. Anfang von 1.3.3) und an der Stelle  $\omega_0$  differenzierbar. Dann gilt die sog. PLEMELJ-**Formel**<sup>7</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} \int_{\omega_0-r}^{\omega_0+r} \frac{f(\omega)}{\omega - (\omega_0 - i\epsilon)} d\omega = \int_{\omega_0-r}^{\omega_0+r} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \pm \frac{\pi}{i} f(\omega_0), \quad \text{wobei}$$

$$\int_{\omega_0-r}^{\omega_0+r} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow +0} \left( \int_{\omega_0-r}^{\omega_0-\delta} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0+\delta}^{\omega_0+r} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \right)$$

das CAUCHYSche **Hauptwertintegral** ist. (4.23)

Nach dem CAUCHYSchen Integralsatz (2.28) gilt aufgrund der Analytizität von  $\mathcal{N}(z)/\mu(z)$  für  $\tau, R > 0$  und  $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{C_R} \frac{1 - \mathcal{N}(z)/\mu(z)}{z - (\omega_0 - i\tau)} dz = 0,$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>**Hinweis:** Man untersuche zunächst

$$f_\epsilon(r e^{i\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\epsilon r^{p'} e^{ip'(\varphi - \varphi_0)}) f(r e^{i\varphi}) \quad \left( \Re(e^{ip'(\varphi - \varphi_0)}) > 0 \text{ für } \varphi \in \left( \varphi_0 - \frac{\theta}{2}, \varphi_0 + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

für  $\epsilon > 0$ ,  $p' \in (p, \pi/\theta)$ .

<sup>5</sup>Bzgl. des vollständigen Beweises siehe z.B. (Cartwright, 1962, S. 29).

<sup>6</sup>**Hinweis:** Man benutze die Identitäten

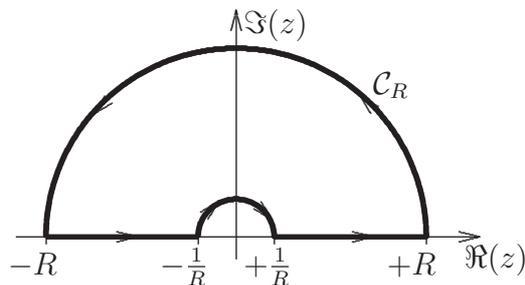
$$\int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \frac{f(\omega)}{\omega - (\omega_0 - i\epsilon)} d\omega = \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \frac{f(\omega) - f(\omega_0)}{\omega - (\omega_0 - i\epsilon)} d\omega + f(\omega_0) \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \frac{1}{\omega - (\omega_0 - i\epsilon)} d\omega$$

und

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z).$$

<sup>7</sup>Die PLEMELJ-Formel gilt auch für allgemeinere Kurvenstücke (siehe z.B. (Kyrälä, 1972, Abschn. 11.2)).

wobei  $\mathcal{C}_R$  folgenden geschlossenen Weg bezeichnet:



Aufgrund des asymptotischen Verhaltens (4.22) sowie der Harmlosigkeit der (in der Regel vorhandenen) Singularität von  $\mathcal{N}(z)/\mu(z)$  an der Stelle  $z = 0$  (vgl. (4.13)) folgt daraus für  $R \rightarrow +\infty$

$$\int \frac{1 - \mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)}{\omega - (\omega_0 - i\tau)} d\omega = 0 \quad \text{für } \tau > 0$$

und somit<sup>8</sup> nach (4.23)

$$1 - \mathcal{N}(\omega_0)/\mu(\omega_0) = \frac{1}{i\pi} \int \frac{1 - \mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad \text{für } \omega_0 \neq 0.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Re(1 - \mathcal{N}(\omega_0)/\mu(\omega_0)) &= -\frac{1}{\pi} \int \frac{\Im(\mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega))}{\omega - \omega_0} d\omega, \\ \Im(\mathcal{N}(\omega_0)/\mu(\omega_0)) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\Re(1 - \mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega))}{\omega - \omega_0} d\omega. \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Übungsaufgabe 52** Man zeige:<sup>9</sup>

$$\boxed{\mathcal{N}(z)/\mu(z) = \overline{\mathcal{N}(-\bar{z})/\mu(-\bar{z})} \quad \text{für } z \in P.} \quad (4.25)$$

Aus (4.25) und der ersten der Gleichungen (4.24) folgt

$$\Re(\mathcal{N}(\omega_0)/\mu(\omega_0) - 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Im\left(\frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)}\right) \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} + \frac{1}{\omega - \omega_0}\right) d\omega$$

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Setze  $f(\omega) = 1 - \mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)$ . Die Abbildung  $f(\omega) \mapsto \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$  bezeichnet man übrigens als **Hilbert-Transformation** (siehe z.B. (Titchmarsh, 1962, Kapitel V)).

<sup>9</sup>**Hinweis:** Man beachte die crossing relations (4.7) und die Definition (4.13) von  $\mathcal{N}(\omega)$ .

für  $\omega_0 \neq 0$  und daraus, zunächst nur<sup>10</sup> für  $\mu(\omega) = 1$ , mit den Definitionen (4.16) die sog. **KRAMERS-KRONIG-Relation**<sup>11</sup>

$$\boxed{n(\omega_0) - 1 = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad \text{für } \omega_0 \neq 0.} \quad (4.26)$$

**Übungsaufgabe 53**  $f(z)$  sei über  $[\omega_0 - r, \omega_0 + r]$  **HÖLDER-stetig**, d.h. es existiere ein sog. **HÖLDER-Index**  $\mu \in (0, 1]$  sowie eine sog. **HÖLDER-Konstante**  $\rho$  mit:

$$|f(\omega) - f(\omega')| \leq \rho |\omega - \omega'|^\mu \quad \forall \omega, \omega' \in [\omega_0 - r, \omega_0 + r].$$

Man zeige,<sup>12</sup> daß dann das Hauptwertintegral von  $\frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0}$  existiert und der Ungleichung

$$\left| \int_{\omega_0 - r}^{\omega_0 + r} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \right| \leq \rho \frac{(2r)^\mu}{\mu}$$

genügt.

Nach Übungsaufgabe 53 (vgl. auch (Titchmarsh, 1962, Theorem 91, S. 122)) muß man  $\beta(\omega)$  nicht genau kennen, um  $n(\omega_0)$  gemäß (4.26) angenähert zu bestimmen.

Aufgrund der KRAMERS-KRONIG-Relation ist Dispersion (d.h.  $n(\omega) \neq 1$  für geeignetes  $\omega$ ) ohne Absorption (d.h.  $\beta(\omega) \neq 1$  für geeignetes  $\omega$ ) **nicht** möglich, **wenn** das Medium (i.w.) den Kausalitätsbedingung (4.6) und (4.20) genügt.

**Übungsaufgabe 54** Das in 4.1.2 betrachtete Medium fülle nur das Gebiet  $0 \leq x \leq \delta$  aus. Die Bezeichnungen  $E_{\text{in}}(\omega)$ ,  $E_{\text{out}}^{(-)}(\omega)$  seien wie dort eingeführt, aber

$$\mathbf{E}_{\text{out}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{2\pi}} \int E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) e^{-i\omega(t-x/c)} d\omega$$

bezeichne nun das elektrische Feld im Gebiet  $x \geq \delta$ .

Man zeige, daß

$$E_{\text{out}}^{(-)}(\omega) = r_\delta(\omega) E_{\text{in}}(\omega)$$

mit

$$r_\delta(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\left(\frac{N(\omega)}{\mu(\omega)} - 1\right) \left(\frac{\mu(\omega)}{N(\omega)} + 1\right) + \left(\frac{N(\omega)}{\mu(\omega)} + 1\right) \left(\frac{\mu(\omega)}{N(\omega)} - 1\right) e^{i\frac{2\omega}{c} N(\omega) \delta}}{\left(\frac{N(\omega)}{\mu(\omega)} + 1\right) \left(\frac{\mu(\omega)}{N(\omega)} + 1\right) + \left(\frac{N(\omega)}{\mu(\omega)} - 1\right) \left(\frac{\mu(\omega)}{N(\omega)} - 1\right) e^{i\frac{2\omega}{c} N(\omega) \delta}}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Für allgemeines  $\mu(\omega)$  siehe Aufgabe 54.

<sup>11</sup>Bzgl. einer etwas anderen Herleitung siehe (Reider, 1997, Abschn. 2.2.4).

<sup>12</sup>**Hinweis:**

$$\int_{\omega_0 - r}^{\omega_0 - \epsilon} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\omega_0 + r} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \int_\epsilon^r \frac{f(\omega_0 + \omega) - f(\omega_0 - \omega)}{\omega} d\omega.$$

und

$$E_{\text{out}}^{(+)}(\omega) = d_{\delta}(\omega) E_{\text{in}}(\omega)$$

mit

$$d_{\delta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4 e^{i \frac{\omega}{c} (\mathcal{N}(\omega) - 1) \delta}}{\left( \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} + 1 \right) \left( \frac{\mu(\omega)}{\mathcal{N}(\omega)} + 1 \right) + \left( \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mu(\omega)} - 1 \right) \left( \frac{\mu(\omega)}{\mathcal{N}(\omega)} - 1 \right) e^{i \frac{2\omega}{c} \mathcal{N}(\omega) \delta}}$$

gilt und daß sich

$$\left( \frac{\partial}{\partial \delta} r_{\delta}(\omega) \right) \Big|_{\delta=0} = i \frac{4\omega}{c} (\mu(\omega) - \mathcal{N}(\omega))$$

sowie

$$\left( \frac{\partial}{\partial \delta} d_{\delta}(\omega) \right) \Big|_{\delta=0} = i \frac{\omega}{c} \left( \frac{\mu(\omega)^2 + \mathcal{N}(\omega)^2}{2\mu(\omega)} - 1 \right)$$

und damit auch  $\mu(\omega)$  und  $\mathcal{N}(\omega)$  auf eine Umgebung von  $P$  holomorph mit entsprechenden Beschränktheitseigenschaften fortsetzen lassen.

Nach Übungsaufgabe 54 gilt die KRAMERS-KRONIG-Relation (4.26) auch dann **exakt**, wenn  $\mu(\omega) \neq 1$  ist.

#### 4.1.4 Subtraktionen

Der Subtraktionsoperator

$$(\mathcal{A}f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z) - f(0)}{iz}$$

verbessert das Verhalten von  $f(z)$  im Unendlichen unter Erhaltung der Analytizitätseigenschaften und der crossing relation — sofern letztere erfüllt ist:

$$\boxed{f(z) = \overline{f(-\bar{z})} \implies (\mathcal{A}f)(z) = \overline{(\mathcal{A}f)(-\bar{z})}.} \quad (4.27)$$

Wichtig ist außerdem, daß der Realteil (bzw. der Imaginärteil) von  $(\mathcal{A}f)(z)$  den Imaginärteil (bzw. Realteil) von  $f(z) - f(0)$  bestimmt und umgekehrt. Falls  $f(z)$  in einer Umgebung der abgeschlossenen, oberen, komplexen Halbebene holomorph sowie polynomial beschränkt ist und falls

$$\frac{f(\omega)}{\omega^n} \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0$$

gilt, so ist  $(\mathcal{A}^n f)(z)$  ebenfalls in einer Umgebung der abgeschlossenen, oberen, komplexen Halbebene holomorph und erfüllt nach dem Satz von PHRAGMEN-LINDELÖF die Bedingung:<sup>13</sup>

$$(\mathcal{A}^n f)(r e^{i\varphi}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{gleichmäßig bzgl. } \varphi \in [0, \pi].$$

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Definitionsgemäß gilt  $(\mathcal{A}^0 f)(z) = f(z)$ .

Daher gelten die Gleichungen (4.24) auch für  $(\mathcal{A}^n f)(\omega)$  anstelle von  $1 - \mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)$ :<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}\Re((\mathcal{A}^n f)(\omega_0)) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{\Im((\mathcal{A}^n f)(\omega))}{\omega - \omega_0} d\omega, \\ \Im((\mathcal{A}^n f)(\omega_0)) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{\Re((\mathcal{A}^n f)(\omega))}{\omega - \omega_0} d\omega,\end{aligned}$$

**falls**  $f(z)$  in einer Umgebung der abgeschlossenen, oberen, komplexen Halbebene holomorph sowie polynomial beschränkt ist und

$$\frac{f(\omega)}{\omega^n} \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0$$

gilt.

(4.28)

**Übungsaufgabe 55** Man zeige<sup>15</sup> durch vollständige Induktion, daß

$$(\mathcal{A}^n f)(z) = \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k}{(iz)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(4.29)

Mit der crossing relation (4.25) ergibt sich analog zur Herleitung von (4.26):

$$\begin{aligned}\Re((\mathcal{A}^n f)(\omega_0)) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega \frac{\Im((\mathcal{A}^n f)(\omega))}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega, \\ \Im((\mathcal{A}^n f)(\omega_0)) &= -\frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Re((\mathcal{A}^n f)(\omega))}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega,\end{aligned}$$

für  $\omega_0 \neq 0$ , **falls**

$$f(\omega) = \overline{f(-\omega)}$$

für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  gilt und die Voraussetzungen von (4.28) erfüllt sind.

(4.30)

Man bezeichnet die Gleichungen (4.28)/(4.30) als **Dispensionsrelationen mit  $n$  Subtraktionen**.

**Übungsaufgabe 56** Man gebe eine physikalische Begründung für die Beziehungen

$$|r(\omega)|^2 \leq 1, \quad \left\| \mathcal{E}_{\text{out}}^{(+)}(0, \omega) \right\| \leq \left\| \mathcal{E}_{\text{in}}(0, \omega) \right\| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(vgl. 4.1.2) und beweise damit, daß  $r(z)$  in der abgeschlossenen, oberen, komplexen Halbebene keine negativen reellen Werte annehmen kann.<sup>16</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>14</sup>Vgl. auch (Nussenzweig, 1972, Theorem 1.6.1, S. 27).

<sup>15</sup>**Hinweis:** Man verwende die TAYLOR-Entwicklung von  $f(z)$  um die Stelle  $z = 0$  herum.

<sup>16</sup>**Hinweis:** Man verwende den Satz von PHRAGMÉN-LINDELÖF zum Beweis von  $|r(z)| \leq 1$  und

$\left| \frac{2}{\frac{\mathcal{N}(z)}{\mu(z)} + 1} \right| \leq 1$  für  $z \in P$  und beachte Übungsaufgabe 14.

Nach (4.25)/(4.21) und Übungsaufgabe 56 erfüllt

$$f_\epsilon(z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(r(z) + \epsilon) - \ln \epsilon$$

für beliebiges  $\epsilon > 0$  die Voraussetzungen von (4.30) für  $n = 0$ , wenn man den Imaginärteil von  $\ln$  auf das offene Intervall  $(-\pi, +\pi)$  beschränkt. Die zweite der Gleichungen (4.30) liefert dafür:

$$\boxed{\arg(r(\omega_0) + \epsilon) = -\frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln|r(\omega) + \epsilon|}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega;} \quad (4.31)$$

denn:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega = 0.} \quad (4.32)$$

(4.31) erlaubt eine Berechnung von  $r(\omega)$ , und damit von  $\mathcal{N}(\omega)/\mu(\omega)$ , aus dem experimentell leicht bestimmbar **Reflexionskoeffizienten**  $|r(\omega)|^2$ .

**Übungsaufgabe 57** Man beweise (4.32) und zeige damit, daß im Falle  $f(0) = \overline{f(0)}$  die erste der Gleichungen (4.30) für  $n = 1$  äquivalent ist zur zweiten der Gleichungen (4.30) mit  $n = 0$ .

## 4.2 Quantenmechanische Streuamplituden

### 4.2.1 Grundbeziehungen der 1-Teilchen-Streuung an Zentralpotentialen

Partikuläre Lösungen einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}),$$

wobei  $\hat{D}_{\mathbf{x}}$  ein **linearer** (partieller) Differentialoperator und  $g(\mathbf{x})$  eine vorgegebene Inhomogenität ist, konstruiert man gewöhnlich in der Form

$$\varphi_{\text{part}}(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Dabei ist  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  eine sog. **GREENsche Funktion** zu  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , d.h. eine Lösung der Differentialgleichung

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

deren genaue Auswahl sich nach den gewünschten Randbedingungen richtet (vgl. 2.2.1 und (3.11)/(3.14)). Die allgemeinste Lösung  $\varphi(\mathbf{x})$  ergibt sich dann durch Addition einer Lösung  $\varphi_0(\mathbf{x})$  des homogenen Problems

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} \varphi_0(\mathbf{x}) = 0$$

zu  $\varphi_{\text{part}}(\mathbf{x})$  :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' .$$

Entsprechend führt das Differentialgleichungsproblem

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})$$

auf das Integralgleichungsproblem

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' ,} \quad (4.33)$$

das sich für hinreichend gutartiges  $V$  durch Iteration (C. NEUMANNsche *Reihe*) lösen läßt, nämlich als Fixpunkt

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}_{\varphi_0}^n g , \quad g \text{ beliebig ,}$$

des Operators  $\hat{A}_{\varphi_0}$  :

$$\left( \hat{A}_{\varphi_0} f \right) (\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(\mathbf{x}) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' .$$

**Anmerkung:** Die Approximation  $\varphi \approx \hat{A}_{\varphi_0} \varphi_0$  bezeichnet man i.a. als *BORNsche Näherung*.

Im Falle der zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\boxed{\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}) \right) \varphi(\mathbf{x}) = E \varphi(\mathbf{x})} \quad (4.34)$$

identifiziert man

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + E$$

und wählt für  $E \geq 0$  :

$$\boxed{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{\exp\left(i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} .} \quad (4.35)$$

**Übungsaufgabe 58** Man zeige, daß (4.35) als Funktion von  $\mathbf{x}$  tatsächlich eine Lösung von (4.34) für das Potential  $V(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  darstellt.

Mit (4.33)–(4.35) ergibt sich

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^3 \int \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \left( \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right)}}_{\text{einlaufende ebene Welle}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \underbrace{\frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - |\mathbf{p}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} V(\mathbf{x}') \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{p} \quad (4.36)$$

für beliebiges (hinreichend gutartiges)  $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$  als Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung, wenn  $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  jeweils (die eindeutige) Lösung von

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.37)$$

ist. Für hinreichend gutartiges  $V(\mathbf{x})$  gilt aufgrund der speziellen Wahl der GREENSchen Funktion

$$\int \left| \Psi(\mathbf{x}, t) - \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^3 \int \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right)} d\mathbf{p}}_{\text{freies Wellenpaket}} \right|^2 d\mathbf{x} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0, \quad (4.38)$$

so daß sich für jede vernünftige einlaufende Situation die exakte Wellenfunktion in der Form (4.36) darstellen läßt. Für  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$  gilt

$$\frac{e^{\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{e^{\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| |\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} e^{-\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|}}$$

und somit

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \approx e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + u(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{e^{\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| |\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.39)$$

wobei:

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}| \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|}} V(\mathbf{x}') \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' .$$

Falls  $V(\mathbf{x})$  nur von  $|\mathbf{x}|$  abhängt, hängt  $u(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  nur von  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  und  $\vartheta = \angle \mathbf{p}, \mathbf{x}$  ab:

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = f\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \angle \mathbf{p}, \mathbf{x}\right)$$

für eine geeignete **Streuamplitude**  $f(E, \vartheta)$ ,  
**falls:**

$$V(\mathbf{x}) = U(|\mathbf{x}|).$$
(4.40)

Die Streuamplitude bestimmt den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \sigma(E, \Omega) = |f(E, \vartheta)|^2$$
(4.41)

und in einfacher Weise den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}}(E) = \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} \Im(f(E, 0))$$
(4.42)

(*optisches Theorem*, vgl. (Gottfried, 1966, Sect. 12.2)).

**Übungsaufgabe 59** Man zeige,<sup>17</sup> daß

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} (2\pi\hbar)^{-3} \int_{|\mathbf{p}| \leq R} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{E - \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + i\epsilon} d\mathbf{p} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E+i\epsilon)} |\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$$

für  $E, \epsilon > 0$  gilt und vergleiche die rechte Seite mit (4.35).

**Anmerkung:** Wir benutzen hier stets die Konvention<sup>18</sup>

$$\sqrt{z} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sqrt{|z|}}_{\geq 0} e^{\frac{i}{2} \arg z} \quad \text{mit } \arg z \in [0, 2\pi).$$

Funktionen (im wesentlichen) selbstadjungierter Operatoren, wie z.B. der **Propagator** (Zeitentwicklungsoperator)  $\hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$ , lassen sich mithilfe des Spektralsatzes (siehe z.B. (Reed und Simon, 1972, Theorem VIII.6)) exakt definieren und — solange man Faktoren nicht vertauscht — i.d. Regel wie gewöhnliche Funktionen behandeln. Daher erfüllt z.B.

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \Psi(\mathbf{x}, 0)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>17</sup>**Hinweis:** Man integriere in Kugelkoordinaten zunächst über die Winkel, setze den verbleibenden Integranden symmetrisch fort und gehe wie bei der Ableitung der HEAVISIDE-Formel (3.21) vor (vgl. (Gottfried, 1966, Sect. 12.1)).

<sup>18</sup>Die Funktion  $\sqrt{z}$  ist also längs des **Schnittes**  $\overline{\mathbb{R}_+}$  unstetig.

für hinreichend gutartiges  $\Psi(\mathbf{x}, 0)$  die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t).$$

Sei

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

wobei:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} \text{ mit geeignetem Definitionsbereich,} \\ \hat{V} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Multiplikation mit } V(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.43}$$

**Anmerkung:** Aus Übungsaufgabe 59 und (4.37) folgt nach Regel 10 zur FOURIER-Transformation die sog. LIPPMANN-SCHWINGER-*Gleichung*:

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \hat{H}_0 + i\epsilon} (V(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})),$$

wobei  $\hat{H}_0$  auf die Variable  $\mathbf{x}$  wirkt.

Dann erfüllt

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int \hat{U}_{\text{ret}}(t - t') \hat{V} \Psi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t') dt',$$

wobei:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{ret}}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}, \\ \Psi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \right)}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

für hinreichend gutartige  $V(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$  die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung und stimmt mit (4.36) überein, da im Einklang mit (4.35)

$$\int \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \right)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

gilt (Beweis als Übungsvorschlag).

## 4.2.2 Analytizitätseigenschaften der Streuamplitude

Der *retardierte Propagator*  $\hat{U}_{\text{ret}}(t)$  läßt sich entsprechend der HEAVISIDE-Formel (3.21) durch die sog. *Resolvente*

$$\hat{R}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z - \hat{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \text{Spektrum}(\hat{H})$$

von  $\hat{H}$  ausdrücken:

$$\theta(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} = \frac{e^{\epsilon t}}{2\pi i} \int \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E + i\epsilon - \hat{H}} dE \quad \forall \epsilon > 0, t \in \mathbb{R}. \quad (4.45)$$

Nach Regel 10 für die FOURIER-Transformation folgt daraus

$$\begin{aligned} & \int e^{-\epsilon|t-t'|} \hat{U}_{\text{ret}}(t-t') \hat{V} \Psi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) dt' \\ &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon - \hat{H}} \hat{V} e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}\right)} d\mathbf{p} \end{aligned}$$

für  $\epsilon > 0$  und  $\Psi_{\text{in}}$  gemäß (4.44) und damit

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \left( e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0 - \hat{H}} \left( V(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t} d\mathbf{p}. \quad (4.46)$$

**Anmerkung:** Es sei daran erinnert, daß  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$  und  $V(\mathbf{x})$  immer hinreichend gutartig vorausgesetzt sind, so daß sich auch die in (4.46) vorgenommene Vertauschung von  $\epsilon$ -Limes und  $\mathbf{p}$ -Integration — mit etwas Mühe — rechtfertigen läßt, wobei die Konvergenz unter dem Integral gleichmäßig bzgl.  $\mathbf{x}$  ist.

**Übungsaufgabe 60** Man zeige, daß

$$\hat{R}(z) = \frac{\hat{R}_0}{1 - \hat{R}_0(z) \hat{V}}$$

für  $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Spektrum}(\hat{H})$  gilt, wobei  $\hat{R}_0(z)$  die Resolvente von  $\hat{H}_0$  bezeichnet.

Im Grenzübergang  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \rightarrow \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  ergibt sich durch Vergleich von (4.36)/(4.37) und (4.46):

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon - \hat{H}} \left( V(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right). \quad (4.47)$$

Wir nehmen an, daß

$$V(\mathbf{x}) = U(|\mathbf{x}|) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \sup_{r \geq 0} e^{(\lambda+\delta)r} |U(r)| \leq \infty \quad (4.48)$$

für geeignete  $\lambda, \delta > 0$  gilt.<sup>19</sup> Da die Resolvente außerhalb jeder Umgebung des Spektrums von  $\hat{H}$  holomorph und beschränkt (bzgl. der Operatornorm-Topologie) ist, folgt aus (4.47), daß für jeden Einheitsvektor  $\mathbf{e}$

$$\varphi_{\sqrt{2mE}\mathbf{e}}(\mathbf{x}) - e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Phi_{E+i\epsilon}^{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \quad (4.49)$$

gilt, wobei die  $z$ -abhängige Schar der Funktionen

$$\Phi_z^{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2mz} - \hat{H}} \left( V(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}} \right)$$

nach Voraussetzung (4.48) für  $|\Im(\sqrt{2mz})| \leq \lambda\hbar$  außerhalb jeder  $\epsilon$ -Umgebung des Spektrums von  $\hat{H}$  bzgl. der  $L^2$ -Norm holomorph und beschränkt ist.

Im Falle (4.48) besteht das Spektrum von  $\hat{H}$  aus dem Kontinuum  $\overline{\mathbb{R}_+}$  und endlich vielen Energie-Eigenwerten  $E_1, \dots, E_N$ , die gebundenen Zuständen entsprechen:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_z^{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \text{ für jedes } \epsilon > 0 \text{ holomorph und beschränkt als } L^2\text{-wertige Funk-} \\ \text{tion von } z \text{ über} \\ \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \Im(\sqrt{2mz}) \right| \leq \lambda\hbar \text{ } z \notin U_\epsilon(\{E_1, \dots, E_N\} \cup \mathbb{R}_+) \right\} . \end{array} \right\} \quad (4.50)$$

Führt man die asymptotische Betrachtung von (4.37), die auf (4.39) führte, für die BORNsche Näherung von  $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  ( $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  anstelle von  $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  auf der rechten Seite von (4.37)) durch, so ergibt sich die Streuamplitude in BORNscher Näherung:

$$u_{\text{B}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{x})\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' ,$$

wobei:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{p}| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \mathbf{p} \quad \text{Impulsübertrag} .$$
(4.51)

Unter der Voraussetzung (4.48) ist  $u_{\text{B}}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  eine Funktion allein des Betrags des Impulsübertrags

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = |\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{x})| = \sqrt{2\mathbf{p}^2 (1 - \cos \angle \mathbf{p}, \mathbf{x})} \quad (4.52)$$

<sup>19</sup>Diese Bedingung ist z.B. für da YUKAWA-Potential erfüllt.

mit offensichtlichen Analytizitätseigenschaften:

$$\begin{aligned}
 & U_B(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = A_B(\tau(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\
 & \text{wobei:} \\
 & A_B(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar} z \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}'} U(|\mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' \quad \text{holomorph für } |\Im(z)| < \lambda\hbar.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Setzt man in (4.39) die exakte Funktion  $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  ein, so ergibt sich die Streuamplitude als Funktion von Energie und Betrag des Impulsübertrags

$$A(E, \tau(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \angle \mathbf{p}, \mathbf{x}\right) \tag{4.54}$$

mit (4.49) zu

$$A_B(\tau(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{\mathbf{p}^2 + i2m\epsilon} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \Phi_{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}^{\mathbf{p}/|\mathbf{p}|}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Leider reichen die damit aus (4.50) für  $A(E, \tau)$  folgenden Analytizitätseigenschaften zur Ableitung von Dispersionsrelationen noch nicht aus (**wenn** (4.48) **nicht** für beliebiges  $\lambda > 0$  gilt), verdeutlichen aber die wesentliche Struktur:

Mit erheblichem Mehraufwand läßt sich zeigen (Khuri, 1957), daß  $A(E, \tau)$  für festes  $\tau \in [0, 2\lambda\hbar]$  folgende Eigenschaften besitzt:

1.  $A(E, \tau)$  ist Randwert einer in  $\mathbb{C} \setminus (\{E_1, \dots, E_N\} \cup \overline{\mathbb{R}_+})$  holomorphen Funktion  $f(z)$ :

$$A(E, \tau) = f(E + i0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f(E + i\epsilon) \quad \forall E \geq \frac{\tau^2}{8m}.$$

2.  $A(E, \tau)$  ist für  $E > 0$  TAYLOR-entwickelbar.

- 3.

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (\{E_1, \dots, E_N\} \cup \overline{\mathbb{R}_+}) .$$

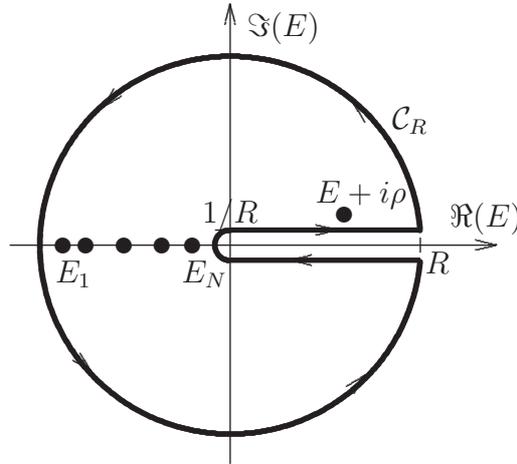
- 4.

$$f(r e^{i\varphi}) - A_B(\tau) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{gleichmäßig bzgl. } \varphi \in (0, 2\pi) .$$

5.  $z = 0$  ist lediglich ein Verzweigungspunkt von  $f(z)$ , in dessen Umgebung die Funktion beschränkt bleibt.

### 4.2.3 Dispersionsrelationen für festen Impulsübertrag

Für den Weg



folgt aufgrund der CAUCHYSchen Integralbeziehungen (2.28)/(2.32) aus der 1. Eigenschaft von  $A(E, \tau)$  für  $\rho > 0$   $E \in \mathbb{R} \setminus \{0, E_1, \dots, E_n\}$  und hinreichend großes  $R > 0$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) - A_B(\tau)}{z - (E + i\rho)} dz = f(E + i\rho) - A_B(\tau) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{1/R}(E_j)} \frac{f(z)}{z - (E + i\rho)} dz. \quad (4.55)$$

Aus der 4. und der 5. Eigenschaft folgt andererseits

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) - A_B(\tau)}{z - (E + i\rho)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\mathbb{R}^+}} \frac{f(z) - A_B(\tau)}{z - (E + i\rho)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(E' + i0) - f(E' - i0)}{E' - (E + i\rho)} dE', \end{aligned}$$

was aufgrund der 3. Eigenschaft mit

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(E' + i0)}{E' - (E + i\rho)} dE'$$

übereinstimmt und für  $\rho \rightarrow +0$  gemäß (4.23) in

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(E' + i0)}{E' - E} dE' + i \Im(f(E + i0))$$

übergeht. Damit folgt aus (4.55) die Dispersionsrelation

$$\boxed{\begin{aligned} \Re(f(E + i0)) &= A_B(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(E' + i0)}{E' - E} dE' \\ &\quad - \sum_{j=1}^N A_j(E, \tau) \quad \forall E \in \mathbb{R} \setminus \{0, E_1, \dots, E_N\}, \end{aligned}} \quad (4.56)$$

wobei  $A_j(E, \tau)$  jeweils das Residuum

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(E_j)} \frac{f(z)}{z - E} dz$$

der Funktion  $\frac{f(z)}{z-E}$  von  $z$  an der Stelle  $z = E_j \neq E$  ist. Da die isolierten Singularitäten von  $f(z)$  nur einfache Pole sind, folgt gemäß der CAUCHYSchen Formel (2.32):

$$A_j(E, \tau) = \frac{R_j(\tau)}{E_j - E} \quad \text{für } j = 1, \dots, N,$$

wobei:

$$R_j(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(E_j)} f(z) dz \quad \text{reell,}$$
(4.57)

Nach (4.56) haben die gebundenen Zustände deutlichen Einfluß auf die Streuamplitude! Im Falle  $\tau = 0$ , d.h. für **Vorwärtsstreuung**, stimmt  $f(E + i0)$  für alle  $E \geq 0$  mit der Streuamplitude  $A(E, 0)$  und somit nach dem optischen Theorem (4.42) mit  $\frac{2mE \sigma_{\text{tot}}(E)}{4\pi\hbar}$  überein.

Für Vorwärtsstreuung ist also das Hauptwertintegral auf der rechten Seite von (4.56) im Prinzip experimentell bestimmbar. Für  $\tau > 0$  ist dagegen  $A(E, \tau)$  nach (4.52) nur für  $E \geq \frac{\tau^2}{8m}$  als Streuamplitude definierbar. In diesem Falle bestimmt man  $\Im(f(E + i0))$  im unphysikalischen Bereich  $0 \leq E \leq \frac{\tau^2}{8m}$  durch Partialwellenentwicklung (Khuri, 1957).



# Literaturverzeichnis

- Brown, R. G. und Nilsson, J. W. (1962). *Introduction to Linear Systems Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. 62
- Carson, J. R. (1953). *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y. 62
- Cartwright, M. L. (1962). *Integral Functions*. Cambridge University Press. 77
- Doetsch, G. (1950–1956). *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I–III. Birkhäuser Verlag. 56
- Doetsch, G. (1958). *Einführung in die Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag. 56
- Gottfried, K. (1966). *Quantum Mechanics*. W. A. Benjamin, Inc. 85
- Hörmander, L. (1967). *An Introduction to COMPLEX ANALYSIS in Several Variables*. D. Van Nostrand Company, Inc. 32
- Khuri, N. N. (1957). . *Phys. Rev.*, 107:1148–1156. 89, 91
- Kyrala, A. (1972). *Applied Functions of a Complex Variable*. Wiley-Interscience. 3, 30, 43, 77
- Lücke, W. (edyn). *Elektrodynamik* .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf>. 64, 69, 75
- Lücke, W. (ein). *Mathematische Methoden der Physik*.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf>. 16, 17, 61
- Lunze, K. (1967). *Berechnung elektrischer Stromkreise*. VEB Verlag Technik, Berlin. 55, 62
- Magnus, M. und Oberhettinger, F. (1949). *Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*. Springer-Verlag. 45
- Mathis, W. (1987). *Theorie nichtlinearer Netzwerke*. Hochschultext. Springer-Verlag. 62

- Moon, P. und Spencer, D. E. (1961). *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, Berlin·Göttingen·Heidelberg. 20
- Nussenzweig, H. M. (1972). *Causality and Dispersion Relations*, Band 95 von *Mathematics in science and engineering*. Academic Press. 81
- Papoulis, A. (1962). *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill Book Company, Inc. 62
- Reed, M. und Simon, B. (1972). *Methods in Modern Mathematical Physics*, Band I: Functional Analysis. Academic Press. 85
- Reider, G. (1997). *Photonik*. Springer-Verlag. 15, 79
- Schouten, J. P. (1961). *Operatorenrechnung*. Springer-Verlag. 62
- Sommerfeld, A. (1964). *Elektrodynamik*, Band III von *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig. 11
- Titchmarsh, E. C. (1962). *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press. 78, 79
- Voelker, D. und Doetsch, G. (1950). *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag. 56
- Wagner, K. W. und Thoma, A. (1962). *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*. Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig. 62