

Einführung in die  
Allgemeine Relativitätstheorie

---

vorläufiges Skript

SS 2000

W. Lücke



## Vorwort

Der Stand der Allgemeinen Relativitätstheorie läßt auch heute noch sehr zu wünschen übrig — aus experimenteller Sicht, weil z.B. Gravitationswellen immer noch nicht nachgewiesen werden konnten, und aus theoretischer Sicht, weil z.B. immer noch kein konsistentes Quantisierungsverfahren entwickelt werden konnte.

In der Vorlesung werden nur die einfachsten Änderungen der NEWTONSchen Gravitationstheorie besprochen, um die Grundvorstellungen besonders klar hervorzuheben. Es wird weder *Torsion* eingeführt, noch der Formalismus lokaler Eichtheorien noch die Quantisierung oder gar Supergravitation abgehandelt.

**Literaturempfehlungen:** (Einstein, 1956; Lord, 1976; Misner et al., 1973; Rindler, 1969; Schrödinger, 1960; Wald, 1984; Fischer und Kaul, 2003; Will, 1993)



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Grundideen</b>	<b>9</b>
1.1	Differentialgeometrie der Elastizität . . . . .	9
1.1.1	Deformationen . . . . .	9
1.1.2	Der metrische Tensor . . . . .	10
1.1.3	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	17
1.2	Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	25
1.2.1	Übertragung differentialgeometrischer Konzepte . . . . .	25
1.2.2	Die Geodätenhypothese . . . . .	29
1.2.3	Relativbeschleunigung . . . . .	31
1.2.4	Feldgleichungen . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Analyse der Feldgleichungen</b>	<b>35</b>
2.1	Die Vakuum-Feldgleichungen . . . . .	35
2.1.1	Statische sphärisch symmetrische Lösungen . . . . .	35
2.1.2	Effekte der äußeren Lösung . . . . .	38
2.1.3	Innerhalb des Schwarzschild-Radius . . . . .	49
2.2	Sphärisch symmetrische Massenverteilungen . . . . .	53
2.2.1	Energie-Spannungs-Tensor und Lösungsansatz . . . . .	53
2.2.2	Auswertung der Feldgleichungen . . . . .	54
<b>II</b>	<b>Kosmologie</b>	<b>57</b>
<b>3</b>	<b>Homogene und Isotrope Modelle</b>	<b>59</b>
3.1	Robertson-Walker-Metriken . . . . .	59
3.1.1	Grundsätzliches . . . . .	59
3.1.2	Kosmologische Rotverschiebung und Horizonte . . . . .	61
3.1.3	Auswertung der Feldgleichungen . . . . .	63
3.2	Spezielle Lösungen . . . . .	64
3.2.1	Masselose kosmologische Modelle . . . . .	64
3.2.2	Kosmologische Modelle zu staubförmiger Materie . . . . .	66
3.2.3	Kosmologische Modelle zu thermischer Strahlung . . . . .	67

<b>A</b>	<b>Isotrope 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten</b>	<b>69</b>
A.1	Spezielle Form des Riemann-Tensors . . . . .	69
A.2	Prototypen . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Moderner Formalismus</b>	<b>73</b>
B.1	Äußere Ableitung . . . . .	73
B.2	Konnexionsform . . . . .	75
B.3	Krümmungsform . . . . .	78
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# Teil I

## Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie





# Kapitel 1

## Grundideen

### 1.1 Differentialgeometrie der Elastizität

#### 1.1.1 Deformationen

Die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten wird besonders anschaulich, wenn man sich – wie stets möglich (siehe (Whitney, 1936), (Whitney, 1944), (Brickel und Clark, 1970)) – die jeweilige Mannigfaltigkeit in einen ungekrümmten Raum eingebettet vorstellt. Um diese Vorstellung zu konkretisieren gehen wir von Untermannigfaltigkeiten des 3-dimensionalen Anschauungsraumes aus, wie sie sich in der Elastizitätstheorie ergeben.

#### Mathematisches Modell

Gegeben sei ein *fester* (nicht ‘starrer’) *Körper*, als Menge **identifizierbarer** Punkte  $P$  aufgefaßt, die ein ‘vernünftiges’ Raumgebiet ganz ausfüllen.

Unter einem **Verzerrungszustand** dieses Körpers verstehen wir eine (hinreichend gutartige) rückeindeutige Abbildung  $X : P \mapsto X(P)$  der Körperpunkte  $P$  in den  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $X(P)$  jeweils der Ort des Körperpunktes  $P$  ist.<sup>1</sup>

Unter einer **Deformation** versteht man eine Abweichung von einem ausgezeichneten, als ‘unverzerrt’ angesehenen Zustand  $X_0(P)$ .

#### Koordinaten

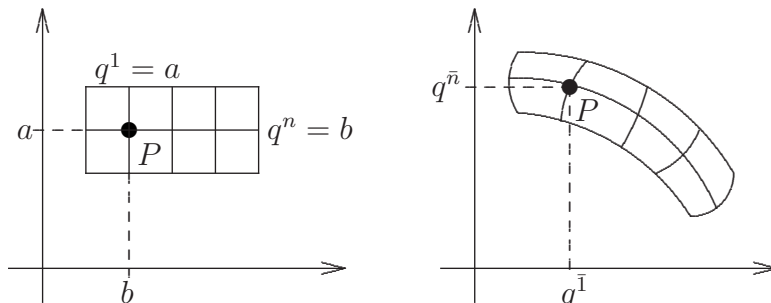
Seien  $(q^1, \dots, q^n)$  die Koordinaten des Ortes  $X_0(P)$  von  $P$  im **unverzerrten** Körperzustand bzgl. eines vorgegebenen **kartesischen** Koordinatensystems  $K_0$ . Markiert

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Gewöhnlich ist also  $n = 3$ . Im Hinblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie ist es jedoch zweckmäßig, die Raumdimension  $n$  nicht zu spezifizieren.

man diese Koordinaten jeweils am entspr. Körperpunkt, so werden sie durch Deformation des Körpers (Verschiebung des Körperpunktes  $P$  jeweils vom Ort  $X_0(P)$  an den Ort  $X(P)$ ) verzerrt, d.h. **krummlinig**. Die Koordinaten bzgl.  $K_0$  für den verschobenen Ort  $X(P)$  seien  $(q^{\bar{1}}, \dots, q^{\bar{n}})$ :



Eine Deformation des Körpers läßt sich so eindeutig durch die Zuordnung

$$(q^1, \dots, q^n) \mapsto (q^{\bar{1}}, \dots, q^{\bar{n}})$$

beschreiben,<sup>2</sup> die natürlich rückerdeutig (*injektiv*) sein muß.

## 1.1.2 Der metrische Tensor

### Kurvenlänge in $q$ und $x$ -Koordinaten

Sei  $q^j(t)$   $t \in [t_1, t_2]$ , bezogen auf  $K_0$ , eine Parametrisierung eines glatten Kurvenstücks des unverzerrten Körpers. Durch Deformation des Körpers geht dieses Kurvenstück in das durch

$$q^{\bar{j}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} q^{\bar{j}}(q^1(t), \dots, q^n(t)), \quad t \in [t_1, t_2]$$

bzgl.  $K_0$  gegebene Kurvenstück über. Dafür gilt:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \text{Länge vor Deformation} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{q}^j(t) \dot{q}^j(t)} dt, \\ \text{Länge nach Deformation} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{\bar{j}=1}^n \dot{q}^{\bar{j}}(t) \dot{q}^{\bar{j}}(t)} dt. \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>In der Formulierung von LAGRANGE wird der Verzerrungstensor bzgl. der  $(q^1, \dots, q^n)$ , in der Formulierung von EULER dagegen bzgl. der  $(q^{\bar{1}}, \dots, q^{\bar{n}})$  angegeben. Wir schreiben  $(q^{\bar{1}}, \dots, q^{\bar{n}})$  (*Kern-Index-Schreibweise*) statt  $(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n)$ , um auszudrücken, daß wir auch die  $(q^1, \dots, q^n)$  den Punkten des **verzerrten** Körpers als (krummlinige) Koordinaten zuordnen.

<sup>3</sup>Wir schreiben allgemein  $\dot{f}(t)$  für  $\frac{d}{dt}f(t)$ .

Nach der verallgemeinerten Kettenregel:<sup>4</sup>

$$\dot{q}^{\bar{j}} = \frac{\partial q^{\bar{j}}}{\partial q^k} \dot{q}^k. \quad (1.1)$$

Kurzschrift dafür:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{t}_k dq^k,$$

wobei:<sup>5</sup>

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q^{\bar{1}} \\ \vdots \\ q^{\bar{n}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial q^{\bar{1}}}{\partial q^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial q^{\bar{n}}}{\partial q^k} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{t}_k(q^1, \dots, q^n)$  ist jeweils der (i.a. nicht normierte) Tangentenvektor der Kurve

$$\mathbf{x}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(q^1, \dots, \underbrace{t}_{k\text{-te Stelle}}, \dots, q^n)$$

an der Stelle  $t = q^k$ .

Für eine beliebige (aber hinr. gutart.) Kurve  $\mathbf{x}(t)$  folgt aus (1.1) und (1.2):

$$\sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{n}} \dot{q}^{\bar{j}} \dot{q}^{\bar{j}} = \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{t}_k \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Kurzschrift dafür:

$$(d\mathbf{x})^2 = g_{jk} dq^j dq^k, \quad (1.3)$$

wobei:

$$g_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{t}_k = \sum_{\bar{l}=\bar{1}}^{\bar{n}} \frac{\partial q^{\bar{l}}}{\partial q^j} \frac{\partial q^{\bar{l}}}{\partial q^k}. \quad (1.4)$$

Damit gilt also:<sup>6</sup>

$$\text{Länge nach Deformation} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{jk}(q) \dot{q}^j \dot{q}^k} dt.$$

Daher nennt man die  $g_{jk}$  die (kovarianten) Komponenten des **metrischen Tensors** des deformierten Körpers bzgl. der krummlinigen Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Wir benutzen die **EINSTEINsche Summationskonvention**: Wenn in einem Produkt der gleiche Index doppelt auftritt (einmal als oberer, zum anderen als unterer Index), ist darüber zu summieren.

<sup>5</sup>Man identifiziert i.a.  $\mathbf{t}_k$  mit der entsprechenden LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{t}_k} = \frac{\partial}{\partial q^k}$  und spricht in diesem Sinne von dem (lokalen) "Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial q^k}$ ". Letzteres macht auch für nichtlineare Mannigfaltigkeiten Sinn.

<sup>6</sup>Dies ist die präzise Bedeutung von (1.3).

### Koordinatenwechsel

Sei  $(q^1, \dots, q^{n'})$  jetzt ein **beliebiges krummliniges** Koordinatensystem; d.h. jedem Körperpunkt  $P$  (im verzerrten Zustand) sei rückerdeutig ein  $n$ -Tupel  $(q^1, \dots, q^{n'})$  zugeordnet. Die karthesischen Koordinaten  $q^j$  von  $X_0(P)$  bzgl.  $K_0$  (krummlinige Koordinaten von  $X(P)$ ) sind dann eindeutig durch die  $q^{k'}$  gegeben:  $q^j = q^j(q^1, \dots, q^{n'})$ .

Sei nun  $q^{j'}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  die entspr. Parametrisierung des verzerrten Kurvenstücks. Wegen

$$\dot{q}^j = \frac{\partial q^j}{\partial q^{l'}} \dot{q}^{l'}$$

ergibt sich dann für die entspr. Körperpunktkurve

$$\begin{aligned} \text{Länge vor Deformation} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{l'm'}^{(0)} \dot{q}^{l'} \dot{q}^{m'}} dt, \\ \text{Länge nach Deformation} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{l'm'} \dot{q}^{l'} \dot{q}^{m'}} dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei:

$$g_{l'm'}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q^j}{\partial q^{l'}} \frac{\partial q^j}{\partial q^{m'}}, \quad (1.6)$$

$$\boxed{g_{l'm'} = \frac{\partial q^j}{\partial q^{l'}} \frac{\partial q^k}{\partial q^{m'}} g_{jk}}. \quad (1.7)$$

Das Transformationsverhalten (1.7) ist das der **kovarianten Komponenten eines Tensors 2. Stufe**. ‘Kovarianz’ meint dabei analoges Transformationsverhalten zu demjenigen der Tangentialvektoren:<sup>7</sup>

$$\mathbf{t}_{j'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial q^{j'}} \\ \vdots \\ \frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \end{pmatrix} = \frac{\partial q^k}{\partial q^{j'}} \mathbf{t}_k. \quad (1.8)$$

Mit (1.4) und (1.7) folgt daraus

$$g_{j'k'} = \mathbf{t}_{j'} \cdot \mathbf{t}_{k'}. \quad (1.9)$$

Das Transformationsverhalten der durch

$$\mathbf{t}^j \cdot \mathbf{t}_k = \delta_k^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.10)$$

<sup>7</sup>Eigentlich müßte man von Tensor- und Vektor-**Feldern** sprechen. Man beachte, daß  $(q^1, \dots, q^{n'})$  und  $(q^1, \dots, q^n)$  einunddesselben Körperpunkt (im verzerrten Zustand) kennzeichnen,  $\mathbf{t}_{j'}$  und  $\mathbf{t}_j$  jedoch unterschiedliche Vektoren (da zu unterschiedlichen Koordinatenlinien tangential).

und bzgl. der gestrichenen Koordinaten entsprechend, d.h. durch

$$\mathbf{t}^{j'} \cdot \mathbf{t}_{k'} = \delta_{k'}^{j'} = \begin{cases} 1 & \text{für } j' = k' \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.11)$$

definierten *reziproken Basis*<sup>8</sup>

$$\mathbf{t}^j = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^j}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial q^j}{\partial q^n} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.12)$$

ist im Vergleich dazu *kontravariant*.<sup>9</sup>

$$\mathbf{t}^{j'} = \frac{\partial q^{j'}}{\partial q^k} \mathbf{t}^k. \quad (1.13)$$

Demgemäß ist das Transformationsverhalten der

$$g^{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}^j \cdot \mathbf{t}^k = \sum_{\bar{l}=1}^{\bar{n}} \frac{\partial q^j}{\partial q^{\bar{l}}} \frac{\partial q^k}{\partial q^{\bar{l}}} \quad (1.14)$$

das der *kontravarianten Komponenten eines Tensors 2. Stufe*:

$$g^{l'm'} = \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \frac{\partial q^{m'}}{\partial q^k} g^{jk}. \quad (1.15)$$

Unabhängig von (1.14) lassen sich diese Komponenten durch

$$g^{jl} g_{lk} = \delta_k^j. \quad (1.16)$$

charakterisieren, woraus man auch erkennt, daß  $\delta_k^j$  die *gemischten*<sup>10</sup> Komponenten eines Tensors 2. Stufe sind.

**Beweis von (1.16):**

$$\sum_{\bar{r}, \bar{s}=1}^{\bar{n}} \frac{\partial q^j}{\partial q^{\bar{r}}} \underbrace{\frac{\partial q^l}{\partial q^{\bar{r}}} \frac{\partial q^{\bar{s}}}{\partial q^l} \frac{\partial q^{\bar{s}}}{\partial q^k}}_{\substack{= \frac{\partial q^{\bar{s}}}{\partial q^{\bar{r}}} \\ = \delta_{\bar{r}}^{\bar{s}}} } = \sum_{\bar{r}=1}^{\bar{n}} \frac{\partial q^{\bar{r}}}{\partial q^k} \frac{\partial q^j}{\partial q^{\bar{r}}} = \delta_k^j. \quad \blacksquare$$

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Man beachte (1.2) und  $\frac{\partial q^j}{\partial q^{\bar{l}}} \frac{\partial q^{\bar{l}}}{\partial q^k} = \frac{\partial q^j}{\partial q^k} = \delta_k^j$ .

<sup>9</sup>Wegen  $\frac{\partial q^{j'}}{\partial q^{\bar{l}}} = \frac{\partial q^{j'}}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q^{\bar{l}}}$ .

<sup>10</sup>Gemeint ist unterschiedliches Transformationsverhalten hinsichtlich der Indizes; hier kontravariant bzgl. des oberen und kovariant bzgl. des unteren Index.

Die Komponenten des metrischen Tensors lassen sich dazu benutzen, die kontravarianten Komponenten  $A^j$  eines Vektors  $\mathbf{A} = A^j \mathbf{t}_j = A_j \mathbf{t}^j$  in seine kovarianten Komponenten  $A_j$  überzuführen und umgekehrt.<sup>11</sup>

$$\boxed{A^j = g^{jk} A_k, \quad A_j = g_{jk} A^k} \quad (1.17)$$

Entsprechende Formeln gelten für gemischte Komponenten von Tensoren höherer Stufe.

Von nun ab sei auch  $q^1, \dots, q^n$  ein **beliebiges** Koordinatensysteme. Man sieht leicht, daß dann die Formeln (1.7), (1.15), (1.16) und (1.17) immer noch gelten.

### Räumlich konstante Vektorfelder

Seien  $A_j$  die kovarianten Komponenten eines Vektorfeldes bzgl. des Koordinatensystems  $q^1, \dots, q^n$ . Zunächst sollen die partiellen Ableitungen dieser Komponenten nach den  $q^\mu$  mit den entsprechenden Ausdrücken bzgl. des zunächst **fest** gewählten Koordinatensystems  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  verglichen werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^k} A_j &= \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} A_{l'} \right) \\ &= \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k} A_{l'} + \left( \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \right) A_{l'} \\ &= \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \frac{\partial q^{m'}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^{m'}} A_{l'} + \left( \frac{\partial q^m}{\partial q^{l'}} \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \right) A_m \end{aligned}$$

Mit den sog. **CHRISTOFFEL-Symbolen**

$$\Gamma_{jk}^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^m}{\partial q^{l'}} \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \quad (1.18)$$

bzgl. des Koordinatensystems  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  gilt also

$$\frac{\partial}{\partial q^k} A_j = \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^j} \frac{\partial q^{m'}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^{m'}} A_{l'} + \Gamma_{jk}^m A_m \quad (1.19)$$

Die zugehörige **kovariante Ableitung**

$$\boxed{\nabla_k A_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} A_j - \Gamma_{jk}^m A_m} \quad (1.20)$$

hat dementsprechend Tensor-Charakter:<sup>12</sup>

$$\nabla_{j'} = \frac{\partial q^k}{\partial q^{j'}} \nabla_k$$

<sup>11</sup>Die  $q^j$  selbst sind i.a. natürlich **keine** Vektor-Komponenten!

<sup>12</sup>Die Addition einer entsprechenden Tensor-Größe zu den CHRISTOFFEL-Symbolen — die selbst **nicht** Tensor-Komponenten sind (vgl. (1.41)) — würde daran offensichtlich nichts ändern (allgemeinere Konnexionen).

Falls die Koordinaten  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  **karthesisch** sind, (etwa  $q^{k'} = q^{\bar{k}}$ ) verschwinden die partiellen Ableitungen der kovarianten Komponenten  $A_j$  eines **konstanten**, d.h. gegenüber **Parallelverschiebung** invarianten, Vektorfeldes **bzgl. dieser Koordinaten**. Nach (1.19) ist letzteres gleichbedeutend mit dem Verschwinden der kovarianten Ableitung (1.20). Die kovariante Ableitung kann also als ein Maß für die ‘wirkliche’ Ortsabhängigkeit des Vektorfeldes angesehen werden.

Natürlich hängt die Definition der CHRISTOFFEL-Symbole i.a. von der speziellen Wahl der Koordinaten  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  ab,<sup>13</sup> obwohl ihre Differenz stets Tensor-Charakter hat. Jedoch ist das Verschwinden der **kovarianten** Ableitung nur dann charakteristisch für ‘Konstanz’ des Vektorfeldes wenn die  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  tatsächlich karthesisch sind. In diesem Falle ist keine genauere Spezifizierung notwendig. Bereits aus den Beziehungen<sup>14</sup>

$$g_{j'k'}(\bar{q}) = \begin{cases} 1 & \text{für } j' = k' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial q^{l'}} g_{j'k'}(\bar{q}) = 0 \quad (1.21)$$

folgt **dann** nämlich<sup>15</sup> **an der Stelle**  $q = \bar{q}$ :

$$\begin{aligned} g_{mk} \Gamma_{jl}^m &= \frac{1}{2} (g_{jk,l} + g_{lk,j} - g_{jl,k}), \\ \text{bzw. } \Gamma_{jl}^r &= \frac{1}{2} g^{rk} (g_{jk,l} + g_{lk,j} - g_{jl,k}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

**Beweis:** Aus (1.21) folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^l} g_{jk} &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{\partial q^{m'}}{\partial q^j} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^k} g_{m'r'} \\ &\stackrel{(1.21)}{=} \sum_{r'=1'}^{n'} \left( \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^k} + \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^j} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{2} (g_{jk,l} + g_{lk,j} - g_{jl,k}) = \sum_{r'=1'}^{n'} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^j},$$

wobei:

$$g_{jk,l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^l} g_{jk}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{r'}}{\partial q^k} &\stackrel{(1.21)}{=} \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^k} g_{r'l'} \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{\partial q^{l'}}{\partial q^k} \frac{\partial q^m}{\partial q^{r'}} \frac{\partial q^j}{\partial q^{l'}} g_{mj} \\ &= \frac{\partial q^m}{\partial q^{r'}} g_{mk} \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Z.B. sind sie ja für  $q^{j'} = q^{\bar{j}}$  stets Null.

<sup>14</sup>Im Falle  $\frac{\partial}{\partial q^{r'}} g_{j'k'}(\bar{q}) = 0$  nennt man die (lokalen) Koordinaten  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$  einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit an der Stelle  $\bar{q}$  **geodätisch**. Die kovariante Ableitung ist dann also der kovariante Ausdruck, der für geodätische Koordinaten wegen (1.22) in die partielle Ableitung übergeht.

<sup>15</sup>Man beachte, daß die rechte Seite von (1.22) symmetrisch in den Indizes  $j, l$  ist.

folgt daraus schließlich (1.22). ■

Man definiert daher die CHRISTOFFEL-Symbole gewöhnlich durch (1.22) (statt durch (1.18)). Dann gilt offensichtlich

$$\Gamma_{jl}^m = \Gamma_{lj}^m.$$

Die (1.20) entspr. kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten  $A^j$  eines Vektors definiert man im Einklang mit dem allgemeinen Tensor-Formalismus durch

$$\nabla_k A^j \stackrel{\text{def}}{=} g^{jl} \nabla_k A_l,$$

woraus mit (1.22)

$$\boxed{\nabla_k A^j = \frac{\partial}{\partial q^k} A^j + \Gamma_{lk}^j A^l} \quad (1.23)$$

folgt.<sup>16</sup>

**Beweis von (1.23):**

$$\begin{aligned} \nabla_k A^j &\stackrel{(1.23)}{=} g^{jl} \nabla_k A_l \\ &\stackrel{(1.20)}{=} g^{jl} \left( \frac{\partial}{\partial q^k} A_l - \Gamma_{lk}^m A_m \right) \\ &\stackrel{(1.17)}{=} g^{jl} \frac{\partial}{\partial q^k} (g_{ln} A^n) - g^{jl} \Gamma_{lk}^m g_{mn} A^n \\ &\stackrel{\text{Prod.-R. (1.16), (1.22)}}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} A^j + g^{jl} g_{ln,k} A^n - g^{jl} \frac{1}{2} (g_{ln,k} + g_{kn,l} - g_{lk,n}) A^n \\ &= \frac{\partial}{\partial q^k} A^j + g^{jl} \frac{1}{2} (g_{ln,k} + g_{lk,n} - g_{kn,l}) A^n \\ &\stackrel{(1.22)}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} A^j + g^{jl} g_{ml} \Gamma_{nk}^m A^n \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} A^j + \Gamma_{nk}^j A^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Seien nun eine Kurve  $\mathcal{C} = \{q(t) \hat{=} q^1(t), \dots, q^n(t); t \in [t_1, t_2]\}$  und ein Vektor  $A^j(q(t_1)) \mathbf{t}_j(q(t_1))$  im Anfangspunkt  $q(t_1)$  von  $\mathcal{C}$  vorgegeben. Dann lässt sich dieser Vektor natürlich zu einem konstanten Vektorfeld  $A^j(q) \mathbf{t}_j(q)$  über  $\mathbb{R}^n$  fortsetzen. Da die kovariante Ableitung — insbesondere also  $\dot{q}^k \nabla_k A^j$  längs der Kurve — verschwindet, muß die **konstante** Vektorschar

$$\{A^j(t) \mathbf{t}_j(q(t))\}_{t \in [t_1, t_2]}, \quad A^j(t) \stackrel{\text{def}}{=} A^j(q(t)),$$

dann gemäß (1.23) dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{A}^j + \Gamma_{lk}^j A^l \dot{q}^k = 0 \quad (1.24)$$

<sup>16</sup>Wenn man also (konsistent)  $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} (X^j \nabla_j A^k) \mathbf{t}_k$  definiert, dann gilt:  $\nabla_{\mathbf{t}_j} \mathbf{t}_k = \Gamma_{k,j}^l \mathbf{t}_l$ .



genügen, das diese Schar bei vorgegebenem Anfangswert bereits eindeutig charakterisiert.

Die Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung auf Tensoren höherer Stufe ist offensichtlich; z.B.:<sup>17</sup>

$$T_{k m; j}^l \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_j T_{k m}^l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} T_{k m}^l - \Gamma_{kj}^r T_{r m}^l + \Gamma_{rj}^l T_{k m}^r - \Gamma_{mj}^r T_{k r}^l. \quad (1.25)$$

### 1.1.3 Untermannigfaltigkeiten

#### Geodäten und Parallelverschiebung

Sei wieder wie in Abschnitt 1.1 ein Körper mit eingeschriebenen Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$  gegeben, die im unverzerrten Zustand karthesisch sind. Dann liegen die Körperpunkte  $P$  mit  $q^n = 0$  im unverzerrten Zustand in einer (Hyper-) Ebene, die durch Verzerrung des Körpers in eine gekrümmte (Hyper-) Fläche  $\mathcal{M}$  übergeht.<sup>18</sup> Die für diese Fläche charakteristischen Formeln ergeben sich nun aus den bisherigen einfach durch folgende Einschränkung:

Für die Indizes  $j, k, \dots$  resp.  $j', k' \dots$  sind jetzt — insbesondere bei der EINSTEINSCHEN Summationskonvention — nur die Werte  $1, \dots, n-1$  resp.  $1', \dots, (n-1)'$  zu verwenden.

Es sollen nun zunächst die **Geodäten** von  $\mathcal{M}$  bestimmt werden, d.h. die Linien in  $\mathcal{M}$ , deren (hinreichend kurze) Teilstrecken jeweils die kürzeste, ganz in  $\mathcal{M}$  verlaufende, Verbindung zwischen Anfangs- und Endpunkt darstellen.

Wenn  $q^1(t), \dots, q^{n-1}(t)$  eine (zeitlich begrenzte) Bahnbewegung ist, die ganz auf einer Geodäten verläuft, so muß sie also dem (lokalen) Variationsprinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q^1(t), \dots, \dot{q}^{n-1}(t)) dt = 0; \quad \mathcal{L}(q^1, \dots, \dot{q}^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{jk}(q^1, \dots, q^{n-1}) \dot{q}^j \dot{q}^k}$$

genügen, wobei bei Variation die Orte für die Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  beizubehalten sind. Für **konstante Bahngeschwindigkeit**<sup>19</sup> ergeben sich dazu die EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\ddot{q}^k + \Gamma_{lj}^k \dot{q}^l \dot{q}^j = 0. \quad (1.26)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>17</sup>Damit gilt z.B. die Produktregel  $\nabla_j A_k B^l C_m = (\nabla_j A_k) B^l C_m + A_k (\nabla_j B^l) C_m + A_k B^l \nabla_j C_m$ .

<sup>18</sup>Oftmals ist es eine vernünftige Idealisierung, sich den Körper nur aus solchen Punkten zusammengesetzt zu denken (Membranen).

<sup>19</sup>Es ist klar, daß  $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k} dt$  nur von den Geometrie der Bahnkurve, nicht jedoch von der Bahngeschwindigkeit, abhängt.

**Beweis:**<sup>20</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\sqrt{g_{jl}\dot{q}^j\dot{q}^l} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q^k} \mathcal{L} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} (g_{jk}\dot{q}^j + g_{kl}\dot{q}^l) - g_{jl,k}\dot{q}^j\dot{q}^l \quad (\text{wegen } \frac{d}{dt} \sqrt{g_{jl}\dot{q}^j\dot{q}^l} = 0) \\
 &= (g_{jk,l} + g_{lk,j} - g_{jl,k})\dot{q}^j\dot{q}^l + 2g_{jk}\ddot{q}^j \\
 &\stackrel{(1.22)}{=} 2 \left( g_{mk} \Gamma_{lj}^m \dot{q}^j \dot{q}^l + g_{jk} \ddot{q}^j \right)
 \end{aligned}$$

Nach (1.16) ist das äquivalent zu (1.26). ■

Seien  $\bar{A}^1, \dots, \bar{A}^{n-1}$  die kontravarianten Komponenten (bzgl.  $q^1, \dots, q^{n-1}$ ) eines zu  $\mathcal{M}$  tangentialen Vektors  $A(q(t_1))$  an der Stelle  $q(t_1)$  und sei

$$\mathcal{C} = \{q(t) \hat{=} (q^1(t), \dots, q^{n-1}(t)) : t \in [t_1, t_2]\}$$

eine (hinreichend gutartige) Kurve in  $\mathcal{M}$ . Es liegt nun nahe, die **zu  $\mathcal{M}$  tangentiale Parallelverschiebung**  $A^1(t), \dots, A^{n-1}(t)$  von  $A(q(t_1))$  längs  $\mathcal{C}$  als Lösung des Gleichungssystems (1.42) zum gegebenen Anfangswert  $A(q(t_1))$  im Sinne o.a. Einschränkung zu definieren.<sup>21</sup> Diese Definition ist in folgendem Sinne optimal:

Falls  $\mathcal{C}$  der Gleichung (1.26) genügt, also auf einer Geodäten (von  $\mathcal{M}$ ) liegt, sieht man unmittelbar, daß  $A^1(t) = \dot{q}^1(t), \dots, A^{n-1}(t) = \dot{q}^{n-1}(t)$  eine Lösung des (entspr. zu lesenden) Gleichungssystems (1.24) ist. Mit anderen Worten:

Die normierten Tangentenvektoren einer **Geodäten**  $\mathcal{C}$  gehen durch Parallelverschiebung längs  $\mathcal{C}$  auseinander hervor.<sup>22</sup>

In diesem Sinne sind also die Geodäten die ‘geradesten’ Linien innerhalb  $\mathcal{M}$ . Auch erkennt man aus (1.22) leicht

$$(1.24) \implies \frac{d}{dt} (A^j(t)A^k(t)g_{jk}(q(t))) = 0.$$

**Beweis:** Aus

$$g_{mn} \Gamma_{jl}^m \stackrel{(1.22)}{=} \frac{1}{2} (g_{jn,l} + g_{ln,j} - g_{jl,n})$$

und

$$\dot{A}^m + \Gamma_{jl}^m A^j \dot{q}^l \stackrel{(1.24)}{=} 0$$

<sup>20</sup>Wir teilen stets durch  $\dot{q}^l$  die partielle und durch  $\dot{q}^l$  die Kovariante Ableitung nach  $q^l$  mit.

<sup>21</sup>Diese Lösung existiert und ist eindeutig. Daher sind Geodäten, deren normierte Tangenten ja durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen (s.u.), durch ihre Richtung in einem Punkt bereits eindeutig festgelegt.

<sup>22</sup>Damit ist offensichtlich, daß Parallelverschiebung bzgl.  $\mathcal{M}$  i.a. keine Parallelverschiebung bzgl.  $\mathbb{R}^n \supset \mathcal{M}$  ist.

folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{mn} A^m A^n) &= \dot{q}^l g_{jn,l} A^j A^n + \underbrace{2 g_{mn} \dot{A}^m A^n}_{=0} \\ &= - (g_{jn,l} + \underbrace{g_{lk,n} - g_{jl,n}}_{=0}) A^j A^n \dot{q}^l \\ &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Also:

Bei Parallelverschiebung bleibt die Länge eines Vektors erhalten.<sup>23</sup>

Außerdem folgt aus der Linearität des Gleichungssystems unmittelbar:

Bei Parallelverschiebung längs der gleichen Kurve bleiben die linearen Beziehungen zwischen den Vektoren erhalten.<sup>24</sup>

Insbesondere bleibt also die Neigung zur Kurventangenten bei Parallelverschiebung längs einer **Geodäten** erhalten.

### Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung

Natürlich muß man im allgemeinen damit rechnen, daß der zu  $\mathcal{M}$  tangentialen Paralleltransport vom Verschiebungsweg abhängt. Das soll nun eingehender untersucht werden.

Sei zunächst angenommen, der Paralleltransport sei innerhalb einer Umgebung  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  des Punktes  $\bar{q} \hat{=} (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^{n-1})$  wegunabhängig. Dann läßt sich offenbar jeder an dieser Stelle vorgegebene Satz linear unabhängiger Tangentenvektoren  $\{\mathbf{A}_{\alpha'} = (A_{\alpha'})^j(\bar{q}) \mathbf{t}_j(\bar{q}), \alpha' = 1', \dots, (n-1)'\}$  zu einem Satz an jeder Stelle in  $\mathcal{O}$  linear unabhängiger Vektorfelder  $(A_{\alpha'})^j(q) \mathbf{t}_j(q)$  fortsetzen, die innerhalb  $\mathcal{O}$  **konstant** in dem Sinne sind, daß Ihre kovarianten Ableitungen (bzgl.  $\mathcal{M}$ ) dort verschwinden.

Dann ist zu vermuten, daß die CHRISTOFFEL-Symbole in Koordinaten  $q^{\alpha'}$  verschwinden, die die  $(A_{1'})^j, \dots, (A_{(n-1)'})^j$  als Tangentenvektoren haben, also den Bedingungen

$$\frac{\partial q^j}{\partial q^{\alpha'}} = (A_{\alpha'})^j(q) \quad (1.27)$$

genügen. Solche Koordinaten wären mit

$$(A^{\alpha'})_j(q)(A_{\alpha'})^k(q) = \delta_j^k. \quad (1.28)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>23</sup>Man kann auch umgekehrt zeigen (siehe z.B. (Goenner, 1996, Abschn. 8.4.2)), daß (1.22) unter der Symmetrievoraussetzung  $\Gamma_{lj}^m = \Gamma_{jl}^m$  aus (1.24) und Erhaltung der Vektorlänge bei Parallelverschiebung folgt. Ohne diese Voraussetzung (man spricht dann von **Torsion**) charakterisiert (1.26) dann zwar immer noch die Kurven, die man als **zu sich selbst parallel** bezeichnet, i.a. jedoch nicht mehr die Geodäten!

<sup>24</sup>Daher sagt man auch, daß durch die CHRISTOFFEL-Symbole (bzgl.  $(q^1, \dots, q^{n-1})$ ) eine **lineare Konnexion** (zwischen Vektoren an unterschiedlichen Stellen von  $\mathcal{M}$ ) gegeben sei.

durch

$$q^{\alpha'} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\bar{q}}^q (A^{\alpha'})_j(q) dq^j \quad (1.29)$$

gegeben, wobei  $\bar{q}$  einen willkürlich gewählten Bezugspunkt aus  $\mathcal{O}$  bezeichnet.

**Anmerkung:** Die  $\mathbf{A}^{\alpha'}$  bilden die zu den  $\mathbf{A}_{\alpha'}$  reziproke Basis und es gilt

$$(A^{\alpha'})_j = g^{\alpha'\beta'} g_{jk} (A_{\beta'})^k .$$

**Beweis:** Aus (1.28) folgt

$$\left( (A^{\alpha'})_j (A_{\beta'})^j \right) (A_{\alpha'})^k = (A_{\beta'})^k$$

und daraus aufgrund der Unabhängigkeit der  $\mathbf{A}_{\alpha'}$

$$(A^{\alpha'})_j (A_{\beta'})^j = \delta_{\beta'}^{\alpha'} ,$$

also die behauptete Reziprozität.

Daß (1.28) mit  $(A^{\alpha'})_j = g^{\alpha'\beta'} g_{jk} (A_{\beta'})^k$  tatsächlich erfüllt ist, erkennt man gemäß

$$\begin{aligned} g^{\alpha'\beta'} g_{jl} (A_{\beta'})^l (A_{\beta'})^k &\stackrel{(1.27)}{=} g^{\alpha'\beta'} g_{jk} \frac{\partial q^l}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^k}{\partial q^{\alpha'}} \\ &= g^{kl} g_{jl} \\ &= \delta_j^k . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir wollen deshalb zunächst zeigen, daß die Definitionen (1.29) erlaubt, die angegebenen Integrationen also von der Wahl des Weges von  $\bar{q}$  nach  $q$  unabhängig sind.

Dazu beachten wir, daß aus der ‘Konstanz’ der Vektorfelder  $A_{\alpha'}$  nach (1.23) und (1.28)

$$\Gamma_{km}^j(q) = -(A^{\alpha'})_m(q) \frac{\partial}{\partial q^k} (A_{\alpha'})^j(q)$$

und somit nach (1.28)

$$\Gamma_{km}^j(q) = +(A_{\alpha'})^j(q) \frac{\partial}{\partial q^k} (A^{\alpha'})_m(q) \quad \forall q \in \mathcal{O} . \quad (1.30)$$

folgt. Aufgrund der Symmetrie der CHRISTOFFEL-Symbole in den unteren Indizes folgt daraus

$$(A_{\alpha'})^j(q) \left( \frac{\partial}{\partial q^k} (A^{\alpha'})_m(q) - \frac{\partial}{\partial q^m} (A^{\alpha'})_k(q) \right) = 0 ,$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial q^k} (A^{\alpha'})_m(q) - \frac{\partial}{\partial q^m} (A^{\alpha'})_k(q) = 0 ,$$

d.h. die notwendige Rotationsfreiheit.<sup>25</sup> Die Definitionen (1.29) sind also erlaubt und aus ihnen folgt

$$\frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^j} = (A^{\alpha'})_j(q) . \quad (1.31)$$

Bildet man hier beiden Seiten die inverse Matrix, so ergibt sich tatsächlich (1.27) und daraus mit (1.31) für die CHRISTOFFEL-Symbole (1.30) schließlich:

$$\Gamma_{km}^j(q) = \frac{\partial q^j}{\partial q^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^m}.$$

Daraus erkennt man, daß die CHRISTOFFEL-Symbole in den  $q^{\alpha'}$ -Koordinaten verschwinden. Umgekehrt ist es offensichtlich, daß der Paralleltransport in  $\mathcal{O}$  wegunabhängig ist, wenn dort ein Koordinatensystem existiert, in dem die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden.<sup>26</sup> Wir sehen also:

Der Paralleltransport ist genau dann in der Umgebung eines Punktes wegunabhängig, wenn für eine Umgebung dieses Punktes ein Koordinatensystem existiert, bzgl. dessen die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden.

Das Verschwinden der CHRISTOFFEL-Symbole in einem Koordinatensystem aber gleichbedeutend mit der Konstanz der Komponenten des metrischen Tensors<sup>27</sup> bzgl. dieses Koordinatensystems.

**Beweis:** Gemäß (1.22) folgen aus dem Verschwinden der CHRISTOFFEL-Symbole die Gleichungen

$$g_{jn,l} + g_{ln,j} - g_{jl,n} = 0, \quad g_{jl,n} + g_{nl,j} - g_{jn,l} = 0.$$

Indem man beide addiert erhält man

$$g_{ln,j} = 0$$

(wegen  $g_{nl} = g_{ln}$ ). ■

## Krümmungstensor

Wir wollen nun zeigen, daß (in  $\mathcal{O}$ ) genau dann ein Koordinatensystem existiert, in dem die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden, wenn (in  $\mathcal{O}$ ) der RIEMANNsche **Krümmungstensor**<sup>28</sup>

$$R_{mkj}^l \stackrel{\text{def}}{=} (\Gamma_{mj,k}^l - \Gamma_{mk,j}^l) + (\Gamma_{rk}^l \Gamma_{mj}^r - \Gamma_{rj}^l \Gamma_{mk}^r) \quad (1.32)$$

von  $\mathcal{M}$  verschwindet.

Zunächst ist klar, daß im Falle der Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung — also im Falle der (lokalen) Existenz unabhängiger konstanter Vektorfelder  $(A_1)^l, \dots, (A_1)^{l'}$  — der Krümmungstensor verschwindet.

Version vom 26. März 2009

<sup>26</sup>In solchen Koordinaten ist Parallelverschiebung ja mit Konstanz der Vektorkomponenten gleichbedeutend.

<sup>27</sup>Die Konstanz der Komponenten des metrischen Tensors bedeutet jedoch nicht, daß die Untermannigfaltigkeit lokal ungekrümmt im naiven Sinne ist.  $\mathcal{O}$  könnte durchaus Teil einer Zylinder- oder Kegel-Oberfläche sein.

<sup>28</sup>Bzgl. des Tensorcharakters siehe (1.46).

**Beweis:** Durch wiederholte Ausnutzung des Verschwindens der kovarianten Ableitung der  $(A_{\alpha'})^l$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial q^k} (\nabla_j (A_{\alpha'})^l) - \frac{\partial}{\partial q^j} (\nabla_k (A_{\alpha'})^l) \\ &\stackrel{(1.23)}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} (\Gamma_{mj}^l (A_{\alpha'})^m) - \frac{\partial}{\partial q^j} (\Gamma_{mk}^l (A_{\alpha'})^m) \\ &\stackrel{\text{Produkt.}}{=} R_{mkj}^l (A_{\alpha'})^m \end{aligned}$$

Aufgrund der Regularität der Matrix der  $(A_{\alpha'})^m$  folgt daraus  $R_{mkj}^l = 0$ . ■

Den genauen Zusammenhang zwischen RIEMANNSchem Krümmungstensor und Parallelverschiebung längs geschlossener Kurven liefert das folgende

### Lemma 1.1.1

- Gegeben:
- (i) offene Teilmenge  $\mathcal{O}$  von  $\mathcal{M}$
  - (ii) Koordinatensystem  $q^1, \dots, q^{n-1}$  von  $\mathcal{O}$
  - (iii) hinreichend gutartige Abbildung
 
$$q : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{O}$$

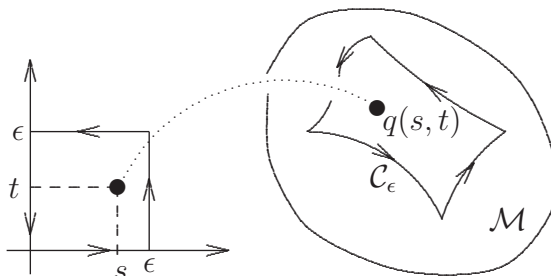
$$(s, t) \longmapsto q(s, t) \hat{=} (q^1(s, t), \dots, q^{n-1}(s, t))$$
  - (iv) Vektor  $\bar{A}$  an der Stelle  $\bar{q} = q(0, 0)$

Behauptung:

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon \in (0,1)} \epsilon^{-3} \left| (\bar{A}_\epsilon^l - \bar{A}^l) - \frac{1}{2} R_{jkm}^l(\bar{q}) \bar{A}^j f_\epsilon^{km} \right| \\ < \infty \text{ für } l = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Bild unter } q \text{ des mathematisch positiv} \\ \text{orientierten Randes von } [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \end{array} \right\} \\ \bar{A}_\epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Parallelverschiebung von } \bar{A} \text{ längs } \mathcal{C}_\epsilon \\ f_\epsilon^{km} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_\epsilon} ((q^k - \bar{q}^k) dq^m - (q^m - \bar{q}^m) dq^k) \end{aligned}$$



**Beweis:**<sup>29</sup> Sei  $\{q_\epsilon(t); t \in [0, 4\epsilon]\}$  jeweils die natürliche Parametrisierung von  $\mathcal{C}_\epsilon$  mithilfe der Weglänge längs des mathematisch positiv orientierten Randes von  $[0, \epsilon] \times [0, \epsilon]$  und  $\{A_\epsilon(t)\}_{t \in [0, 4\epsilon]}$  die zugehörige Schar längs  $\mathcal{C}_\epsilon$  parallelverschobener Vektoren mit  $A_\epsilon(0) = \bar{A}$ . Dann ist also  $A_\epsilon(t)$  Lösung des Differentialgleichungssystems (1.24), waraus man mithilfe des PICARD-LINDELÖF-Verfahrens (siehe z.B. Abschn. 5.1.3 von (Lücke, ein)) erkennt, daß

$$\sup_{\substack{\epsilon \in (0, 1) \\ t \in (0, 4\epsilon)}} \epsilon^{-1} |A_\epsilon^j(t) - A_\epsilon^j(0)| < \infty$$

und somit

$$\sup_{\substack{\epsilon \in (0, 1) \\ t \in (0, 4\epsilon)}} \epsilon^{-2} \left| \int_0^t \Gamma_{kl}^j(q_\epsilon(t')) A_\epsilon^k(t') \dot{q}_\epsilon^l(t') dt' - \Gamma_{kl}^j(\bar{q}) \bar{A}^k (q_\epsilon^l(t) - \bar{q}^l) \right| < \infty$$

gilt. Mit (1.24) folgt daraus

$$\sup_{\substack{\epsilon \in (0, 1) \\ t \in (0, 4\epsilon)}} \epsilon^{-2} \left| A_\epsilon(t)^j - \bar{A}^j + \Gamma_{lk}^j(\bar{q}) \bar{A}^l (q_\epsilon^k(t) - \bar{q}^k) \right| < \infty.$$

und somit, wiederum nach (1.24),

$$\begin{aligned} & \sup_{\epsilon \in (0, 1)} \epsilon^{-3} \left| (\bar{A}^l - \bar{A}^l) + \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \Gamma_{rm}^l(q) (\bar{A}^r - \Gamma_{jk}^r(\bar{q}) \bar{A}^j (q^k - \bar{q}^k)) dq^m \right| \\ &= \sup_{\epsilon \in (0, 1)} \epsilon^{-3} \left| - \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \Gamma_{rm}^l(q) ((A_\epsilon)^r(q) - \bar{A}^r + \Gamma_{jk}^r(\bar{q}) \bar{A}^j (q^k - \bar{q}^k)) dq^m \right| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Mit<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} & \sup_{\epsilon \in (0, 1)} \epsilon^{-3} \left| \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \Gamma_{rm}^l(q) (\bar{A}^r - \Gamma_{jk}^r(\bar{q}) \bar{A}^j (q^k - \bar{q}^k)) dq^m \right. \\ & \quad \left. - (\Gamma_{jm,k}^l - \Gamma_{rm}^j \Gamma_{jk}^r)_{|_{q=\bar{q}}} \bar{A}^j \int_{\mathcal{C}_\epsilon} (q^k - \bar{q}^k) dq^m \right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

und

$$\int_{\mathcal{C}_\epsilon} (q^k - \bar{q}^k) dq^m = \int_{\mathcal{C}_\epsilon} (q^k - \bar{q}^k) dq^m - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_\epsilon} d((q^k - \bar{q}^k)(q^m - \bar{q}^m)) = f_\epsilon^{km}$$

folgt daraus die Behauptung. ■

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Dieser Beweis entspricht einer Anpassung der Argumentation

$$\int_{\mathcal{C}_\epsilon} B_m(q) dq^m \approx \int_{\mathcal{C}_\epsilon} (B_m(\bar{q}) + B_{m,k}(\bar{q})(q^k - \bar{q}^k)) dq^m = \frac{1}{2} (B_{m,k}(\bar{q}) - B_{k,m}(\bar{q})) f_\epsilon^{km}$$

zur Infinitesimalversion des STOKESSchen Satzes auf den Fall

$$B_m(q) = \Gamma_{jm}^l(q) A^j(q), \quad A^j(q) \text{ nur auf } \mathcal{C}_\epsilon \setminus \{\bar{q}\} \text{ definiert}$$

(vgl. (Einstein, 1956, S.49).)

Bereits aus Lemma 1.1.1 läßt sich der Tensor-Charakter von (1.32) ablesen. Bequemer ist dafür aber die Gleichung<sup>31</sup>

$$\boxed{[\nabla_j, \nabla_k]A^l = R^l{}_{mjk}A^m}, \quad (1.33)$$

die sich einfach nachrechnen läßt.

**Beweis von (1.33):** Für (hinreichend gutartige) Vektorfelder  $A$  gilt

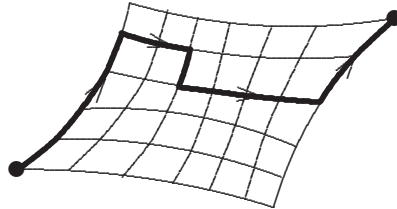
$$\begin{aligned} A^l{}_{;k;l} &= \left( A^l{}_{,k} + \Gamma^l{}_{mk} A^m \right)_{;j} \\ &= A^l{}_{,k;l} + \Gamma^l{}_{mk;j} A^m + \Gamma^l{}_{mk} A^m{}_{,j} + \Gamma^l{}_{mj} A^m{}_{,k} + \Gamma^l{}_{rj} \Gamma^r{}_{mk} A^m \\ &= \left( \Gamma^l{}_{mk;j} + \Gamma^l{}_{rj} \Gamma^r{}_{mk} \right) A^m + (j\text{-}k\text{-symmetrischer Ausdruck}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit direkt aus der Definition des Krümmungstensors. ■

Aus Lemma 1.1.1 ergibt sich nun aber der folgende

**Satz 1.1.2** *Die Parallelverschiebung ist innerhalb einer gegebenen offenen Teilmenge  $\mathcal{O}$  von  $\mathcal{M}$  genau dann Wegunabhängig, wenn dort der RIEMANNsche Krümmungstensor verschwindet.*

**Beweisskizze:** Man zerlege einen Weg vom Typ  $\mathcal{C}_1$  aus Lemma 1.1.1 folgendermaßen in kleinere Wegschleifen vom Typ  $\mathcal{C}_\epsilon$



Der Fehler, den man bei Ersetzung der Parallelverschiebung längs einer Teilrandmenge durch Parallelverschiebung längs der komplementären Teilrandmenge begeht, ist für Wege vom Typ  $\mathcal{C}_\epsilon$  nach Lemma von der Größenordnung  $\epsilon^3$ , sofern der Krümmungstensor verschwindet. Um für den Weg vom Typ  $\mathcal{C}_1$  von der Parallelverschiebung längs einer Teilrandmenge zur Parallelverschiebung längs der komplementären Teilrandmenge überzugehen benötigt man aber nur eine Anzahl solcher Ersetzungen für Wege vom Typ  $\mathcal{C}_\epsilon$  von der Größenordnung  $\epsilon^2$ . Für  $\epsilon \rightarrow 0$  erkennt man daraus, daß das Verschwinden des Krümmungstensors die Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung impliziert. Die Umkehrung war bereits zu (1.32) angemerkt. ■

Version vom 26. März 2009

<sup>30</sup>Man beachte, daß  $\int_{\mathcal{C}_\epsilon} dq^m = 0$ .

<sup>31</sup>Im Falle  $\Gamma^m{}_{jk} \neq \Gamma^m{}_{kj}$  ist auf der rechten Seite noch  $(\Gamma^m{}_{jk} - \Gamma^m{}_{kj}) A^l{}_{;m}$  zu addieren.



## 1.2 Pseudo-RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten

### 1.2.1 Übertragung differentialgeometrischer Konzepte

Im kümmungsfreien,  $n$ -dimensionalen, lokal euklidischen Raum existiert stets ein lokales Koordinatensystem  $q^{\bar{1}}, \dots, q^{\bar{n}}$ , dessen Tangentenvektoren an jeder Stelle eine Orthonormalbasis des zugehörigen **Tangenten**vektorraumes bilden, wobei sich diese Basen auseinander durch wegunabhängige Parallelverschiebung ergeben.<sup>32</sup> Die zugehörigen kovarianten Komponenten des metrischen Tensors sind dementsprechend

$$g_{\bar{j}\bar{k}}(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } \bar{j} = \bar{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall q \quad (1.34)$$

Für Untermannigfaltigkeiten ist das i.a. nicht mehr der Fall, was uns auf die Begriffsbildungen von Abschnitt 1.1.3 führte.

Von der Speziellen Relativitätstheorie ist uns bekannt, daß man sie am zweckmäßigsten in einem kümmungsfreien, 4-dimensionalen, **pseudo**-euklidischen Raum-Zeit-Kontinuum beschreibt. Die ausgezeichneten Koordinatensysteme  $q^{\bar{0}}, \dots, q^{\bar{3}}$  sind dann diejenigen, deren Tangentenvektoren LORENTZ-Basen sind, d.h. orthonormal bzgl. der indefiniten MINKOWSKI-Metrik:

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(q) = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{für } \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{0} \\ -1 & \text{für } \bar{\alpha} = \bar{\beta} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall q \quad (1.35)$$

Es liegt also nahe, Untermannigfaltigkeiten (höherdimensionaler) **pseudo**-euklidischer Räume zu untersuchen. Das führt uns auf die Theorie **pseudo**-RIEMANNscher **Mannigfaltigkeiten**, d.h. **differenzierbarer** Mannigfaltigkeiten mit einem metrischen Tensor  $g$ , dessen zugeordnete ( $q$ -abhängige) Bilinearform  $g(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$  nicht entartet,<sup>33</sup> aber **indefinit** ist.

**Erläuterung:** *Differenzierbarkeit* meint, daß ein maximales System lokaler Koordinatisierungen ausgezeichnet ist, für das alle zugehörigen Koordinatentransformationen beliebig differenzierbar sind (siehe z.B. Anhang A.1 von (Lücke, mech)).

Fast alle Überlegungen von Abschnitt 1.1.3 lassen sich sinngemäß übertragen:

Hoch und tief gestellte **Tensor**-Indizes sind bei Koordinatenwechsel entsprechend zu transformieren, also z.B

$$T_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\alpha'}} \frac{\partial q^\beta}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\gamma'}}{\partial q^\gamma} T_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (1.36)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>32</sup>Daher werden diese Basen oft stillschweigend identifiziert. Am Beispiel der Zylinderoberfläche kann man aber deutlich sehen, daß dies eigentlich nicht ganz gerechtfertigt ist.

<sup>33</sup>**Nicht entartet** heißt für endlichdimensionale Vektorräume:  $B(A, B) = 0 \forall A \implies B = 0$ .

Die Indizes lassen sich im Sinne von (1.17) herauf und (oder) herunter ziehen, wie z.B. in

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g_{\alpha\mu} g^{\gamma\nu} T^{\mu}{}_{\beta\nu}, \quad (1.37)$$

wobei die  $g^{\gamma\nu}$  gemäß (1.16) festgelegt sind:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.38)$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole werden wie in (1.22) durch

$$g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} (g_{\beta\gamma,\delta} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\delta,\gamma}) \quad (1.39)$$

definiert und entsprechend (1.25) zur Definition der **kovarianten Ableitung** benutzt:

$$T_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\alpha;\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\beta} T_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^{\beta}} T_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon} T_{\epsilon}{}^{\delta}{}_{\alpha} + \Gamma_{\epsilon\beta}^{\delta} T_{\gamma}{}^{\epsilon}{}_{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} T_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\epsilon}. \quad (1.40)$$

Dabei läßt sich die kovariante Ableitung auch hier mit Herauf- oder Herunterziehen von Indizes entsprechend (1.37) vertauschen.

Die CHRISTOFFEL-Symbole transformieren sich gemäß

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\gamma}}{\partial q^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q^{\gamma'}} \quad (1.41)$$

und daraus folgt, daß (1.40) tatsächlich Tensor-Charakter hat.

**Beweis von (1.41):** Definitionsgemäß gilt

$$2\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = g^{\alpha'\mu'} (g_{\beta'\mu',\gamma'} + g_{\gamma'\mu',\beta'} - g_{\beta'\gamma',\mu'})$$

und somit

$$\begin{aligned} & 2\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} \\ &= \underbrace{g^{\alpha'\mu'} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\mu'}} \frac{\partial q^{\gamma}}{\partial q^{\gamma'}}}_{\frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\gamma}}{\partial q^{\gamma'}} g^{\alpha\mu}} (g_{\beta\mu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \\ &+ g^{\alpha'\mu'} \left( g_{\beta\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} \left( \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\mu'}} \right) + g_{\gamma\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\beta'}} \left( \frac{\partial q^{\gamma}}{\partial q^{\gamma'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\mu'}} \right) - g_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial q^{\mu'}} \left( \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\gamma}}{\partial q^{\gamma'}} \right) \right). \end{aligned}$$

Mit

$$g_{\beta\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} \left( \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\beta'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\mu'}} \right) = g_{\beta'\lambda'} \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^{\mu}} \frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\mu'}} + g_{\lambda'\mu'} \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial q^{\beta'}}$$

und den entsprechenden Gleichungen für die anderen Index-Kombinationen folgt daraus aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen das angegebene Transformationsverhalten der CHRISTOFFEL-Symbole.

Um daraus den Tensor-Charakter der kovarianten Ableitung zu erkennen, genügt die Untersuchung von  $\nabla_\alpha A^\beta$  :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu'} A^{\lambda'} &= A^{\lambda'}{}_{,\mu'} + \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} A^{\nu'} \\
&= \underbrace{\partial_{\mu'} \left( \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} A^\lambda \right)}_{\left( \partial_{\mu'} \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \right) A^\lambda + \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} A^{\lambda'}{}_{,\mu'}} + \underbrace{\frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\mu}{\partial q^{\mu'}} \frac{\partial q^\nu}{\partial q^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial q^{\nu'}}{\partial q^\gamma} A^\gamma}_{\frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\mu}{\partial q^{\mu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A^\nu} + \underbrace{\left( \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial q^{\mu'}} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q^{\nu'}} \right)}_{-\left( \frac{\partial q^\lambda}{\partial q^{\nu'}} \partial_{\mu'} \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \right)} A^{\nu'} \\
&= \frac{\partial q^{\lambda'}}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\mu}{\partial q^{\mu'}} \nabla_\mu A^\lambda . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Eine der Kurve  $\mathcal{C} = \{q(t) \hat{=} q^1(t), \dots, q^n(t); t \in [t_1, t_2]\}$  zugeordnete Vektorschar  $\{A(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$  wird als **konstant** bezeichnet, wenn sie dem Gleichungssystem

$$\dot{A}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu \dot{q}^\beta = 0 \quad (1.42)$$

genügt. Für solche Scharen gilt wieder

$$\frac{d}{dt} (g_{\alpha\beta}(q(t)) A^\alpha(t) A^\beta(t)) = 0, \quad (1.43)$$

was gemäß (1.42) zu

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.44)$$

äquivalent ist.

**Beweis:** Für Lösungen  $A$  der Geodätengleichung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta) &= \underbrace{\dot{g}_{\alpha\beta}}_{=g_{\alpha\beta;\nu} \dot{q}^\nu} A^\alpha A^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A^\mu \dot{q}^\nu A^\beta - g_{\alpha\beta} A^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta A^\mu \dot{q}^\nu \\
&= g_{\alpha\beta;\nu} A^\alpha A^\beta \dot{q}^\nu .
\end{aligned}$$

Da  $A$  und  $\dot{q}$  an einer vorgegebenen Stelle beliebig gewählt werden können, folgt daraus die Behauptung.  $\blacksquare$

Man bezeichnet  $B(q(t_2))$  als Resultat der **Parallelverschiebung** von  $A(q(t_1))$  längs  $\mathcal{C}$ , wenn eine auf  $\mathcal{C}$  konstante Schar  $\{A^\alpha(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$  existiert mit  $A(t_1) = A(q(t_1))$  und  $A(t_2) = B(q(t_2))$ .

Auch für pseudo-RIEMANNSCHE Mannigfaltigkeiten gilt Lemma 1.1.1 entsprechend mit dem Riemannschen Krümmungstensor

$$R^\delta{}_{\alpha\gamma\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\Gamma_{\alpha\beta;\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma;\beta}^\delta) + (\Gamma_{\rho\gamma}^\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho), \quad (1.45)$$

dessen Verschwinden in der Umgebung eines Punktes notwendig und hinreichend dafür ist, daß der Paralleltransport in dieser Umgebung wegunabhängig ist. Letzteres garantiert wiederum, daß für eine Umgebung des Punktes ein Koordinatensystem  $q^1, \dots, q^n$  existiert, bzgl. dessen die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden und somit die  $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  konstant sind.

Auch die Gleichung

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\gamma = R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta}A^\mu \quad (1.46)$$

folgt im pseudo-RIEMANNschen Fall genau so wie im RIEMANNschen.

Für die Definition der Geodäten legt man jetzt allerdings besser das Variationsprinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} g_{\alpha\beta}(q(t)) \dot{q}^\alpha(t) \dot{q}^\beta(t) dt = 0$$

zugrunde, das wiederum auf die **Geodätengleichung**

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = 0 \quad (1.47)$$

für affine<sup>34</sup> Parametrisierung führt.

**Beweis:** Die entsprechenden EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt} (2g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha) - g_{\alpha\gamma,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma = 0,$$

also

$$2g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\alpha + 2g_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma - g_{\alpha\gamma,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma = 0. \quad (*)$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\alpha + \underbrace{(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta})}_{=2g_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma \\ &= 2g_{\alpha\beta} \left( \ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha \dot{q}^\delta \dot{q}^\gamma \right), \end{aligned}$$

also zur Geodätengleichung für affine Parametrisierung. Die Affinität der Parametrisierung folgt auch aus (\*) durch Kontraktion mit  $\dot{q}^\beta$ :

$$\begin{aligned} 0 &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + g_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \\ &= \frac{d}{dt} (2g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

<sup>34</sup>Eine Kurve  $\{q(t)\}_t$  heißt **affin parametrisiert**, wenn (1.43) für  $A(t) = \dot{q}(t)$  gilt (was für Nullgeodäten allerdings nichts besagt).

## 1.2.2 Die Geodätenhypothese

Ein Massenpunkt, der auf eine gekrümmte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  gebunden ist, dabei dem D'ALEMBERTSchen Prinzip genügt und keinen äußeren Kräften ausgesetzt ist, bewegt sich bekanntlich auf Geodäten dieser Fläche (siehe z.B. Abschnitt 3.1.1.1 von (Lücke, mech)). Man hat damit die wirkenden Kräfte (reine *Zwangskräfte*) 'weitgehend' auf die Geometrie des Konfigurationsraumes (gekrümmte Fläche) zurückgeführt. Nur 'weitgehend' deshalb, weil der Betrag der Bahngeschwindigkeit auf den Geodäten noch nicht festgelegt ist. EINSTEIN's Idee war es, die Gravitationskräfte als eine Art 'Vierer-Zwangskräfte' aufzufassen, die sich 'vollständig'<sup>35</sup> auf die Geometrie der als gekrümmt anzusehenden Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zurückführen lassen.

Das sollte deshalb möglich sein, weil die Bewegungsabläufe von Test-Massenpunkten<sup>36</sup> im Gravitationsfeld erfahrungsgemäß von der trägen Masse unabhängig sind (*Äquivalenzprinzip*), wenn sie keinen weiteren äußeren Kräften ausgesetzt sind.

Es gilt also, jeweils eine 4-dimensionale, pseudo-RIEMANNsche Mannigfaltigkeit zu finden, für die die Bewegungsabläufe von Test-Massenpunkten im gegebenen Gravitationsfeld (zeitartigen) Geodäten entsprechen.

Als *am Punkt  $\bar{q}$  geodätische Koordinaten*<sup>37</sup> bezeichnet man solche Koordinaten, bzgl. derer die CHRISTOFFEL-Symbole (1.39) an der Stelle  $\bar{q}$  verschwinden. Da sich die CHRISTOFFEL-Symbole nicht wie Tensor-Komponenten transformieren, sondern gemäß (1.41), sieht man leicht, daß zu jedem Punkt  $\bar{q}$  tatsächlich geodätische Koordinaten existieren.

**Beweis:** Für hinreichend kleine  $q^{0'} = \hat{q}^0, \dots, q^{3'} = \hat{q}^3$  ist die Transformation

$$\hat{q}^\mu \mapsto q^\alpha(q^{0'}, \dots, q^{3'}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{q}^\alpha + \hat{q}^\alpha - \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(\bar{q}) \hat{q}^\beta \hat{q}^\gamma$$

umkehrbar, sodaß die  $q^{\mu'}$  als Koordinaten einer Umgebung von  $\bar{q}$  angesehen werden können. Mit

$$\left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial \hat{q}^\beta} \right)_{|\hat{q}=0} = \delta_\beta^\alpha = \left( \frac{\partial \hat{q}^\alpha}{\partial q^\beta} \right)_{|q=\bar{q}}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>35</sup>'Vollständig' in dem Sinne, daß unterschiedliche Parametrisierungen der Bahnkurven (*Weltlinien*) im 4-dim. Raum-Zeit-Kontinuum nicht mehr physikalisch unterschiedlichen Bewegungsabläufen entsprechen.

<sup>36</sup>*Test-Massenpunkte* zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Ihre Masse ist so klein, daß sie keinen wesentlichen Einfluß auf die felderzeugenden Massen hat.
- Sie füllen ein Gebiet aus, dessen Ausdehnung so gering ist, daß sich darin das Gravitationsfeld nicht wesentlich ändert.
- Man interessiert sich lediglich für die Bewegung ihres Schwerpunktes (Ort des Massen'punktes').

<sup>37</sup>Vgl. Fußnote 14.

und

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}^\gamma} \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^\beta} \right) \Big|_{\bar{q}=0} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(\bar{q})$$

folgt dann die Behauptung. ■

Nach (1.44), (1.40) und (1.39) gilt

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\bar{q}) = 0 \quad \forall \mu, \nu, \lambda \iff g_{\alpha\beta,\gamma}(\bar{q}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma. \quad (1.48)$$

Daher existieren zu jedem Weltpunkt  $\bar{q}$  lokale Koordinaten  $q^{0'}, \dots, q^{3'}$ , die den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} g_{\alpha'\beta'}(\bar{q}) = 0, \quad |g_{\alpha'\beta'}(\bar{q})| = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha' = \beta' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genügen (Beweis als **Übungsaufgabe E1**). Da die Metrik diejenigen Raum-Zeit-Abstände beschreiben soll, die sich durch Ausmessung der Raum-Zeit-Geometrie mit Uhren und Maßstäben ergeben, die lokal der Speziellen Relativitätstheorie genügen (Verhalten derselben unabhängig von Vorgeschichte), sollte sich das zu

$$\frac{\partial}{\partial q^{\gamma'}} g_{\alpha'\beta'}(\bar{q}) = 0, \quad g(\bar{q})_{\alpha'\beta'} = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha' = \beta' = 0' \\ -1 & \text{für } \alpha' = \beta' \in \{1', 2', 3'\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.49)$$

präzisieren lassen. Bzgl. solcher geodätischer Koordinaten erscheint das Raum-Zeit-Kontinuum um  $\bar{q}$  herum in erster Näherung wie der lineare MINKOWSKI-Raum, der durch Geodäten gegebene Bewegungsablauf dementsprechend beschleunigungsfrei. Mit anderen Worten:

Das Gravitationsfeld läßt sich an jeder Stelle in erster Näherung ‘wegtransformieren’ (Einheitliche Natur von Trägheit und Gravitation).

**Übungsaufgabe E2:** Man untersuche die Geodäten des linearen MINKOWSKI-Raumes und erkläre damit das Zwillingsparadoxon.

Als einfacher Test der Geodätenhypothese sei eine gemäß

$$g_{\alpha\beta}(q(t)) \dot{q}^\alpha(t) \dot{q}^\beta(t) = c^2$$

parametrisierte (*zeitartige*) Geodäte betrachtet, für die dann (1.47) gilt. Unter den Voraussetzungen

$$\begin{array}{ll} g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \ll 1 & \text{geringe Krümmung} \\ g_{\alpha\beta,0} \ll g_{\alpha\beta,j} \text{ für } j = 1, 2, 3 & \text{vernachlässigb. Zeitanbh. d. Gravit.} \\ \dot{q}^j \ll \dot{q}^0 & \text{nichtrelativistische Bewegung} \end{array}$$

gilt dann

$$q^0(t) \approx ct + q^0(0)$$

und somit für  $j \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned} \ddot{q}^j & \stackrel{(1.47)}{=} -\Gamma_{\alpha\beta}^j \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \\ & \approx -c^2 \Gamma_{00}^j \\ & \stackrel{(1.39)}{=} -\frac{c^2}{2} g^{j\nu} (2g_{0\nu,0} - g_{00,\nu}) \\ & \approx -\frac{c^2}{2} g_{00,j}. \end{aligned}$$

Die Geodätenhypothese reproduziert also in geeigneter Näherung die NEWTONSche Gravitationstheorie, wobei  $\frac{c^2}{2} g_{00}$  (bis auf eine additive Normierungskonstante) dem Gravitationspotential entspricht! Zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit existieren aber Koordinaten, in denen die ersten Ableitungen von  $g_{\alpha\beta}$  verschwinden.

### 1.2.3 Relativbeschleunigung

In der NEWTONSchen Theorie zeigt sich das Vorhandensein eines ‘wahren’ (also nicht homogenen) Gravitationsfeldes in karthesischen Koordinaten daran, daß benachbarte Test-Massenpunkte **relativ zueinander** beschleunigt werden:

Sei  $\{\mathbf{x}_s(t)\}_s$  eine Schar von Lösungen der dem Gravitationspotential  $\Phi(\mathbf{x})$  entsprechenden Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}(t)). \quad (1.50)$$

Dann gilt in karthesischen Koordinaten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial s}(x_s)^j(t)\right) = \frac{\partial}{\partial s}(\ddot{x}_s)^j(t) = -\frac{\partial}{\partial s}(x_s)^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s(t)}. \quad (1.51)$$

Wir wollen den entsprechenden **Vektor** für das pseudo-euklidische Raum-Zeit-Kontinuum angeben:

Sei also  $\{(q_s)^\nu(t)\}_s$  eine Schar affin parametrisierter Geodäten. Dann ergibt sich für deren infinitesimale Abweichung:<sup>38</sup>

$$((\dot{q}_s)^\alpha(t) \nabla_\alpha) ((\dot{q}_s)^\beta(t) \nabla_\beta) \frac{\partial}{\partial s} (q_s)^\mu(t) = \left(\frac{\partial}{\partial s} (q_s)^\nu(t)\right) R^\mu_{\alpha\beta\nu}(q_s(t)) (\dot{q}_s)^\alpha(t) (\dot{q}_s)^\beta(t) \quad (1.52)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>38</sup>Hier bezeichnet  $((\dot{q}_s)^\alpha(t) \nabla_\alpha)$  die kovariante Ableitung **in Richtung** der Geodäten  $\{q_s(t)\}_t$ , die für Vektorscharen  $\{(A_s)^\mu(t)\}_t$  auf  $\{q_s(t)\}_t$  (also z.B.  $(A_s)^\mu(t) = \left(\frac{\partial}{\partial s} q_s\right)^\mu(t)$ ) erklärt ist:

$$((\dot{q}_s)^\beta(t) \nabla_\beta) (A_s)^\mu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} (A_s)^\mu(t) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(q_s(t)) (A_s)^\alpha(t) (\dot{q}_s)^\beta(t).$$

**Beweis von (1.52):** Wenn wir einfach  $q$  statt  $q_s$  schreiben, gilt

$$\begin{aligned}
& (\dot{q}^\alpha \nabla_\alpha) (\dot{q}^\beta \nabla_\beta) \frac{\partial}{\partial s} q^\gamma \\
&= \dot{q}^\alpha \nabla_\alpha \frac{\partial}{\partial s} \dot{q}^\gamma + \dot{q}^\alpha \nabla_\alpha \left( \dot{q}^\beta \Gamma_{\delta\alpha}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} q^\delta \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \ddot{q}^\gamma + \dot{q}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} \dot{q}^\mu + \frac{d}{dt} \left( \dot{q}^\beta \Gamma_{\delta\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} q^\delta \right) + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial s} q^\delta \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \ddot{q}^\gamma + 2 \dot{q}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} \dot{q}^\mu + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\delta\beta,\alpha}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} q^\delta + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial s} q^\delta + \underbrace{\dot{q}^\beta \Gamma_{\delta\beta}^\gamma}_{-\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\delta\mu}^\gamma} \frac{\partial}{\partial s} q^\delta.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \ddot{q}^\gamma &= -\frac{\partial}{\partial s} \left( \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \right) \\
&= -\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\alpha\beta,\delta}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} q^\delta - 2 \dot{q}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial s} \dot{q}^\beta
\end{aligned}$$

und

$$\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\mu = \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\delta}^\mu$$

folgt daraus die Behauptung. ■

Der RIEMANNsche Tensor, 2-fach verjüngt mit  $\dot{q}_s$ , übernimmt also bzgl. der gekrümmten Raum-Zeit in gewisser Weise die Rolle, die die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials bzgl. des flachen Raumes spielen.

## 1.2.4 Feldgleichungen

Die Geodätenhypothese legt fest, wie die Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums auf Testmassen wirkt. Nach Einstein sollte auch umgekehrt die Gesamtheit aller Materie (auch die elektromagnetischer Form) die Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums bestimmen. Dieser Gesetzmäßigkeit sollte eine lokale Feldgleichung zugrunde liegen, die entsprechend 1.2.3 in etwa der POISSONSchen Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi\gamma\rho \quad (1.53)$$

der NEWTONSchen Gravitationstheorie entspricht, in der  $\Phi$  das Gravitationspotential,  $\gamma$  die Gravitationskonstante und  $\rho$  die Massendichte bezeichnet. Im Vakuum, liegt es nach 1.2.3 somit nahe, für alle Geodäten

$$R^\nu{}_{\alpha\beta\nu}(q(t)) \dot{q}^\alpha(t) \dot{q}^\beta(t) = 0$$

zu verlangen. Daher<sup>39</sup> hatte EINSTEIN 1915 für das Vakuum die Feldgleichungen  $R_{\alpha\beta} = 0$  vorgeschlagen, wobei

$$R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R^\nu{}_{\alpha\beta\nu} \quad (1.54)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>39</sup>Man sieht leicht, daß  $R_{\alpha\beta}$  symmetrisch ist, denn:

$$\Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha,\beta}, \quad \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu = \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu = \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\nu.$$



den sog. **RICCI-Tensor** bezeichnet.

Dabei ist es natürlich wichtig, daß diese Feldgleichungen weniger verlangen, als das Verschwinden des RIEMANNschen Krümmungstensors.

Innerhalb einer Materieverteilung liegt es zunächst nahe, den RICCI-Tensor mit einem Vielfachen des Energie-Spannungs-Tensors gleichzusetzen. Man setzt jedoch als Feldgleichungen der Gravitation

$$\boxed{R^{\alpha\beta}(q) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(q)g_{\mu\nu}(q)R^{\mu\nu}(q) + \Lambda g^{\alpha\beta}(q) = -\kappa M^{\alpha\beta}(q),} \quad (1.55)$$

wobei:  $M^{\alpha\beta}$  = Energie-Spannungs-Tensor der Materie

an,<sup>40</sup> weil hieraus **automatisch** der uns in geodätischen Koordinaten vertraute Erhaltungssatz<sup>41</sup>

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (1.56)$$

folgt (Beweis als **Übungsaufgabe E3**). Letzteres erklärt den Faktor  $-\frac{1}{2}$ , nicht jedoch den Zusatzterm mit der willkürlichen **kosmologischen Konstanten**  $\Lambda$ .

Die Erwägung eines *kosmologischen* Zusatzterms  $\Lambda g^{\alpha\beta}$  beruht auf einer formalen Begründung des Feldtensors:<sup>42</sup>

In geodätischen Koordinaten nimmt der RIEMANNsche Krümmungstensor (1.45) eine besonders einfache Form

$$(1.49) \implies R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'}(\bar{q}) = \frac{1}{2} (g_{\nu'\alpha',\beta',\mu'}(\bar{q}) - g_{\beta'\nu',\alpha',\mu'}(\bar{q}) - g_{\mu'\alpha',\beta',\nu'}(\bar{q}) + g_{\beta'\mu',\alpha',\nu'}(\bar{q})) \quad (1.57)$$

an<sup>43</sup> (Beweis als **Übungsaufgabe E4**). In dieser Form lassen sich die Symmetrieeigenschaften des RIEMANNschen Krümmungstensors bequem ablesen:

1.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$
2.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$
3.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$
4.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\nu\mu\beta\alpha}$

Version vom 26. März 2009

<sup>40</sup>Bzgl. der Konstanten  $\kappa$  sowie der Definition des Energie-Spannungs-Tensors siehe 2.2.

<sup>41</sup>Für gekrümmte Raum-Zeit ist das Konzept von Energie und Impuls allerdings noch zu schlecht verstanden, als daß man (1.56) direkt rechtfertigen könnte. So begründet man das Vorgehen **heuristisch** mit einer Verallgemeinerung des Äquivalenzprinzips: Den Grundbeziehungen bzgl. der flachen Raum-Zeit sollten i.a. – von den Gravitationsgleichungen abgesehen – bzgl. allgemeiner Koordinaten konsistent formulierte Grundbeziehungen entsprechen, die in geodätischen Koordinaten möglichst gleiche Gestalt annehmen. Oft genügt es dazu, partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen zu ersetzen.

<sup>42</sup>Vgl. (Lovelock, 1972).

<sup>43</sup>Hier wurde (1.37) sinngemäß angewandt:  $R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'}(\bar{q}) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha'\mu'}R^{\mu'}{}_{\beta'\mu'\nu'}(\bar{q})$

Weitere **allgemeine** Symmetrieeigenschaften besitzt  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  offensichtlich nicht, hat also 20 unabhängige Komponenten (Beweise als **Übungsaufgabe E5**).

Wählt man die geodätischen Koordinaten speziell als **RIEMANNsche Normalkoordinaten**,<sup>44</sup> so vereinfacht sich die Beziehung zwischen dem RIEMANNschen Tensor und den 2. Ableitungen der  $g_{\alpha'\beta'}$  noch weiter:

$$g_{\alpha'\beta',\mu',\nu'} = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\mu'\beta'\nu'} + R_{\alpha'\nu'\beta'\mu'}).$$

Damit läßt sich folgendes zeigen.<sup>45</sup>

Ein symmetrischer Tensor  $S^{\alpha\beta}$ , der sich aus den  $q_{\alpha\beta}$  sowie deren Ableitungen maximal 2. Ordnung ‘bilden’ läßt und dabei linear in den Ableitungen 2. Ordnung ist, muß stets von der Form

$$S^{\alpha\beta}(q) = a R^{\alpha\beta}(q) + b g^{\alpha\beta}(q) g_{\mu\nu}(q) R^{\mu\nu}(q) + c g^{\alpha\beta}(q)$$

mit konstanten  $a, b$  und  $c$  sein.

Eine zwingende Begründung für die Feldgleichungen (1.55) – deren Kompatibilität nicht einmal sofort zu erkennen ist<sup>46</sup> – läßt sich natürlich nicht angeben. Ihre eigentliche Rechtfertigung beruht – wie für jede Theorie – auf der experimentellen Bestätigung ihrer Konsequenzen.

Die Lösungen der Feldgleichungen (1.55) sind jedoch i.a. sehr schwer unter Kontrolle zu bringen, da sie – im Gegensatz z.B. zu den MAXWELLSchen Gleichungen – **nichtlinear** sind.

<sup>44</sup>Siehe (Misner et al., 1973, S. 285). hierbei sind nun auch die **dritten** Ableitungen der  $q^{\alpha'}(q^0, \dots, q^3)$  an der Stelle  $\bar{q}$  geeignet zu wählen.

<sup>45</sup>Vgl. (Misner et al., 1973, Übungen 17.1–17.3).

<sup>46</sup>Eine erste grobe Abschätzung der Freiheitsgrade berechtigt allerdings zu entsprechender Hoffnung: Die linke Seite hat, da sie divergenzfrei ist, 4 Freiheitsgrade weniger als die Matrix der  $g_{\alpha\beta}$ . Das ist offenbar im Einklang mit der allgemeinen Kovarianz: Durch geeignete Koordinatenwahl lassen sich nämlich lokal 6 der 10 unabhängigen Komponenten von  $g$  beliebig festlegen.

# Kapitel 2

## Analyse der Feldgleichungen

### 2.1 Die Vakuum-Feldgleichungen ohne kosmologischen Term

#### 2.1.1 Statische sphärisch symmetrische Lösungen

##### Lösungsansatz

Für das von Materie freie Raum-Zeit-Gebiet, d.h. für  $T^{\alpha\beta} = 0$ , sind die Feldgleichungen (1.55) für  $\Lambda = 0$  tatsächlich äquivalent zu den **Vakuum-Feldgleichungen**<sup>1</sup>

$$R^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

der metrischen Koeffizienten  $g_{\mu\nu}$ .

Für diese Feldgleichungen sollen sphärisch symmetrische, statische Lösungen gesucht werden, für die zu jedem Raum-Zeit-Punkt  $\bar{q}$  Koordinaten  $q^{\nu'}$  mit (1.49) existieren.

*Sphärisch symmetrisch* meint:

- Die Raum-Zeit läßt sich (hinsichtlich des materiefreien Teils) als eine Schar konzentrischer Kugeloberflächen verstehen, die als starre Gerüste aus Standard-Stäben **gedacht** seien, auf denen geeignet skalierte Standard-Uhren verteilt sind.
- Die Einschränkung der Metrik  $g$  auf eine Untermannigfaltigkeit der Raum-Zeit die einer solchen Kugeloberfläche und einer festen Zeitanzeige der verteilten Uhren (**Koordinaten-Zeit**  $t$ ) entspricht, stimmt jeweils mit einem negativen Vielfachen der Einschränkung der euklidischen Metrik des  $\mathbb{R}^3$  auf diese Fläche überein. Zu jedem  $r > 0$  aus einem geeigneten Wertebereich gehöre genau eine Kugelschale mit Oberflächeninhalt  $4\pi r^2$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Daß aus (2.1)  $R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$  folgt, ist trivial. Umgekehrt folgt aus letzterem nach (1.38)  $0 = g_{\alpha\beta} \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right) = -g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$  und somit  $R^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$ .

- Die Kugelschalen lassen sich so durch die üblichen Polarwinkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  koordinatisieren, daß die Einschränkung von  $g$  auf die Untermannigfaltigkeit aller Weltpunkte fester Koordinaten-Zeit diesbezüglich jeweils dreihinvariant ist.<sup>2</sup>
- Die Koordinatengeschwindigkeit des Lichtes bei Ausbreitung tangential an die Kugeloberflächen ist von der genaueren Spezifizierung der Ausbreitungsrichtung unabhängig.

**Statisch** meint:<sup>3</sup>

- Bzgl. der Koordinaten

$$q^0 = ct, \quad q^1 = r, \quad q^2 = \vartheta, \quad q^3 = \varphi$$

sind die Koeffizienten der Metrik  $g$  von der **Koordinaten-Zeit**  $t$  unabhängig.<sup>4</sup>

Zu einer Lösung der beschriebenen Art existieren also stets Funktionen  $a(r)$ ,  $b(r)$  mit denen – bei geeigneter Uhrensynchronisation – bzgl. o.a. Koordinaten

$$g_{\mu\nu}(ct, r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

gilt (Beweis als **Übungsaufgabe E6**). Der zugehörige RICCI-Tensor ist<sup>5</sup>

$$R_{\alpha\beta} = \begin{cases} -e^{a-b} \left( \frac{1}{2}a'' - \frac{1}{4}a'b' + \frac{1}{4}a'a' + \frac{1}{r}a' \right) & \text{für } \alpha = \beta = 0 \\ \frac{1}{2}a'' - \frac{1}{4}a'b' + \frac{1}{4}a'a' - \frac{1}{r}b' & \text{für } \alpha = \beta = 1 \\ e^{-b} \left( 1 + \frac{r}{2}(a' - b') \right) - 1 & \text{für } \alpha = \beta = 2 \\ R_{22} \sin^2 \vartheta & \text{für } \alpha = \beta = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E7**; vgl. (Misner, 1963, Appendix A)). Damit  $R_{00} = R_{11} = 0$  gilt, müssen  $a$  und  $b$  so gewählt werden, daß  $\frac{d}{dr}a = -\frac{d}{dr}b$ . Bei entspr. Skalierung von  $t$ , die wir voraussetzen wollen, muß also

$$a(r) = -b(r)$$

<sup>2</sup>Jedoch i.a. nicht mehr euklidisch.

<sup>3</sup>Bzgl. einer allgemeinen Definition siehe (Wald, 1984, S. 119).

<sup>4</sup>Hier ist die Skalierung der Uhren notwendig, weil unskalierte Standard-Uhren an unterschiedlichen Stellen im Gravitationsfeld unterschiedliche Laufgeschwindigkeit haben; vgl. (2.12).

<sup>5</sup>Durch ' wird hier jeweils eine Differentiation nach  $r$  mitgeteilt.

gelten.<sup>6</sup> Um zusätzlich  $R_{22} = 0$  zu gewährleisten, muß  $a$  außerdem der Differentialgleichung

$$1 = e^{a(r)} \left( 1 + r \frac{d}{dr} a(r) \right) = \frac{d}{dr} (r e^{a(r)})$$

genügen, die die allgemeine Lösung

$$e^{a(r)} = 1 - \frac{\hat{m}}{r}, \quad \hat{m} \text{ Integrationskonstante,}$$

hat. Dafür sind tatsächlich alle Komponenten des RICCI-Tensors Null, d.h. die Vakuum-Feldgleichungen erfüllt (Beweis als **Übungsaufgabe E8**). Wir haben damit die sog. **SCHWARZSCHILD-Lösung**:

$$g_{\mu\nu}(ct, r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\hat{m}}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{\hat{m}}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Man beachte daß (2.3) für  $r \rightarrow \infty$  in die MINKOWSKI-Metrik (Komponenten bzgl. räumlicher Kugelkoordinaten) übergeht, obwohl das dem Lösungsansatz nicht direkt anzusehen war.

Das sog. **BIRKHOFFsche Theorem**<sup>7</sup> besagt, daß zur Ableitung der **statischen** Lösung bereits die Annahme der sphärischen Symmetrie ausreicht. (2.3) sollte also selbst für sphärisch symmetrisch **pulsierende** Massenverteilungen im massefreien Raum-Zeit-Gebiet gelten.

Den Zusammenhang von  $\hat{m}$  mit bekannten physikalischen Größen erkennt man im nahezu flachen Bereich, d.h. für  $r \gg \hat{m}$ . Gemäß den Betrachtungen am Schluß von 1.2.2 sollte dort für Geodäten

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &\approx -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c^2}{2} g_{00}(ct, r, \vartheta, \varphi) \right) \Big|_{r=r(t)} \\ &\stackrel{(2.3)}{=} -\frac{d}{dr} \left( -\frac{\hat{m}c^2}{2r} \right) \Big|_{r=r(t)} \end{aligned}$$

gelten und der NEWTONschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{r}(t) = -\frac{d}{dr} \left( -\gamma \frac{M}{r} \right) \Big|_{r=r(t)}$$

für einen Massenpunkt  $M$  entsprechen. Demzufolge ist die Identifizierung

$$\hat{m} = \frac{2\gamma}{c^2} M \quad (2.4)$$

<sup>6</sup>Eine Verwendung von  $e^{-\kappa/2} t$  statt  $t$  würde einer Ersetzung von  $e^{a(r)}$  durch  $e^{a(r)+\kappa}$  entsprechen.

<sup>7</sup>Ein Beweis dafür findet sich z.B. in (Ellis und Hawking, 1973)

vorzunehmen. Ein typischer Wert dafür ist

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma}{c^2} \text{Sonnenmasse} &\approx \frac{2(7 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2})}{(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} (2 \times 10^{30} \text{kg}) \\ &\approx 3 \text{ km}. \end{aligned}$$

Der Radius ‘normaler’ Himmelskörper ist also deutlich größer als ihr SCHWARZSCHILD-**Radius**  $\hat{m}$ , so daß die zugehörige SCHWARZSCHILD-Lösung nur für einen *äußeren* Bereich  $r > \hat{m}$  relevant ist.

Aber auch für  $r \in (0, \hat{m})$  ist (2.3) eine Lösung der Gleichungen (2.1), deren Relevanz für hinreichend große Masse  $M$  in 2.1.3 diskutiert wird.

**Übungsaufgabe E9:** Man diskutiere den Effekt einer Änderung der Koordinaten-Zeit gemäß  $t \mapsto t' = \rho(r)t + \eta(r)$ .

## 2.1.2 Typische physikalische Effekte der äußeren Lösung

### 2-Dimensionale Untermannigfaltigkeiten

Wählt man die Funktion  $h(r)$  so, daß

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{d\tau}h(r(\tau))\right)^2 + \left(\dot{r}(\tau)\right)^2 + \left(r(\tau)\dot{\vartheta}(\tau)\right)^2 \\ &= -g_{11}(q(\tau))\left(\dot{r}(\tau)\right)^2 - g_{33}(q(\tau))\left(\dot{\vartheta}(\tau)\right)^2 \quad \text{für } t(\tau) = 0, \vartheta(\tau) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

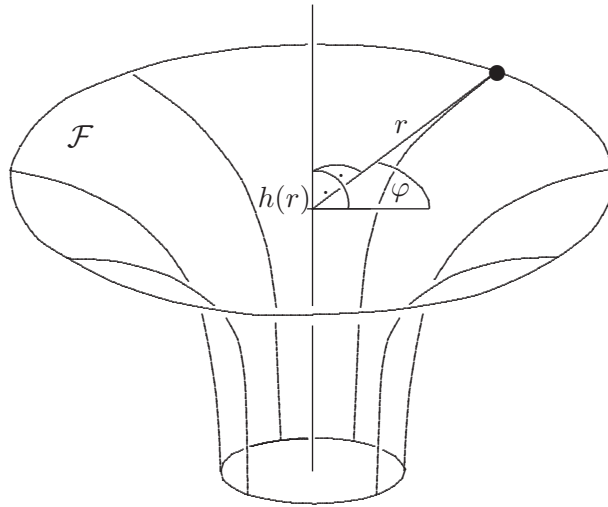
dann ist die Einschränkung des  $(-1)$ -fachen der Metrik (2.3) auf die durch

$$t = \text{const.}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad r > \hat{m} \quad (2.6)$$

gegebene Untermannigfaltigkeit isomorph zur Einschränkung der euklidischen Metrik des  $\mathbb{R}^3$  auf die in Zylinderkoordinaten durch die Bedingungen

$$h = h(r), \quad r > \hat{m}$$

gegebene Untermannigfaltigkeit  $F$  des  $\mathbb{R}^3$ :



Auswertung von (2.5) liefert

$$h'(r) = \sqrt{\frac{\hat{m}}{r - \hat{m}}} \quad (2.7)$$

und somit bis auf eine unwesentliche additive Konstante:

$$h(r) = \sqrt{4\hat{m}(r - \hat{m})}. \quad (2.8)$$

$F$  ist also Teil eines Rotationsparaboloids, des sog. **FLAMMSchen Paraboloids**. Dies gibt gleichzeitig eine gewissen anschauliche Vorstellung von dem, was asymptotische Flachheit hier bedeutet.

### Radiale Entfernungsbegriffe

Allgemein ist die **Maßstabs-Länge** für raumartige Geodäten

$$\mathcal{C} = \{q(s) : s \in [s_1, s_2]\}$$

durch

$$|\mathcal{C}| = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-g_{\mu\nu}(s) \left(\frac{d}{ds}q^\mu(s)\right) \frac{d}{ds}q^\nu(s)} ds$$

gegeben und im Falle  $q^0(s) = \text{const.}$  mit der Zahl der Standardmaßstäbe zu identifizieren, die stationär<sup>8</sup> aneinandergelegt die zugehörige Raumkurve bilden.

Solche Messungen sind über kosmische Distanzen natürlich nicht realisierbar, weshalb praktikablere Entfernungsbegriffe zu untersuchen sind.

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Die Weltlinie eines **stationären Körperpunktes** ist definitionsgemäß von der Form  $\{q(t) = (ct, r, \vartheta, \varphi)\}_t$ .

Die Geodäte, die  $(ct, r_1, \vartheta, \varphi)$  und  $(ct, r_2, \vartheta, \varphi)$  verbindet, ist für  $r_1 < r_2$  als Punktmenge<sup>9</sup> durch

$$\mathcal{C}_{r_1, r_2} = \{q(r) = (ct, r, \vartheta, \varphi) : r \in [r_1, r_2]\}$$

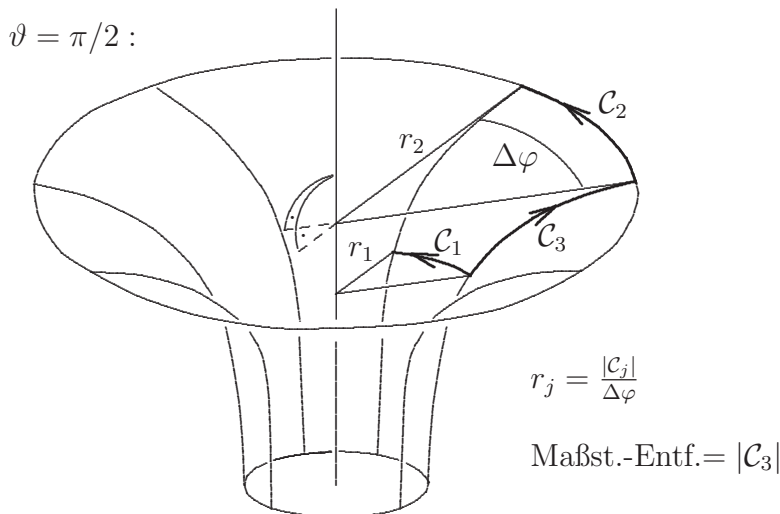
gegeben (Beweis als **Übungsaufgabe E10**). Die **Maßstabs-Entfernung** zwischen  $(ct, r_1, \vartheta, \varphi)$  und  $(ct, r_2, \vartheta, \varphi)$  ist dementsprechend

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{r_1, r_2}| &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-g_{\mu\nu}(ct, r, \vartheta, \varphi) \left( \frac{\partial}{\partial r} q^\mu(ct, r, \vartheta, \varphi) \right) \frac{\partial}{\partial r} q^\nu(ct, r, \vartheta, \varphi)} dr \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}}{r}}} \\ &\underset{\text{Taylor}}{\approx} \int_{r_1}^{r_2} \left( 1 + \frac{\hat{m}}{2r} \right) dr = (r_2 - r_1) + \frac{\hat{m}}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{für } r \gg \hat{m}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sie ist also größer als die Differenz  $r_2 - r_1$  der **scheinbaren Entfernungen**

$$r = \frac{\text{Objektlänge}}{\text{Winkelbereich}}$$

vom Ursprung.



Für

$$\begin{aligned} M &= \text{Erdmasse, also } \hat{m} \approx 0.44\text{cm} \\ r_1 &= \text{Erdradius } \approx 6,4 \times 10^8\text{cm} \\ r_2 &= \text{Abstand zur Sonne } \approx 1,5 \times 10^{13}\text{cm} \end{aligned}$$

beträgt der Unterschied beider Entfernungsbegriffe nur etwa 5 cm.

<sup>9</sup>Die durch  $r$  gegebene Parametrisierung ist **nicht** affin.



Die **Radar-Entfernung** zweier stationärer Beobachter 1 und 2 mit gleichen Polarwinkeln  $\vartheta$ ,  $\varphi$  ist definiert als das  $\frac{c}{2}$ -fache der Koordinaten-Zeit von Beobachter 1, die ein Lichtsignal benötigt, um radial von Beobachter 1 zu Beobachter 2 und wieder zurück zu gelangen. Für die Weltlinie  $\{q(t) = (ct, r(t), \vartheta, \varphi)\}_t$  eines Lichtsignals radialer Laufrichtung gilt definitionsgemäß<sup>10</sup>

$$0 = g_{\alpha\beta}(q(t)) \dot{q}^\alpha(t) \dot{q}^\beta(t) \stackrel{(2.3)}{=} c^2 \left(1 - \frac{\hat{m}}{r(t)}\right) - \left(1 - \frac{\hat{m}}{r(t)}\right)^{-1} \left(\frac{d}{dt}r(t)\right)^2. \quad (2.10)$$

Die **Koordinaten-Geschwindigkeit** eines radialen Lichtsignals ist also

$$\frac{d}{dt}r(t) = \pm \left(1 - \frac{\hat{m}}{r(t)}\right) c. \quad (2.11)$$

Die Radar-Entfernung zweier statischer Beobachter mit den Kugelkoordinaten  $r_1, \vartheta, \varphi$  bzw.  $r_2, \vartheta, \varphi$  ist somit für  $r_1 < r_2$ :

$$\begin{aligned} c \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{\hat{m}}{r}} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{\hat{m}}{r - \hat{m}}\right) dr \\ &= (r_2 - r_1) + \hat{m} \ln \frac{r_2 - \hat{m}}{r_1 - \hat{m}}. \end{aligned}$$

Es gibt eine Reihe weiterer Entfernungsbegriffe, von denen sich einer z.B. auf die parallaktische Verschiebung, ein anderer auf die relative Helligkeit von Sternen bezieht. Für kosmische Distanzen sind aber alle Entfernungsbegriffe problematisch.

### Zeitdilatation und gravitative Rotverschiebung

Die Änderung der Zeitanzeige  $\tau$  einer längs der zeitartigen Weltlinie  $\{q(\lambda)\}_\lambda$  bewegten (unskalierten) Standard-Uhr ist gemäß physikalischer Interpretation der Metrik:

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu}(q(\lambda)) \left(\frac{d}{d\lambda}q^\mu(\lambda)\right) \frac{d}{d\lambda}q^\nu(\lambda)}.$$

Der Zusammenhang der physikalischen Zeitanzeige  $\tau$  der Standard-Uhr eines statischen Beobachters mit dessen Koordinaten-Zeit  $t$  ist somit gemäß (2.3) durch<sup>11</sup>

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\hat{m}}{r}} \quad (2.12)$$

Version vom 26. März 2009

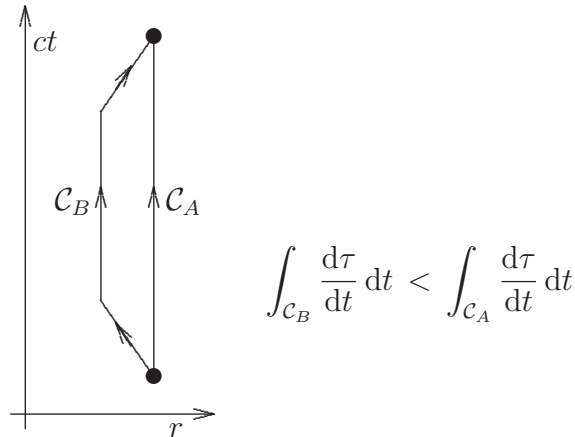
<sup>10</sup>Nach (1.43) (und (2.15)) steht das im Einklang mit der Geodätenhypothese, da die linke Gleichung in (2.10) von der Wahl der Parametrisierung unabhängig ist.

<sup>11</sup>Für den Zusammenhang der radialen Maßstabs-Entfernung  $\sigma$  mit dem  $r$ -Koordinaten-Abstand ergibt sich analog  $\frac{d\sigma}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}}{r}}}$ . Nach (2.11) hat somit die **physikalische** Lichtgeschwindigkeit

— zumindest bei Ausbreitung in radialer Richtung — den Betrag  $\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{dt} \frac{d\sigma}{dr} = c$ .

gegeben. Die Laufgeschwindigkeit relativ zur **Koordinaten**-Zeit wächst folglich mit  $r$  (immer weniger) an.

Wenn also ein statischer Beobachter 2 mit der Radialkoordinate  $r_2$  seinen Zwilingsbruder 2 zur ‘Stelle’  $r_1 < r_2$  schickt, dort als statischen Beobachter hinreichend lange verharren läßt und dann zu sich zurückruft, so wird er danach im Einklang mit (2.12) feststellen, daß 1 weniger gealtert ist, als er selbst:<sup>12</sup>



Wenn  $\{q(t) = (ct, r(t), \vartheta, \varphi)\}_t$  mögliche Weltlinie eines Lichtsignals ist, so nach (2.11) auch  $\{\bar{q}(t) = (ct + c\Delta t, r(t), \vartheta, \varphi)\}_t$ . Der Koordinaten-Zeitabstand zweier Lichtsignale ‘radialer Laufrichtung’ ist also für alle  $r$  der gleiche. Dasselbe sollte dann für den zeitlichen Abstand zweier Wellenberge eines entsprechenden Wellenzuges gelten; d.h.:

Die Zahl der Schwingungen pro **Koordinaten**-Zeiteinheit ist für eine Lichtwelle radialer Laufrichtung von  $r$  unabhängig.

Das Verhältnis<sup>13</sup>

$$\frac{\omega(r_1)}{\omega(r_2)} = \frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1}$$

der **physikalischen** Kreisfrequenzen der Lichtwelle ist dann nach (2.12) aber<sup>14</sup>

$$\frac{\omega(r_1)}{\omega(r_2)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\hat{m}}{r_2}}{1 - \frac{\hat{m}}{r_1}}}. \quad (2.13)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>Für  $M = \text{Erddmasse}$ ,  $r_1 = \text{Erdradius}$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$  altert 2 etwa um einen Faktor 1.000 000 000 8 schneller als 1.

<sup>13</sup> $\Delta\tau_j$  bezeichnet den physikalischen Zeitabstand zweier bei  $r_j$  aufeinanderfolgender Wellenberge.

<sup>14</sup>Bzgl. experimenteller Überprüfung von (2.13) siehe z.B. (Pound und Snider, 1965) sowie die Zitate in (Wald, 1984, S. 138).

Die Frequenz nimmt also mit wachsendem Abstand vom Ursprung (immer weniger) ab (**gravitative Rotverschiebung**). Quantenmechanisch läßt sich das folgendermaßen verstehen: Für  $\hat{m} \ll r_1, r_2$  folgt aus (2.13)

$$\frac{\omega(r_2) - \omega(r_1)}{\omega(r_2)} \approx -\frac{\hat{m}}{2r_1} + \frac{\hat{m}}{2r_2}$$

und somit nach (2.4)

$$0 \approx (\hbar\omega(r_2) - \hbar\omega(r_1)) + \left( -\gamma \frac{\frac{\hbar\omega(r_2)}{c^2} M}{r_2} + \gamma \frac{\frac{\hbar\omega(r_1)}{c^2} M}{r_1} \right).$$

Da  $\hbar\omega(r)$  die kinetische Energie des Photons, also  $\frac{\hbar\omega(r)}{c^2}$  seine Masse bei  $r$  ist, wird also bei radialer Entfernung vom Ursprung der Zuwachs der gravitativen potentiellen Energie des Photons durch entsprechende Abnahme der kinetischen Energie kompensiert.

**Übungsaufgabe E11:** Man leite die gravitative Rotverschiebung aus dem Äquivalenzprinzip und dem gewöhnlichen klassischen DOPPLER-Effekt ab (vgl. (Rindler, 1969, S. 145)).

## Geodäten

Allgemein — also nicht nur für die SCHWARZSCHILD-Lösung — gilt<sup>15</sup>

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \quad \text{für **affin** parametrisierte Geodäten } q(\tau)}$$
 (2.14)

**Beweis von (2.14):**

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta) & \stackrel{(1.47)}{=} \dot{g}_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \\ & \stackrel{(1.44),(1.40)}{=} (g_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\alpha\beta}) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \\ & \stackrel{(1.22)}{=} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \\ & \stackrel{(1.22)}{=} \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \\ & \stackrel{(1.22)}{=} \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Anwendung von (2.14) auf (2.3) für  $\alpha = 3$  liefert

$$r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.}$$

für eine (affin parametrisierte) **Geodäten**  $q(\tau)$ . Eine Geodäte, deren Tangente an einer Stelle keine Komponente in  $\varphi$ -Richtung hat, hat also an keiner Stelle eine Komponente in  $\varphi$ -Richtung und verläuft somit ganz in einer Untermannigfaltigkeit zu konstantem  $\varphi$ . Aus Symmetriegründen folgt daraus:

<sup>15</sup>Eine ‘gehobenere’ Formulierung von (2.14) findet man in (Wald, 1984, S. 442).

Bei geeigneter Wahl der Polarwinkelkoordinaten  $\vartheta, \varphi$  verläuft eine Geodäte ganz in der ‘ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ -Untermannigfaltigkeit’, läßt sich also als Bewegung auf dem FLAMMSchen Paraboloid veranschaulichen.

Im folgenden werden deshalb nur solche Geodäten mit konstantem  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  untersucht.

Dann gilt also

$$L \stackrel{\text{def}}{=} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (2.15)$$

und Anwendung von (2.14) auf (2.3) für  $\alpha = 0$  liefert<sup>16</sup>

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{\hat{m}}{r}\right) c^2 \dot{t} = \text{const.} \quad (2.16)$$

Auswertung von (1.43) liefert schließlich noch

$$\kappa c^2 = \left(1 - \frac{\hat{m}}{r}\right) (c \dot{t})^2 - \frac{(\dot{r})^2}{1 - \frac{\hat{m}}{r}} - r^2 \dot{\varphi}^2,$$

wobei wir

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für zeitartige Geodäten} \\ 0 & \text{für lichtartige Geodäten} \end{cases} \quad (2.17)$$

eingeführt haben,<sup>17</sup> um zeitartige und lichtartige Geodäten weitgehend gleichzeitig behandeln zu können.

Setzt man (2.15) und (2.16) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \phi_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{c}\right)^2 \quad (2.18)$$

mit dem ‘effektiven Gravitationspotential’

$$\begin{aligned} \phi_{\text{eff}}(r) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{m}}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa c^2\right) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \kappa \left(\frac{c^2}{2} - \gamma \frac{M}{r}\right) + \frac{L^2}{2r^2} - \gamma \frac{ML^2}{c^2 r^3}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Durch Betrachtung der Nullstellen

$$r_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 3(\hat{m}cL)^2}}{\hat{m}c^2}$$

von

$$\frac{d}{dr} \Phi_{\text{eff}}(r) = \frac{c^2 \hat{m}}{2r^4} \left( r^2 - \frac{2}{\hat{m}} \left(\frac{L}{c}\right)^2 r + 3 \left(\frac{L}{c}\right)^2 \right)$$

für **zeitartige** Geodäten erkennt man:

Version vom 26. März 2009

<sup>16</sup>(2.16) steht aufgrund der unterschiedlichen Bedeutung der Parameter  $\tau$  nicht im Widerspruch zu (2.12).

<sup>17</sup>Für zeitartige Geodäten identifizieren wir also  $\tau$  mit der Eigenzeit.

- Für  $L^2 < 3(\hat{m}c)^2$  existiert keine Nullstelle. Da  $\Phi_{\text{eff}}(r)$  für  $r \rightarrow 0$  gegen  $-\infty$  strebt, muß dieses Potential dann streng monoton wachsend sein, also

$$\ddot{r} = -\Phi'_{\text{eff}}(r) < 0 \quad (2.18)$$

und somit

$$\left(\exists \tau_0 : \dot{r}(\tau_0) < 0\right) \implies \left(\dot{r}(\tau) < 0 \forall \tau\right)$$

gelten.

- Für

$$r < \frac{3}{2}\hat{m}$$

ist  $\Phi'_{\text{eff}}$  offensichtlich positiv, sodaß in diesem Bereich grundsätzlich keine Kreisbahnen ( $\dot{r} = 0$ ) existieren können.

- Im Bereich

$$r < 3\hat{m},$$

sind nur Kreisbahnen mit  $r = r_-$  möglich; denn

$$r_+ \geq \frac{L^2}{\hat{m}c^2} \geq 3\hat{m}.$$

Kreisbahnen zu  $r = r_-$  sind aber offensichtlich instabil.

Man beachte außerdem, daß

$$r_+ \approx \frac{2L^2}{\hat{m}c^2} \text{ für } L \gg \hat{m}c$$

eine erneute Bestätigung für (2.4) ist.<sup>18</sup>

Wenn man sich nur für Geodäten interessiert, die nicht radial sind, dann ist  $r$  lokal eine eindeutige Funktion von  $\varphi \in \mathbb{R}$  und mit der dann erlaubten (lokalen) Definition

$$u(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r(\varphi)}$$

gilt

$$\frac{d}{d\varphi} u(\varphi)|_{\varphi=\varphi(\tau)} = - \left( \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)^2} \right) |_{\varphi=\varphi(\tau)} \stackrel{(2.15)}{=} - \frac{\dot{r}(\tau)}{L}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>18</sup>Für die NEWTONSche Theorie gilt  $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{const.}$  mit

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\gamma M}{r}, \quad \frac{d}{dr} U_{\text{eff}}(r) = 0 \iff r = \frac{L^2}{\gamma M}$$

( $L = r^2 \dot{\varphi}$ ).

(2.18) wird damit äquivalent zu

$$\frac{1}{2}L^2 u'(\varphi)^2 + \Phi(u(\varphi)) = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{c} \right)^2, \quad \Phi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right),$$

was bei Differentiation nach  $\varphi$  gemäß (2.19)

$$u'' + u = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{c}{L} \right)^2 \hat{m} + \frac{3}{2} \hat{m} u^2 \quad (2.20)$$

liefert.

Zunächst sollen die zeitartigen Geodäten untersucht werden, d.h. der Fall  $\kappa = 1$ :

Dann unterscheidet sich (2.20) formal<sup>19</sup> von der entsprechenden Gleichung

$$u'' + u = \frac{1}{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma M}{L^2} \quad \left( = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{L} \right)^2 \hat{m} \right) \quad (2.21)$$

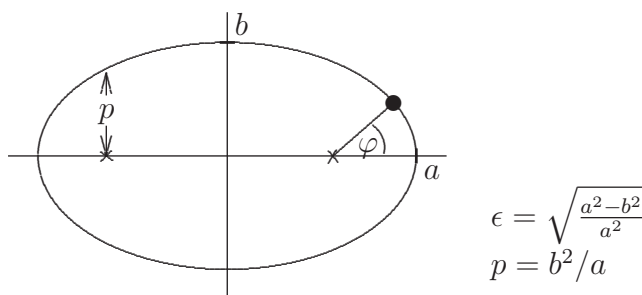
des klassischen KEPLER-Problems<sup>20</sup> nur durch den zusätzlichen ‘Störterm’  $\frac{3}{2} \hat{m} u^2$ . Die einer **Planetenbahn** ( $\epsilon < 1$ ) entsprechende Lösung von (2.21) ist bei geeigneter Wahl der  $\varphi = 0$ -Richtung die Ellipse

$$u_{\text{Newton}}(\varphi) = \frac{1}{p} (1 + \epsilon \cos \varphi) \quad (2.22)$$

mit dem Halbparameter

$$p = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{c}{L} \right)^2 \hat{m} \right)^{-1}$$

und der Exzentrizität  $\epsilon \in [0, 1)$ :



**Anmerkung:** Es sei daran erinnert, daß für die KEPLERSche Planetenbahn  $E_m = \gamma \frac{mM}{2p} (\epsilon^2 - 1)$  und  $p = \frac{L^2}{m^2 \gamma M}$  gilt, wobei  $M$  die Sonnenmasse,  $m$  die Planetenmasse und  $E_m$  die Energie des als Massenpunkt behandelten Planeten ist (siehe Abschn. 3.5.3 von (Lücke, ein)).

<sup>19</sup>Wenn man also von der unterschiedlichen Bedeutung der Koordinaten  $t, r$  absieht.

<sup>20</sup>Vgl. Fußnote 18.

Man sollte daher eine gute Näherungslösung von (2.20) erhalten, wenn man zu  $u_{\text{Newton}}$  eine möglichst wenig beitragende partikuläre Lösung von

$$u_{\text{part}}'' + u_{\text{part}} = \frac{3}{2} \hat{m} (u_{\text{Newton}})^2 \quad (2.23)$$

hinzuaddiert:

$$u_{\text{approx}} = u_{\text{Newton}} + u_{\text{part}} .$$

Die geeignete partikuläre Lösung von (2.23) ist

$$\begin{aligned} u_{\text{part}}(\varphi) &= \frac{1}{p} \left( \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} \epsilon \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{\hat{m}}{p} \epsilon^2 (2 - \cos^2 \varphi) \right) \\ &\approx \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p^2} \epsilon \varphi \sin \varphi \quad \text{für } \varphi \gg 1 \end{aligned}$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E12**). Eine gute Näherungslösung von (2.20) für

$$\frac{\hat{m}}{p} \varphi \ll 1 \ll \varphi$$

ist also

$$\begin{aligned} u(\varphi) &\approx \frac{1}{p} \left( 1 + \epsilon \left( \cos \varphi + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} \varphi \sin \varphi \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{p} \left( 1 + \epsilon \left( \cos \left( \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} \varphi \right) \cos \varphi + \sin \left( \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} \varphi \right) \sin \varphi \right) \right) \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 + \epsilon \cos \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p} \right) \varphi \right) ; \end{aligned}$$

d.h. eine für jeden Umlauf nahezu elliptische Bahnkurve, deren Perihel aber mit jedem Umlauf um den Polarwinkel

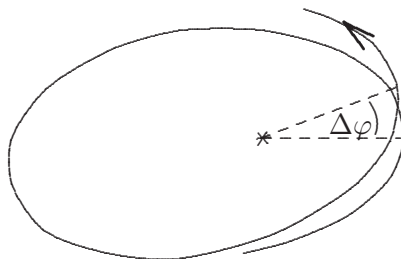
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3}{2} \frac{\hat{m}}{p}} - 2\pi \underbrace{\approx}_{\text{Taylor}} 3\pi \frac{\hat{m}}{p}$$

vorrückt. Aus der für Ellipsenbahnen bekannten Beziehung

$$p = (1 - \epsilon^2) a , \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \text{große Halbachse}$$

folgt damit EINSTEINS berühmte Formel für die **Periheldrehung**:

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{3\pi\hat{m}}{(1 - \epsilon^2)a}} \quad (2.24)$$



Für den Merkur ist  $a \approx 4,8 \times 10^7 \text{ km}$  und  $\epsilon \approx 0,2$ . Da seine Umlaufzeit um die Sonne etwa 88 Tage beträgt, folgt aus (2.24) mit  $\hat{m} \approx 3 \text{ km}$  für  $M = \text{Sonnenmasse}$ , daß das Perihel des Merkur jeweils innerhalb von 100 Jahren um etwa 43 Bogensekunden vorrückt.

Das ist genau der Anteil der tatsächlich beobachteten Periheldrehung von etwa 5 600 Bogensekunden, der nicht durch NEWTONSche Störungstheorie (Berücksichtigung der übrigen Planeten) erklärt werden konnte!

Schließlich sind noch die Geodäten zu  $\kappa = 0$  (Lichtstrahlen) zu untersuchen: (2.20) nimmt dann die Form

$$u'' + u = \frac{3}{2} \hat{m} u^2 \quad (2.25)$$

an.

Die NEWTONSche Theorie sagt für streuende Teilchen, die sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, eine Ablenkung um den Winkel

$$\delta \approx \frac{\hat{m}}{R}, \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \text{Perihelabstand} \quad (2.26)$$

voraus.

**Beweis von (2.26):** In der NEWTONSchen Theorie gilt

$$\sin \delta = \frac{1}{\epsilon}, \quad \epsilon = \left| \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{\gamma m M} - \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right|$$

(siehe Abschn. 3.5.3 von (Lücke, ein)). Mit

$$\epsilon \underset{|\dot{\mathbf{x}}| \approx c}{\approx} \left| \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}}{\gamma m M} \right| = 2R \frac{c^2}{2\gamma M} \stackrel{(2.4)}{=} \frac{2R}{\hat{m}}$$

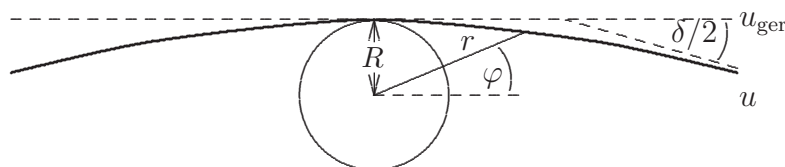
folgt daraus die Behauptung. ■

Wir werden sehen, daß (2.25) für Licht den etwa doppelten Ablenkwinkel voraussagt:

Die Näherungslösung soll analog zum Falle  $\kappa = 1$  bestimmt werden, wobei als nullte Lösung jetzt sinnvollerweise eine gerade Bahnkurve angesetzt wird:

$$u_{\text{ger}}(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{R}$$





Da

$$u_{\text{part}}(\varphi) = \frac{3\hat{m}}{4R^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right)$$

eine geeignete partielle Lösung von

$$u_{\text{part}}''(\varphi) + u_{\text{part}}(\varphi) = \frac{3}{2}\hat{m} u_{\text{Ger}}^2(\varphi) = \frac{3\hat{m}}{2R^2} (1 - \cos^2 \varphi)$$

ist, ergibt sich als Näherungslösung:

$$u(\varphi) \approx \frac{1}{R} \left( \sin \varphi + \frac{3\hat{m}}{4R} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right) \right).$$

Für  $u \rightarrow 0$ , also für

$$r \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -\frac{\delta}{2} \ll 1, \sin \frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2}, \cos \delta \approx 1$$

ergibt sich damit:

$$\boxed{\text{totale Lichtablenkung } \delta \approx \frac{2\hat{m}}{\text{(scheinb.) Perihelabstand}}.} \quad (2.27)$$

Die Ablenkung (2.27), die die allgemeine Relativitätstheorie vorhersagt, ist also tatsächlich etwa doppelt so groß wie die Ablenkung (2.26), die die klassische KEPLER-Theorie für Testmassen von nahezu Lichtgeschwindigkeit vorhersagt.

Wählt man für  $M$  die Sonnenmasse und als (scheinb.) Perihelabstand den Sonnenradius, so ergibt sich gemäß (2.27) eine Ablenkung von  $\delta \approx 1,75$  Bogensekunden.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß (2.25) eine geschlossene Lichtbahn zu konstantem  $r = \frac{3}{2}\hat{m}$  zuläßt. Aus (2.19) erkennt man leicht, daß diese Bahn **instabil** ist. Die Kreisbahnen der NEWTONSchen Theorie<sup>21</sup> sind dagegen alle stabil und haben für Testmassen im Grenzfall der Lichtgeschwindigkeit einen Radius  $r = \frac{\hat{m}}{2}$ .

### 2.1.3 Übergang in den Bereich $r < \text{SCHWARZSCHILD-RADIUS}$

Die Singularität von (2.3) an der Stelle  $r = \hat{m}$  ist – mathematisch gesehen – nur eine scheinbare. Bzgl. der von KRUSKAL und SZEKERES eingeführten Koordinaten

$$q^{0'} = T, \quad q^{1'} = X, \quad q^{2'} = \vartheta, \quad q^{3'} = \vartheta,$$

Version vom 26. März 2009

<sup>21</sup>Vgl. Fußnote 18

die für den Bereich  $|T| < X$  implizit durch<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{\hat{m}}\right) e^{\frac{r}{\hat{m}}} &= T^2 - X^2 \\ \frac{ct}{\hat{m}} &= \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right) = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

definiert sind,<sup>23</sup> gilt nämlich

$$(g(T, X, \vartheta, \varphi)_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} +\frac{4\hat{m}^3}{r}e^{-\frac{r}{\hat{m}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4\hat{m}^3}{r}e^{-\frac{r}{\hat{m}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

und die Fortsetzung von (2.29) auf den Bereich

$$T^2 - X^2 < 1 \quad (2.30)$$

ist eine Lösung der Vakuum-Feldgleichungen.<sup>24</sup>

**Beweis von (2.29)** Aus (2.28) folgt für beliebiges (hinreichend gutartiges)  $q(\tau)$

$$-\frac{r}{\hat{m}} e^{\frac{r}{\hat{m}}} \frac{\dot{r}}{\hat{m}} = 2(T\dot{T} - X\dot{X})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{ct}{\hat{m}} &= \frac{\dot{X} + \dot{T}}{X + T} - \frac{\dot{X} - \dot{T}}{X - T} \\ &= 2 \frac{X\dot{T} - T\dot{X}}{X^2 - T^2} \\ &= 2 \frac{\hat{m}}{r} \frac{e^{-\frac{r}{\hat{m}}}}{1 - \frac{\hat{m}}{r}} (X\dot{T} - T\dot{X}). \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>22</sup>Man beachte, daß  $\left(1 - \frac{r}{\hat{m}}\right) e^{\frac{r}{\hat{m}}}$  eine streng monoton fallende Funktion von  $r > 0$  mit dem Wertebereich  $(-\infty, 1)$  ist.

<sup>23</sup>Zur Systematik solcher Koordinatentransformationen siehe (Wald, 1984, Abschn. 6.4).

<sup>24</sup>Dabei ist  $r$  natürlich entsprechend (2.28) durch  $X$  und  $T$  auszudrücken, während  $t$  für  $X < |T|$  nicht mehr verwendbar ist.

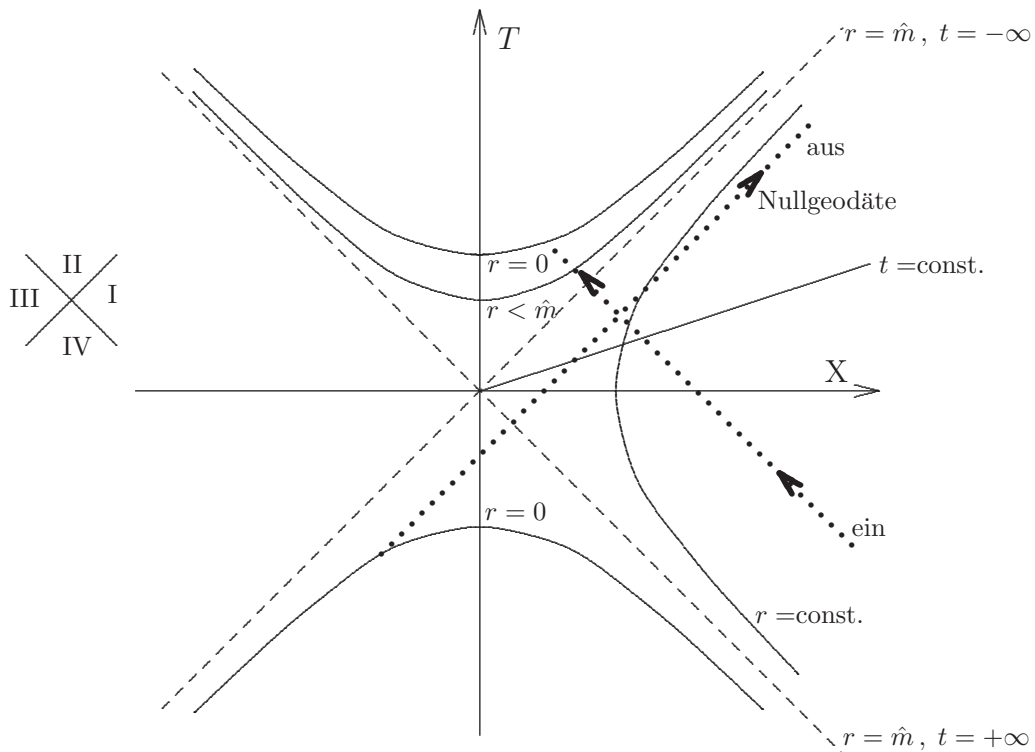


Abb. 2.1: KRUSKAL-SZEKERES-Koordinaten für die SCHWARZSCHILD-Lösung

Mit (2.3) folgt daraus

$$\begin{aligned}
 & g_{00} (\dot{q}^0)^2 + g_{11} (\dot{q}^1)^2 \\
 &= \left(1 - \frac{\hat{m}}{r}\right) (c\dot{t})^2 + \frac{\dot{r}^2}{\frac{\hat{m}}{r} - 1} \\
 &= \left(1 - \frac{\hat{m}}{r}\right) \left(2 \frac{\hat{m}^2}{r} \frac{e^{-\frac{r}{\hat{m}}}}{1 - \frac{\hat{m}}{r}}\right)^2 (X\dot{T} - T\dot{X})^2 + \frac{1}{\frac{\hat{m}}{r} - 1} \left(\frac{2\hat{m}^2}{r e^{\frac{r}{\hat{m}}}}\right)^2 (T\dot{T} - X\dot{X})^2 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{\hat{m}}{r}} \left(\frac{2\hat{m}^2}{r e^{\frac{r}{\hat{m}}}}\right)^2 \underbrace{\left((X\dot{T} - T\dot{X})^2 - (T\dot{T} - X\dot{X})^2\right)}_{(\dot{T}^2 - \dot{X}^2)(X^2 - T^2)} \\
 &= \underbrace{\frac{r}{\hat{m}} - 1}_{=\frac{r}{\hat{m}}} e^{\frac{r}{\hat{m}}} \left(\frac{2\hat{m}^2}{r e^{\frac{r}{\hat{m}}}}\right)^2 (\dot{T}^2 - \dot{X}^2) \quad (\text{nach (2.28)}) \\
 &= \frac{4\hat{m}^3}{r} e^{-\frac{r}{\hat{m}}} (\dot{T}^2 - \dot{X}^2). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die in Abbildung 2.1 skizzierte Situation:

Der äußere Lösungsbereich  $r > \hat{m}$  ist durch I gegeben. Aber zeitartige Kurven (Beobachter) können ohne weiteres (nach endlicher Eigenzeit; vgl. (Rindler, 1969, § 77)) in Region II eindringen. Innerhalb der Region II gilt für zeitartige Kurven

$$-\frac{dr}{d\tau} \geq \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\hat{m}}{r} - 1}$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E13**), wenn  $\tau$  die Eigenzeit bezeichnet, also

$$g_{\mu'\nu'} \dot{q}^{\mu'} \dot{q}^{\nu'} = c^2$$

gilt. Deshalb erreichen Beobachter, die einmal in Region II eingedrungen sind, nach endlicher Eigenzeit<sup>25</sup> die Massenverteilung, von der die SCHWARZSCHILD-Metrik erzeugt ist. Jedoch führt keine (in die Zukunft orientierte) zeit- oder lichtartige Kurve aus II heraus, weshalb man diese Region als **schwarzes Loch** bezeichnet.

Die Singularität bei  $r = 0$  läßt sich nicht auch noch durch Koordinatentransformation beseitigen. Man kann nämlich zeigen, daß die vom Koordinatensystem unabhängige (skalare) Größe

$$R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} R^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

für  $r \rightarrow +0$  divergiert.

Die Region IV ist zu II zeitgespiegelt und wird demgemäß auch als **weißes Loch** bezeichnet.

Region III, scheinbar ‘innerhalb des Bereiches  $r = \hat{m}$ ’, entspricht I vollständig und die durch (2.6) charakterisierte Untermannigfaltigkeit von Region III läßt sich mit der unteren Hälfte des FLAMMSchen Paraboloids identifizieren. Zwischen den Regionen I und III ist jedoch keine Kommunikation möglich!

Es sei nochmals daran erinnert, daß die SCHWARZSCHILD-Lösung nur im materiefreien Gebiet gilt, das normalerweise (stabile Sterne, vgl. 2.2) ganz in I enthalten ist. Für sphärisch symmetrisch kollabierende Massenverteilungen, außerhalb derer nach dem BIRKHOFFSchen Theorem die SCHWARZSCHILD-Lösung immer noch gilt, kann das masselose Raum-Zeit-Gebiet jedoch auch Teile von II umfassen (Bildung eines schwarzen Loches).

---

Version vom 26. März 2009

<sup>25</sup>Genauer:

$$\Delta\tau \leq \frac{2}{c} \int_0^{\hat{m}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\hat{m}}{r} - 1}} dr = \frac{2\hat{m}}{c} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \frac{\pi\hat{m}}{c}.$$

## 2.2 Die Feldgleichungen zu sphärisch symmetrischen Massenverteilungen

### 2.2.1 Energie-Spannungs-Tensor und Lösungsansatz

Es sollen nun Lösungen der EINSTEINSchen Feldgleichungen (1.55) für den Fall

$$\Lambda = 0 \neq T^{\alpha\beta}$$

untersucht werden.

**Anmerkung:** Im Gegensatz zur Situation in der NEWTONSchen oder MAXWELLSchen Theorie meint (1.55) **nicht** einfach, daß man zu gegebener Quellverteilung  $T^{\alpha\beta}$  ‘nur’ die Lösung der Feldgleichungen (hier die Metrik  $g_{\alpha\beta}$ ) zu finden habe. Vielmehr hängt die richtige Angabe der  $T^{\alpha\beta}$  nicht nur von der Koordinatenwahl, sondern auch von den zugehörigen Komponenten  $g_{\alpha\beta}$  ab, die es erst zu finden gilt!

In der Speziellen Relativitätstheorie ist der Energie-Spannungs-Tensor einer im Inertialsystem zur LORENTZ-Basis  $\{e_{\hat{0}}, \dots, e_{\hat{3}}\}$  ruhenden Flüssigkeit

$$M_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{cases} c^2\rho & \text{für } \hat{\alpha} = \hat{\beta} = 0, \\ p & \text{für } \hat{\alpha} = \hat{\beta} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.31)$$

wobei  $\rho$  die Massendichte und  $p$  den Druck der Flüssigkeit bezeichnet.<sup>26</sup>

Für das sog. **Flüssigkeitsmodell** eines stabilen, sphärisch symmetrischen Sternes verwendet man wieder den Ansatz (2.2) und übernimmt (2.31) für die  $\left\{ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right\}$  entsprechende LORENTZ-Basis<sup>27</sup>

$$\begin{aligned} e_{\hat{0}} &\stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{a}{2}} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_{\hat{1}} &\stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{b}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \\ e_{\hat{2}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ e_{\hat{3}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>26</sup>I.a. sind  $\rho$  und  $p$  natürlich ortsabhängig.

<sup>27</sup>Da die Krümmung nicht verschwindet, lassen sich die  $e_{\hat{\nu}}$  i.a. nicht mehr über einer ganzen Umgebung  $\mathcal{O}$  als Tangentenvektoren eines Koordinatensystems  $q^{\hat{n}}$  von  $\mathcal{O}$  darstellen.

Wegen

$$\begin{aligned} (M_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) &= \begin{pmatrix} M_{00}/|g_{00}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |M_{11}|/g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{22}/|g_{22}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |M_{33}|/g_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |g_{00}| M^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |g_{11}| M^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |g_{22}| M^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |g_{33}| M^{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt dann

$$M^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \quad (2.33)$$

mit

$$u^\alpha = u(r)^\alpha = \begin{cases} c e^{-\frac{a(r)}{2}} & \text{für } \alpha = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.34)$$

= Vierer-Geschwindigkeit der Flüssigkeit,

woraus der Tensor-Charakter von  $M^{\alpha\beta}$  klar hervorgeht.

## 2.2.2 Auswertung der Feldgleichungen

Die dem zu (2.2) gehörigen EINSTEIN-*Tensor*

$$G^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

entsprechende Bilinearform hat bzgl.  $\{e_{\hat{0}}, \dots, e_{\hat{3}}\}$  die Komponenten<sup>28</sup>

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{cases} -r^{-2} \frac{d}{dr} (r (1 - e^{-b})) & \text{für } \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{0} \\ -r^{-2} ((1 + r a') e^{-b} - 1) & \text{für } \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{1} \\ -\frac{1}{2} (a'' + \frac{a'-b'}{2} a' + \frac{a'-b'}{r}) e^{-b} & \text{für } \hat{\alpha} = \hat{\beta} \in \{\hat{2}, \hat{3}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.36)$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E14**). Die EINSTEINSchen Feldgleichungen (1.55) sind also gemäß (2.31) und (2.36) zu folgenden drei Differentialgleichungen äquivalent:

$$r^{-2} \frac{d}{dr} (r (1 - e^{-b(r)})) = \kappa c^2 \rho(r) \quad (2.37)$$

$$r^{-2} ((1 + r a'(r)) e^{-b(r)} - 1) = \kappa p(r) \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{2} \left( a''(r) + \frac{a'(r) - b'(r)}{2} a'(r) + \frac{a'(r) - b'(r)}{r} \right) e^{-b(r)} = \kappa p(r) \quad (2.39)$$

Aus (2.37) ergibt sich unmittelbar:

$$e^{-b(r)} = 1 - \frac{\hat{m}(r)}{r} \quad (2.40)$$

mit<sup>29</sup>

$$\hat{m}(r) = \kappa c^2 \int_0^r (r')^2 \rho(r') dr'. \quad (2.41)$$

Damit also (2.2) für  $r > R$  in (2.4) zur Masse<sup>30</sup>

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

übergeht, falls  $\rho(r) = 0$  für  $r > R$ , ist gemäß (2.4)

$$\boxed{\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}} \quad (2.42)$$

zu identifizieren.

Nach (2.40) ist (2.38) äquivalent zu

$$a'(r) = \frac{\hat{m}(r) + \kappa r^3 p(r)}{r(r - \hat{m}(r))}. \quad (2.43)$$

Für den NEWTONSchen Grenzfall  $\kappa r^3 p(r) \ll \hat{m}(r) \ll r$  ergibt das nach (2.4)

$$\frac{\partial}{\partial r} g_{00} \approx a'(r) \approx \frac{\hat{m}(r)}{r^2}, \quad (2.44)$$

im Einklang mit den früheren Betrachtungen, die zu (2.4) führten.

Man kann weiterhin zeigen,<sup>31</sup> daß (2.39) unter Voraussetzung von (2.37) und (2.38) äquivalent zu

$$p'(r) = - \left( \frac{p(r)}{c^2} + \rho(r) \right) \frac{a'(r)}{2}$$

ist, was mit (2.43) auf die sog. **TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF-Gleichung**

$$p'(r) = - \left( \frac{p(r)}{c^2} + \rho(r) \right) \frac{\hat{m}(r) + \kappa r^3 p(r)}{r(r - \hat{m}(r))} \quad (2.45)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Die additive Integrationskonstante ist in (2.41) auf Null gesetzt um eine Singularität der Metrik bei  $r = 0$  zu vermeiden.

<sup>30</sup>Gemäß Fußnote 11 ist die eigentliche Gesamtmasse

$$M_p = \int_0^R \rho(r) \frac{4\pi r^2}{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(r)}{r}}} dr$$

und nicht  $M$ . Die Differenz  $M_p c^2 - M c^2 > 0$  läßt sich als Bindungsenergie interpretieren.

<sup>31</sup>Vgl. (Wald, 1984, S. 127).

führt, die als Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht anzusehen ist. Im NEWTONschen Grenzfall nimmt (2.45) die vertraute Form

$$p'(r) \approx -\frac{\rho(r) \hat{m}(r)}{r^2} \quad (2.46)$$

an.

Für einen Stern (nahezu) konstanter Dichte

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nach (2.41)

$$\hat{m}(r) = \kappa c^2 \rho_0 \frac{r^3}{3} \quad \text{für } r \leq R \quad (2.47)$$

und somit nach (2.45)

$$p(r) = c^2 \rho_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)}{R}} - \sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)r^2}{R^3}}}{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)r^2}{R^3}} - 3\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)}{R}}} \quad \text{für } r \leq R$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E15**). Der Druck im Sternzentrum ist also

$$p(0) = c^2 \rho_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)}{R}} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{\hat{m}(R)}{R}}}$$

und divergiert folglich für<sup>32</sup>  $R \rightarrow \frac{9}{8}\hat{m}(R) + 0$ . Es muß also die Bedingung

$$R > \frac{9}{8}\hat{m}(R) \stackrel{(2.42),(2.47)}{=} \frac{3\pi\gamma\rho_0}{c^2}R^3$$

erfüllt sein, also

$$\hat{m}(R) < \frac{8}{9}R < \frac{8}{9}\sqrt{\frac{c^2}{3\pi\gamma\rho_0}}$$

und somit nach (2.4):

$$M_{\max} < \frac{4c^3}{9\sqrt{3\pi\gamma^3\rho_0}}.$$

Für größere Gesamtmasse kann also kein noch so großer Gegendruck eine weitere Kontraktion aufgrund der Gravitation verhindern. Man vermutet, daß auf diese Weise tatsächlich schwarze Löcher entstehen können (**Gravitationskollaps**).

Version vom 26. März 2009

<sup>32</sup>Man kann zeigen, daß diese Divergenz für beliebiges  $\rho(r) > 0$  mit  $\rho'(r) \leq 0$  gilt (Wald, 1984, S. 130/131). Das ist wichtig, weil die Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  im Sterninneren weitgehend unbekannt ist.



# Teil II

## Kosmologie



# Kapitel 3

## Homogene und Isotrope Modelle

### 3.1 Kosmologisches Prinzip und ROBERTSON-WALKER-Metriken

#### 3.1.1 Grundsätzliches

Es ist damit zu rechnen, daß wir bestimmte Teile der Raum-Zeit grundsätzlich nicht beobachten können.<sup>1</sup> Es sind also geeignete, nicht überprüfbare Hypothesen notwendig, um mögliche Modelle für das Universum auszuwählen. Hierzu dient vor allem das sog. *Kosmologische Prinzip*:

Es existiert ein Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial t}$ , das jeweils mit der Vierer-Geschwindigkeit eines *fundamentalen Beobachters* am entsprechenden Weltpunkt übereinstimmt.<sup>2</sup> Durch evtl. Addition geeigneter Konstanten lassen sich die Eigenzeiten der fundamentalen Beobachter so zur sog. *kosmischen Zeit*  $t$  einrichten, daß die (i.a. zeitlich nicht homogene) ‘kosmische Struktur’ des Universums unterschiedlichen fundamentalen Beobachtern zu gleichen kosmischen Zeitpunkten stets gleich erscheint (*räumliche Homogenität*).<sup>3</sup>

Weiterhin<sup>4</sup> fordert man gewöhnlich *räumliche Isotropie*:

Zu jedem Weltpunkt  $q$  und zu je zwei Vektorfeldern  $A, B$ , die an dieser

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Vgl. 3.1.2.

<sup>2</sup>Die fundamentalen Beobachter sollen ‘relativ zur Mehrheit der sie umgebenden Galaxien ruhen’. Ihre durch ihre Eigenzeit parametrisierten Weltlinien sind Integralkurven von  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

<sup>3</sup>Mathematische Definition der räumlichen Homogenität:

Zu je zwei Weltpunkten  $q, q'$  mit  $t(q) = t(q')$  existiert eine Isometrie  $\sigma$  mit  $\sigma(q) = q'$ .

Diese Bedingung ist für die SCHWARZSCHILD-Lösung offensichtlich nicht erfüllt.

<sup>4</sup>Oft wird die räumliche Isotropie schon in die Formulierung des kosmologischen Prinzips einbezogen.

Stelle orthogonal zu  $\frac{\partial}{\partial t}$  sind, existiert eine Isometrie  $\sigma$  mit<sup>5</sup>  $(\sigma'A)|_q = B|_q$ .

Indem man die Weltlinien der fundamentalen Beobachter parametrisiert, erhält man eine einheitliche Koordinatisierung der Untermannigfaltigkeiten  $\Sigma_t$  aller Weltpunkte gleicher kosmischer Zeit  $t$ . Aufgrund der geforderten Symmetrieeigenschaften sind die Komponenten bzgl. der einheitlichen Koordinatisierung für alle Einschränkungen der Metrik  $g$  des Universums  $\mathcal{M}$  auf  $\Sigma_t$  bis auf einen  $t$ -abhängigen Faktor gleich.

Man kann zeigen, daß zu jeder **isotropen** dreidimensionalen RIEMANNSchen Mannigfaltigkeit mit der Metrik  $h$  in der Umgebung jeden Punktes lokale Koordinaten

$$q^1 = r, \quad q^2 = \vartheta, \quad q^3 = \varphi$$

existieren, bzgl. derer

$$(h_{jk}(r, \vartheta, \varphi)) = \left( \frac{A}{1 + \frac{k}{4}r^2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Konstanten  $A$  und

$$k \in \{\pm 1, 0\}$$

gilt. Mit solchen Koordinaten für die  $\Sigma_t$ , ergänzt durch

$$q^0 = ct,$$

gilt also

$$\boxed{g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = c^2 dt^2 - \left( \frac{R(t)}{1 + \frac{k}{4}r^2} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2)} \quad (3.1)$$

mit einer geeigneten Funktion  $R(t) > 0$ , die die zeitliche Inhomogenität des Universums (Expansion, Kontraktion) beschreibt.

Eine Metrik der Form (3.1) bezeichnet man als **ROBERTSON-WALKER-Metrik**.

**Warnung:** Die **lokale** Angabe der Metrik bestimmt noch nicht die globale Struktur der Mannigfaltigkeit !

---

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Die **Tangentialabbildung**  $\sigma'$  einer Abbildung  $\sigma$  der Raum-Zeit in sich ist durch

$$\sigma' \left( \frac{d}{d\tau} q(\tau) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\tau} (\sigma(q(\tau))) \quad \text{für hinreichend gutartige Kurven } q(\tau)$$

definiert, bildet i.a. also Tangentenvektoren zu  $q$  auf Tangentenvektoren zu  $\sigma(q)$  ab.

### 3.1.2 Kosmologische Rotverschiebung und Horizonte

Seien  $q(t), \hat{q}(t)$  Weltlinien zweier fundamentaler Beobachter und  $\Delta\sigma(t)$  ihre  $\Sigma_t$ -Entfernung. Dann folgt aus (3.1)

$$\Delta\sigma(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} \Delta\sigma(t_0)$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \Delta\sigma(t) = H(t) \Delta\sigma(t), \quad (3.2)$$

wobei

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)} \quad (3.3)$$

die sog. HUBBLE-‘**Konstante**’ ist. Bezieht man die Koordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  von gemäß (1.47) parametrisierten Null-Geodäten (Weltlinien von Lichtsignalen) auf einund-dieselbe Untermannigfaltigkeit  $\Sigma_{t_0}$ , so ergeben sich Geodäten dieser Untermannigfaltigkeit, wie man aus dem entsprechenden Variationsprinzip erkennt. Da Isometrien Geodäten auf Geodäten Abbilden, müssen sich deshalb Licht-Wellenzüge, nun jeweils auf  $\Sigma_t$  betrachtet, entsprechend ausdehnen (**kosmologische Rotverschiebung**) oder zusammenziehen (**kosmologische Blauverschiebung**). Wenn also ein fundamentaler Beobachter Licht der Wellenlänge  $\lambda_{\text{Auss}}$  zum kosmischen Zeitpunkt  $t_{\text{Auss}}$  aussendet, das zum kosmischen Zeitpunkt  $t_{\text{Empf}}$  empfangen wird, so stellt der empfangende fundamentale Beobachter die Wellenlänge

$$\lambda_{\text{Empf}} = \frac{R(t_{\text{Empf}})}{R(t_{\text{Auss}})} \lambda_{\text{Auss}} \quad (3.4)$$

fest.

Für die weiteren Untersuchungen wird die Koordinate

$$\rho = \frac{r}{1 + \frac{k}{4} r^2}$$

statt  $r$  benutzt, mit der gemäß (3.1)

$$g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (3.5)$$

gilt.

Für ‘radiale’ (d.h.  $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$ ) Lichtsignale mit  $\dot{\rho} < 0$  gilt dann

$$\frac{R(t)}{\sqrt{1 - k\rho^2}} d\rho = -c dt$$

und somit

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{c dt}{R(t)} \quad (3.6)$$

für je zwei Punkte 1,2 der entspr. Weltlinie. Ein zur kosmischen Zeit  $t_1$  ‘radial’ von  $\rho_1$  ausgesandtes Lichtsignal kann also den Punkt  $\rho = 0$  nur dann noch erreichen, wenn ein entspr. kosmischer Zeitpunkt  $t > t_1$  existiert, für den gemäß (3.6)

$$\int_{t_1}^t \frac{c dt}{R(t)} = \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} \rho_1 & \text{für } k = 1 \\ \rho_1 & \text{für } k = 0 \\ \sinh^{-1} \rho_1 & \text{für } k = -1 \end{cases}$$

gilt. Im Falle

$$\int_{t>t_1} \frac{c dt}{R(t)} < \infty, \quad k \in \{0, -1\}$$

oder

$$\int_{t>t_1} \frac{c dt}{R(t)} < \frac{\pi}{2}, \quad k = +1$$

existiert also immer ein maximaler Wert  $\rho_E = \rho_E(t_1)$  (**Ereignis-Horizont** des Weltpunktes mit  $\rho = 0$ ), von dem aus (zu einem kosmischen Zeitpunkt  $t > t_1$  ausgesandte) Lichtsignale  $\rho = 0$  noch erreichen können.<sup>6</sup>

Umgekehrt existiert im Falle

$$\int_{t<t_1} \frac{c dt}{R(t)} < \infty, \quad k \in \{0, -1\}$$

bzw.

$$\int_{t<t_1} \frac{c dt}{R(t)} < \frac{\pi}{2}, \quad k = +1$$

zu jedem kosmischen Zeitpunkt  $t_1$  ein minimaler Wert  $\rho_T = \rho_T(t_1)$  (**Teilchen-Horizont**), charakterisiert durch

$$\int_0^{\rho_T} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}} = \int_{t<t_1} \frac{c dt}{R(t)}$$

den kein von  $\rho = 0$  zu irgendeinem kosmischen Zeitpunkt  $t < t_1$  ausgesandtes Signal bis zum kosmischen Zeitpunkt  $t_1$  erreichen kann.

Ob tatsächlich ein Ereignis-Horizont oder ein Teilchen-Horizont oder beides existiert, hängt von der *Dynamik*  $\dot{R}(t)$  des kosmologischen Modells ab, die aus den **Einsteinschen** Feldgleichungen zu bestimmen ist.

<sup>6</sup>Bei entsprechend starker Expansion des Universums rücken fundamentale Beobachter schließlich stets hinter ihre gegenseitigen Ereignis-Horizonte (der Koordinaten-Ursprung  $\rho = 0$  kann gemäß kosmologischem Prinzip willkürlich gewählt werden). Die ‘räumliche’ Ausdehnung physikalischer Experimente ist dann prinzipiell begrenzt !

### 3.1.3 Auswertung der Feldgleichungen

Für den zur ROBERTSON-WALKER-Metrik (3.1) gehörigen EINSTEIN-Tensor (2.35) gilt

$$\frac{G_{\alpha\beta}(ct, r, \vartheta, \varphi)}{g_{\alpha\beta}(ct, r, \vartheta, \varphi)} = \begin{cases} -\frac{3\dot{R}^2}{R^2 c^2} - \frac{3k}{R^2} & \text{für } \alpha = \beta = 0 \\ -\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2 c^2} - \frac{k}{R^2} & \text{für } \alpha = \beta \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E16**). Der Energie-Spannungs-Tensor  $M^{\alpha\beta}$  des kosmologischen Modells wird konsistenterweise ebenfalls als räumlich homogen und isotrop vorausgesetzt und muß daher von der Form

$$M^{\alpha\beta}(ct, r, \vartheta, \varphi) = (\rho(t) + c^{-2} p(t)) u^\alpha(ct, r, \vartheta, \varphi) u^\beta(ct, r, \vartheta, \varphi) - p(t) g^{\alpha\beta}(ct, r, \vartheta, \varphi), \quad u = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.8)$$

sein (Beweis als **Übungsaufgabe E17**). Es handelt sich also wieder um den Energie-Spannungstensor einer perfekten Flüssigkeit, wobei nun aber im Gegensatz zu (2.33) Dichte  $\rho$  und Druck<sup>7</sup>  $p$  von der kosmischen Zeit  $t$  (und nicht von der Koordinate  $r$ ) abhängen. Gemäß (2.42) sind die EINSTEINschen Feldgleichungen (1.55) damit äquivalent zu den beiden Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2 R}{c^2} + k R - \frac{\Lambda}{3} R^3 = D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8\pi\gamma}{3c^2} \rho R^3} \quad (3.9)$$

und

$$-\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2 c^2} - \frac{k}{R^2} + \Lambda = \frac{8\pi\gamma}{c^4} p. \quad (3.10)$$

Für  $\dot{R} > 0$  ist (3.10) – unter Voraussetzung der sog. FRIEDMANNschen **Differentialgleichung** (3.9) – äquivalent zu<sup>8</sup>

$$\boxed{\dot{D} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} p \dot{R} R^2.} \quad (3.11)$$

**Übungsaufgabe E18:** Man diskutiere, inwieweit sich (3.11) physikalisch als Energie-Erhaltungssatz interpretieren läßt.

Unter der physikalisch motivierten Voraussetzung

$$\rho(t) \geq 0, \quad p(t) \geq 0$$

Version vom 26. März 2009

<sup>7</sup>Die Berücksichtigung des Druckes  $p$  ist wichtig im Hinblick auf die kosmologische Hintergrundstrahlung; vgl. 3.2.3.

<sup>8</sup>Die Ableitung der linken Seite von (3.9) stimmt nämlich mit dem  $(-\dot{R}R^2)$ -fachen der linken Seite von (3.10) überein.

kann man sich O.B.d.A. bzgl. (3.1) auf Lösungen von (3.9)/(3.11) mit

$$\boxed{R(t) > 0} \quad (3.12)$$

beschränken (Beweis als **Übungsaufgabe E19**).

Wenn  $D(t), R(t)$  Lösung von (3.9)/(3.11) zu  $\rho(t), p(t)$  ist, dann ist  $\hat{D}(t) = D(-t), \hat{R}(t) = R(-t)$  Lösung von (3.9)/(3.11) zu  $\hat{\rho}(t) = \rho(-t), \hat{p}(t) = p(-t)$ . Zu jedem kontrahierenden Universum existiert also ein entsprechend expandierendes (und umgekehrt); d.h. es genügt, den Fall

$$\boxed{\dot{R}(t) \geq 0} \quad (3.13)$$

zu untersuchen.

Schließlich sei noch auf

$$\begin{aligned} (3.9) &\iff \frac{\dot{R}}{\sqrt{\frac{D}{R} + \frac{\Lambda}{3} R^2 - k}} = c \\ &\iff \int_{R(t_1)}^{R(t_2)} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{D}{R} + \Lambda R^2 \right) - k}} = c (t_2 - t_1) \quad \text{für } p = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

hingewiesen.<sup>9</sup>

## 3.2 Spezielle Lösungen

### 3.2.1 Masselose kosmologische Modelle

Im Falle  $T^{\alpha\beta} = 0$ ; d.h. – nach (3.8) – für

$$\rho = 0, \quad p = 0$$

sind (3.9)/(3.11) äquivalent zu  $D = 0$  **und**

$$\int_{R(t_1)}^{R(t_2)} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{3} \Lambda R^2 - k}} = c (t_2 - t_1)$$

(vgl. (3.14)). Die Lösungen lassen sich dann also wie folgt klassifizieren:

\_\_\_\_\_ Version vom 26. März 2009 \_\_\_\_\_

<sup>9</sup>(3.14) setzt natürlich voraus, daß die Wurzel nicht ausgerechnet verschwindet.



Nr.	$\Lambda$	$k$	$R(t + t_0)$	Anmerkung
1.	0	0	bel. Konst.	statisch, flach
2.	0	-1	$ct$	MILNE-Modell, flach
3.	$> 0$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3/\Lambda} \exp\left(\sqrt{\Lambda/3} ct\right)$	DE SITTER
4.	$> 0$	1	$\sqrt{3/\Lambda} \cosh\left(\sqrt{\Lambda/3} ct\right)$	DE SITTER
5.	$> 0$	-1	$\sqrt{3/\Lambda} \sinh\left(\sqrt{\Lambda/3} ct\right)$	DE SITTER
6.	$< 0$	-1	$\sqrt{-3/\Lambda} \sin\left(\sqrt{-\Lambda/3} ct\right)$	DE SITTER

Für die übrigen Vorzeichenkombinationen des Paares  $\Lambda, k$  wird die Wurzel imaginär, so daß dazu keine kosmologischen Modelle existieren.

**Übungsaufgabe E20:** Man zeige, daß sich (3.5) für das MILNE-Modell ( $k = -1$ ) mit  $\tau$  statt  $t$  ergibt, wenn man im MINKOWSKI-Raum zunächst räumliche Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  zusätzlich zur MINKOWSKI-Zeit  $t$  (bzgl. eines willkürlich gewählten Inertialsystems) wählt und dann die **lokalen** Koordinaten

$$\tau = \frac{t}{\gamma\left(\frac{r}{ct}\right)}, \quad \rho = \frac{r}{ct} \gamma\left(\frac{r}{ct}\right) \quad \left( \gamma(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

statt  $t, r$  einführt.<sup>10</sup> Man diskutiere, inwieweit das Modell mit dem kosmologischen Prinzip im Einklang steht, wenn man die Galaxien formal als masselos ansieht (vgl. (Rindler, 1969, §84)).

Auch für  $\rho \neq 0$  kann man  $D$  in (3.9) vernachlässigen wenn  $R$  hinreichend groß wird. Daher geht ein expandierendes Universum ( $\Lambda > 0$  nach o.a. Klassifikation) asymptotisch stets (lokal) in eines der Modelle 3.–5. über, die ihrerseits für  $R \rightarrow \infty$  ineinander übergehen. Solche Modelle haben daher stets einen Ereignis-Horizont.

Man kann zeigen (Robertson, 1933, Note D), daß die **vierdimensionale** (lokale) pseudo-RIEMANNsche Struktur, die den Modellen 3.–5. unterliegt, für alle drei Modelle – trotz unterschiedlicher  $k$ -Werte (vgl. MILNE-Modell) – einunddieselbe ist.<sup>11</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Man beachte dazu die Herleitung von (A.3).

<sup>11</sup>Es handelt sich um Beschränkungen auf das Hyperboloid  $(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 - (X^5)^2 = \frac{3}{\Lambda}$  des 5-dimensionalen MINKOWSKI-Raumes. Nur für das 4. Modell wird das gesamte Hyperboloid ausgefüllt. Für die Modelle 3. und 5. existieren also auf jeden Fall Teilchen-Horizonte.

### 3.2.2 Kosmologische Modelle zu staubförmiger Materie

**Staubförmige Materie** meint, daß (3.8) mit  $p = 0$  gilt. Hier ist (3.11) äquivalent zu

$$D = \text{konst.}$$

und die Lösungen von (3.9) zu  $\Lambda = 0$  lassen sich damit wie folgt klassifizieren:

Nr.	$\Lambda$	$k$	$t - t_0 = t(R) - t_0$	Anmerkung
7.	0	0	$\frac{2}{3c} \sqrt{\frac{R^3}{D}}$	EINSTEIN-DE SITTER
8.	0	+1	$\frac{D}{c} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{D}} - \sqrt{\frac{R}{D} - \left(\frac{R}{D}\right)^2} \right)$	FRIEDMANN-EINSTEIN
9.	0	-1	$\frac{D}{c} \left( \sqrt{\frac{R}{D} + \left(\frac{R}{D}\right)^2} - \sinh^{-1} \sqrt{\frac{R}{D}} \right)$	

Modell 8 läßt sich auch durch

$$R = \frac{D}{2} (1 - \cos \psi) \quad \text{für} \quad t = \frac{D}{2c} (\psi - \sin \psi)$$

(Zykloide) und Modell 9 durch

$$R = \frac{D}{2} (\cosh \psi - 1) \quad \text{für} \quad t = \frac{D}{2c} (\sinh \psi - \psi)$$

charakterisieren (Beweis als **Übungsaufgabe E21**).

Für  $R \rightarrow 0$  dominiert auch im Falle  $\Lambda \neq 0$  die Konstante  $D$  in (3.9), so daß sich alle Modell mit  $p = 0$  in diesem Grenzfall wie Modell 7 verhalten und folglich stets einen Teilchen-Horizont haben.

Für  $\Lambda \neq 0$  lassen sich die Modelle explizit angeben, wenn  $k = 0$  ist:

Nr.	$\Lambda$	$k$	$t - t_0 = t(R) - t_0$	Anmerkung
10.	$> 0$	0	$\frac{3D}{2\Lambda} \left( \cosh \left( \sqrt{3\Lambda} ct \right) - 1 \right)$	
11.	$< 0$	0	$\frac{3D}{-2\Lambda} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{-3\Lambda} ct \right) \right)$	

Im übrigen diskutiert man die Lösungen qualitativ zweckmäßig anhand der Linien zu konstantem

$$\dot{R}^2 = \frac{Dc^2}{R} + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2 \quad (3.9)$$

in der  $(\Lambda, R)$ -Ebene,<sup>12</sup> d.h. anhand der Schar von Graphen der Funktionen

$$\Lambda_{\dot{R}^2}(R) = \frac{3}{c^2} \frac{\dot{R}^2 + kc^2 - \frac{Dc^2}{R}}{R^2}.$$

### 3.2.3 Kosmologische Modelle zu thermischer Strahlung

Für elektromagnetische Strahlung im thermischen Gleichgewicht gilt die Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3} \text{Energiedichte};$$

(vgl. Gleichung (4.45) von (Lücke, tdst)), d.h. aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie

$$p = \frac{\rho c^2}{3}.$$

Damit wird (3.11) äquivalent zu

$$\dot{\rho}R + 4\rho\dot{R} = 0;$$

d.h.:

$$\rho R^4 = \text{konst.} \quad (3.15)$$

Mit

$$\hat{D} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8\pi\gamma}{3c^2} \rho R^4 \quad (3.16)$$

nimmt (3.9) dann die Form

$$\frac{\dot{R}^2 R^2}{c^2} + kR^2 - \frac{\Lambda}{3} R^4 = \hat{D} = \text{konst.} \quad (3.17)$$

an. Die Lösungen zu  $\Lambda = 0$  sind:

Nr.	$\Lambda$	$k$	$R(t - t_0)$
12.	0	+1	$\sqrt{\hat{D}} \sqrt{1 - \left(1 - ct/\sqrt{\hat{D}}\right)^2}$
13.	0	0	$(4\hat{D})^{\frac{1}{4}} \sqrt{ct}$
14.	0	-1	$\sqrt{\hat{D}} \sqrt{\left(1 + ct/\sqrt{\hat{D}}\right)^2 - 1}$



# Anhang A

## Isotrope 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten

### A.1 Spezielle Form des RIEMANN-Tensors

Seien  $h_{jk}$  die kovarianten Komponenten einer isotropen 3-dimensionalen RIEMANNschen Mannigfaltigkeit bzgl. der lokalen Koordinaten  $q^1, q^2, q^3$ . Die Komponenten des zugehörigen RIEMANN-Tensors seien mit  $H_{klm}^j$  bezeichnet. Dann definiert

$$\omega_{jk} \mapsto (H\omega)_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} H_{jk}^{lm} \omega_{lm}$$

eine lineare Abbildung des Raumes der (differentiellen) 2-Formen in sich, die an jeder Stelle  $q$  der Mannigfaltigkeit hinsichtlich des inneren Produktes

$$\langle \omega | \hat{\omega} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{jk} \hat{\omega}^{jk}$$

aufgrund der Symmetrieeigenschaft<sup>1</sup>

$$H_{jklm} = H_{lmjk}$$

selbstadjungiert ist:

$$\langle H\omega | \hat{\omega} \rangle = \langle \omega | H\hat{\omega} \rangle .$$

Folglich existiert an jeder Stelle ein vollständiger Satz von Eigenvektoren. Aufgrund der Isotropie müssen alle Eigenwerte gleich sein;<sup>2</sup> d.h. die Abbildungsmatrix  $(H_{jk}^{lm})_{\substack{l < m \\ j < k}}$  muß ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein:

$$H(q)_{jk}^{lm} = K(q) \delta_j^l \delta_k^m \quad \text{für } j < k, l < m. \quad (\text{A.1})$$

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Siehe Eigenschaften 1., 3. und 4. auf Seite 33.

<sup>2</sup>Da die 2-Formen einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit eindeutig Vektorfeldern zugeordnet sind und im isotropen Falle keine Richtung vor der anderen ausgezeichnet ist.

Das ist äquivalent zu

$$H(q)_{jklm} = \frac{1}{2}K(q) (h_{jl}h_{km} - h_{jm}h_{kl}) \quad \text{für } j, k, l, m \in \{1, 2, 3\} .$$

Aus den entsprechenden Bianchi-Identitäten folgt daraus mit  $h_{jk;l} = 0$

$$0 = \sum_{n,j,k \text{ zykl. vert.}} h_{jk}h_{lm} \nabla_n K$$

und somit

$$0 = \sum_{n,j,k \text{ zykl. vert.}} K_{,n} \delta_j^k \delta_l^m .$$

Indem man  $j = k \neq n \neq l = m \neq j$  setzt, erkennt man daraus  $K_{,n} = 0$  für  $n \in \{1, 2, 3\}$ , d.h.:

$$K = \text{const.}$$

RIEMANNSche Mannigfaltigkeiten, deren RIEMANN-Tensor die Form (A.1) mit konstantem  $K(q)$  hat, bezeichnet man als solche **konstanter Krümmung**. Die Krümmungskonstante  $K$  solcher Mannigfaltigkeiten genügt der Bedingung

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2\pi l - |\mathcal{C}_l|}{l^3} \quad (\text{A.2})$$

für jede geschlossene Kurve  $\mathcal{C}_l$ , die aus der Menge aller Punkte einer **Geodätenfläche** besteht, die den metrischen Abstand  $l$  von einem festen Aufpunkt der Fläche haben (Beweis als **Übungsaufgabe E22**).

## A.2 Prototypen

Eine isotrope RIEMANNSche Mannigfaltigkeit **positiver** Krümmung  $K = R^{-2}$  ergibt sich somit durch Einschränkung des **euklidischen**  $\mathbb{R}^4$  auf die 3-dimensionale Sphäre  $S_R^3$  aller  $x(\psi, \vartheta, \varphi)$  mit:

$$\begin{aligned} x^0 &= R \cos \psi \\ x^1 &= R \cos \psi \cos \vartheta \\ x^2 &= R \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi \\ x^3 &= R \sin \psi \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E23**). Das zugehörige infinitesimale Längenquadrat ist

$$dl^2 = R^2 \left( d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)$$

bzw.

$$\boxed{dl^2 = R^2 \left( \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)} \quad (\text{A.3})$$

mit  $k = 1$ , wenn man die Koordinate  $\rho = \sin \psi$  statt  $\psi$  einführt.

Entsprechend ergibt sich eine isotrope RIEMANNsche Mannigfaltigkeit **negativer** Krümmung  $K = -R^{-2}$  durch Einschränkung des mit der negativen MINKOWSKI-Metrik versehenen  $\mathbb{R}^4$  auf das 3-dimensionale Rotationshyperboloid  $\mathcal{M}_R^+ \subset V_+$  aller  $x(\psi, \vartheta, \varphi)$  mit:

$$\begin{aligned} x^0 &= R \cosh \psi \\ x^1 &= R \sinh \psi \cos \vartheta \\ x^2 &= R \sinh \psi \sin \vartheta \cos \varphi \\ x^3 &= R \sinh \psi \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

(Beweis als **Übungsaufgabe E24**). Das zugehörige infinitesimale Längenquadrat ist

$$dl^2 = R^2 \left( d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)$$

und nimmt für  $\rho = \sinh \psi$  statt  $\psi$  wiederum die Form (A.3) an; nun allerdings mit  $k = -1$ .

Für  $k = 0$  charakterisiert (A.3) offensichtlich (lokal) eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung  $K = 0$  (lokal der euklidische  $\mathbb{R}^3$ ).

Da man zeigen kann, daß RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten gleicher konstanter Krümmung und Dimension **lokal** stets isomorph sind,<sup>3</sup> existieren also zu jeder isotropen 3-dimensionalen RIEMANNschen Mannigfaltigkeit lokale Koordinaten  $\rho, \vartheta, \varphi$ , für die (A.3) mit

$$k \in \{\pm 1, 0\}$$

gilt, wobei  $K = kR^{-2}$  der Wert der konstanten Krümmung ist. Durch Übergang zu der Koordinate

$$r = \frac{2}{k\rho} \left( 1 + \sqrt{1 - k\rho^2} \right)$$

statt  $\rho$  geht (A.3) schließlich in

$$dl^2 = \frac{R}{1 + \frac{k}{4}r^2} (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (\text{A.4})$$

über (Beweis als **Übungsaufgabe E25**).

**Übungsaufgabe E26:** Man zeige, daß (A.2) äquivalent zu

$$K = \frac{12}{\pi} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\pi l^2 - |\mathcal{F}_l|}{l^4} \quad (\text{A.5})$$

ist, wenn  $\mathcal{F}_l$  das geodätische Flächenstück mit dem Rand  $\partial\mathcal{F}_l = \mathcal{C}_l$  bezeichnet.

<sup>3</sup>Siehe z.B. (Noonan und Robertson, 1968, § 8.10).





# Anhang B

## Moderner Formalismus

### B.1 Äußere Ableitung

(Tangenten-) Vektorfelder  $A$  lassen sich durch die zugehörigen LIE-Ableitungen  $\mathcal{L}_A f$  von Skalarfeldern  $f$  charakterisieren. In lokalen Koordinaten:

$$(\mathcal{L}_A f)(q) = A^\nu(q) \frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q) \quad \text{falls } A \hat{=} \{A^\alpha\} .$$

Daher identifiziert man lokal jeweils  $\frac{\partial}{\partial q^\alpha}$  für festes  $\alpha$  mit dem Feld der Tangentenvektoren an die  $\alpha$ -Koordinatenlinien.<sup>1</sup> Bzgl. der Koordinaten  $\{q^\mu\}$  hat also für festes  $\alpha$  das Vektorfeld  $A(q) = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$  die konstanten Komponenten  $A^\nu(q) = \delta_\alpha^\nu$ . Es ist klar, daß die  $\frac{\partial}{\partial q^\nu}$  an jeder Stelle  $q$  eine Basis des zugehörigen Tangentenvektorraumes  $T_q(\mathcal{M})$  bilden.

Unter einer (**äußeren differentiellen**)  $p$ -**Form** versteht man ein total **antisymmetrisches**, kovariantes Tensorfeld  $p$ -ter Stufe bzw. die zugehörige Schar  $p$ -linearer Abbildungen

$$\begin{aligned} \omega|_q : T_q(\mathcal{M}) \times T_q(\mathcal{M}) \times \dots &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B, \dots) &\longmapsto \omega|_q(A, B, \dots) = \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(q) A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} \dots \end{aligned}$$

Wenn  $f(q)$  eine 0-Form (also ein Skalarfeld) ist, dann lassen sich die  $\frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q)$  als Komponenten einer 1-Form auffassen, die man mit  $df$  bezeichnet. Für hinr. gutartige Kurven  $\mathcal{C} = \{q(t)\}_t$  gilt also

$$df|_{q(t)}(\dot{q}(t)) = \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q) \right)_{|_{q=q(t)}} \dot{q}^\nu(t) = \frac{d}{dt} f(q(t)) . \quad (\text{B.1})$$

Gemäß der verallgemeinerten Kettenregel muß somit stets

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^\nu} dq^\nu \quad (\text{B.2})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>In 1.1.2 wurde dieses Vektorfeld mit  $\mathbf{t}_\alpha$  bezeichnet. Vgl. Fußnote 5.

gelten. Die  $dq^\nu$  entsprechen der zu  $\left\{ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right\}$  reziproken Basis:

$$dq^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial q^\beta} \right) = \delta_\beta^\alpha; \quad (\text{B.3})$$

d.h. für festes  $\alpha$  hat  $\theta = dq^\alpha$  jeweils die Komponenten  $\theta_\nu = \delta_\nu^\alpha$ .

Wenn  $\theta^1, \dots, \theta^p$  1-Formen sind, dann legt jeweils

$$(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^p)|_q (A_1, \dots, A_p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) \prod_{\mu=1}^p \theta_{|q}^{\pi(\mu)}(A_\mu) \quad \text{für } A_1, \dots, A_p \in T_q(\mathcal{M}) \quad (\text{B.4})$$

eine  $p$ -Form  $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^p$  fest. Es ist klar, daß sich jede  $p$ -Form  $\omega$  nach den  $\wedge$ -Produkten der  $dq^\alpha$  entwickeln läßt:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dq^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dq^{\alpha_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dq^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dq^{\alpha_p}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Die  $\omega$  gemäß<sup>3</sup>

$$d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p, \mu} dq^\mu \wedge dq^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dq^{\alpha_p} \quad (\text{B.6})$$

zugeordnete  $(p+1)$ -Form  $d\omega$  bezeichnet man als die **äußere Ableitung** von  $\omega$ . Äußere Ableitungen sind besonders wichtig im Hinblick auf den verallgemeinerten

**Satz von STOKES:** <sup>4</sup>  $\int_{\partial \mathcal{U}} \omega = \int_{\mathcal{U}} d\omega$

Hieraus folgt<sup>5</sup>

$dd\omega = 0$  für jede äußere Differentialform  $\omega$ .

(B.7)

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Die  $dq^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dq^{\alpha_p}$  sind aber i.a. **nicht** linear unabhängig voneinander. Das **Tensorprodukt** der 1-Formen ist durch  $(dq^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dq^{\alpha_p})(A_1, \dots, A_p) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^p dq^{\alpha_j}(A_j)$  definiert.

<sup>3</sup>Man beachte die Konsistenz mit (B.2).

<sup>4</sup>Beweis als **Übungsaufgabe E27**. Hier bedeutet  $\mathcal{U}$  eine hinr. gutart. **orientierte** Untermannigfaltigkeit beliebiger Dimension. Das Integral einer  $p$ -Form  $\omega$  über eine hinr. gutart., orientierte,  $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{G}$  ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{G}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} \dots \int_{\tau_{p1}}^{\tau_{p2}} \left( \omega(q(\tau_1, \dots, \tau_p))_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \dot{q}(\tau_1, \dots, \tau_p)^{\alpha_1} \dots \dot{q}(\tau_1, \dots, \tau_p)^{\alpha_p} \right) d\tau_1 \dots d\tau_p,$$

wobei  $\mathcal{G} = \{q(\tau_1, \dots, \tau_p) : \tau_j \in [\tau_{j1}, \tau_{j2}]\}$  eine beliebige, aber hinr. gutart., Parametrisierung von  $\mathcal{G}$  ist, die der Orientierung von  $\mathcal{G}$  entspricht.

<sup>5</sup>Man wende den Satz von STOKES 2-fach an:  $\int_{\partial(\partial \mathcal{V})} \omega = \int_{\partial \mathcal{V}} d\omega = \int_{\mathcal{V}} dd\omega$ .

(B.7) läßt sich aber auch direkt aus (B.6) ablesen:

$$dd\omega = \frac{1}{p!} \underbrace{\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p, \mu, \nu}}_{\text{symm. in } \mu, \nu} \underbrace{dq^\nu \wedge dq^\mu \wedge dq^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dq^{\alpha_p}}_{\text{antisymm. in } \mu, \nu}.$$

## B.2 Konnexionsform

$E$  bezeichne das ‘Bündel’ aller Paare  $(q, \{b_0, \dots, b_3\})$  von jeweils einem Punkt  $q$  der Raum-Zeit  $\mathcal{M}$  und einer Basis<sup>6</sup>  $\{b_0, \dots, b_3\}$  des zugehörigen Tangentenvektorraumes  $T_q(\mathcal{M})$ . Man macht  $E$  zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, indem man die lokalen Koordinatensysteme  $\{q^\nu\}$  von  $\mathcal{M}$  zu lokalen Koordinaten  $\{q^\mu, b_{\underline{\alpha}}{}^\nu\}$  von  $E$  erweitert, wobei die  $(b_{\underline{\alpha}}{}^\nu)$  **reguläre** Matrizen sind, die jeweils durch

$$b_{\underline{\alpha}} = b_{\underline{\alpha}}{}^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \quad (\text{B.8})$$

eine Basis von  $T_q(\mathcal{M})$  kennzeichnen. Für jedes  $q \in \mathcal{M}$  ist damit also die zugehörige **Faser** (Menge aller Basen von  $T_q(\mathcal{M})$ ) durch Elemente der Gruppe  $\text{GL}(4, \mathbb{R})$  koordinatisiert. Natürlich ist aber keine dieser Koordinatisierungen ‘kanonisch’.

Bei Koordinatenwechsel ändert sich die entsprechende Zuordnung

$$\{b_0, \dots, b_3\} \rightleftharpoons (b_{\underline{\alpha}}{}^\nu) \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$$

hinsichtlich der Gruppenmultiplikation<sup>7</sup>

$$(g \cdot h)_{\underline{\alpha}}{}^\beta = g_{\underline{\gamma}}{}^\beta h_{\underline{\alpha}}{}^\gamma$$

gemäß einer **linken** Gruppenwirkung:<sup>8</sup>

$$\left( \{q^\mu\} \longrightarrow \{q^{\mu'}\} \right) \implies (b_{\underline{\alpha}}{}^\nu) \longrightarrow (b_{\underline{\alpha}}{}^{\nu'}) = \left( \frac{\partial q^{\nu'}}{\partial q^\mu} b_{\underline{\alpha}}{}^\mu \right). \quad (\text{B.9})$$

Damit ist  $E$  ein **Prizipalbündel** mit der **Basis**  $\mathcal{M}$  und der **Strukturgruppe**<sup>9</sup>  $\text{GL}(4, \mathbb{R})$  und die **rechte** Wirkung

$$R_g(q, \{b_{\underline{\alpha}}\}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( q, \left\{ b_{\underline{\beta}}{}^\nu g_{\underline{\alpha}}{}^\beta \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right\} \right) = \left( q, \{b_{\underline{\beta}} g_{\underline{\alpha}}{}^\beta\} \right) \quad (\text{B.10})$$

dieser Gruppe in den Fasern ist von der Wahl der lokalen Koordinaten  $\{q^\nu\}$  unabhängig.

Die Rolle der CHRISTOFFEL-Symbole stellt sich nun wie folgt dar: Jedem  $p = (q, \{b_{\underline{\alpha}}\}) \in E$  wird ein linearer Isomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma|_p : T_q(\mathcal{M}) &\longrightarrow H_p \subset T_p(E) \\ \dot{q} &\longmapsto \left( \dot{q}, \{ \dot{b}_{\underline{\alpha}} \} \right); \quad \dot{b}_{\underline{\alpha}} = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu(q) b_{\underline{\alpha}}{}^\mu \dot{q}^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>Die unterstrichenen Indizes sollen also die Basisvektoren – nicht Komponenten – durchnummerieren.

<sup>7</sup>Hier wird also der untere Index als Spaltenindex aufgefaßt (reine Konventionssache), sonst entspräche der Koordinatenwechsel einer rechten Gruppenwirkung.

<sup>8</sup>Denn:  $b_{\underline{\alpha}} = b_{\underline{\alpha}}{}^{\nu'} \frac{\partial}{\partial q^{\nu'}} = b_{\underline{\alpha}}{}^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} = \left( b_{\underline{\alpha}}{}^\mu \frac{\partial q^{\nu'}}{\partial q^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial q^{\nu'}}$ .

<sup>9</sup>In den sog. *Eichtheorien* sind auch andere Strukturgruppen von Interesse.

im Sinne von (1.42) zugeordnet, wobei die Bedingungen <sup>10</sup>

$$\sigma_{|R_g p}(\dot{q}) = R'_g \sigma_{|p}(\dot{q}) \quad (\text{B.12})$$

erfüllt sind, die die Erhaltung linearer Beziehungen zwischen Vektoren bei Parallelverschiebung ausdrücken.

Die Elemente von  $V_p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left( \dot{q}, \left\{ \dot{b}_\alpha \right\} \right) \in T_p(E) : \dot{q} = 0 \right\}$  nennt man **vertikal** (zur Basis  $\mathcal{M}$ ), die von  $H_p$  entsprechend **horizontal**. Während die  $V_p$  lediglich von  $E$  abhängen, charakterisieren die  $H_p$  die Parallelverschiebung:

Zu jedem  $p = (q, \{b_\alpha\}) \in E$  und zu jedem  $\dot{q} \in T_q(\mathcal{M})$  existiert genau ein  $\left( \dot{q}, \left\{ \dot{b}_\alpha \right\} \right) \in H_p(E)$ , nämlich das in (B.11) angegebene. Diese Eindeutigkeit sowie die lineare Abhängigkeit der  $\dot{b}_\alpha$  von  $\dot{q}$  folgt bereits aus

$$T_p(E) = H_p \oplus V_p \quad (\text{B.13})$$

und der Definition von  $V_p$ . Die Bedingung (B.12) ist dabei äquivalent zu

$$H_{R_g p} = R'_g H_p. \quad (\text{B.14})$$

Den Zerlegungen (B.13) entspricht eine eindeutige Schar linearer Abbildungen

$$\omega_{|p} : T_p(E) \longrightarrow V_p$$

mit den Eigenschaften<sup>11</sup>

$$\omega_{|p}(v_p) = v_p \quad \forall v_p \in V_p, \quad (\text{B.15})$$

$$\omega_{|p}(v_p) = 0 \iff v_p \in H_p, \quad (\text{B.16})$$

und

$$\omega_{|R_g p}(R'_g v_p) = R'_g \omega_{|p}(v_p) \quad \forall v_p \in T_p(E). \quad (\text{B.17})$$

Zu jedem Element  $v_p \in T_p(E)$  existiert offenbar ein eindeutiges Element  $\hat{v}_p$  der LIE-Algebra  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$  von  $\text{GL}(4, \mathbb{R})$  mit<sup>12</sup>

$$v_p = \frac{d}{dt} \left( R_{\exp(t\hat{v}_p)} p \right) \Big|_{t=0}. \quad (\text{B.18})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup> $R'_g$  bezeichnet die Tangentialabbildung zu  $R_g$ ; d.h. wenn  $v$  Tangente der Kurve  $\hat{C} = \{p(t)\} \subset E$  an der Stelle  $t = 0$  ist, so ist  $R_g v$  die entspr. Tangente der Bildkurve  $R_g \hat{C}$ . Für  $v_p \in T_p(E)$  und  $f \in C^\infty(E)$  bedeutet das:

$$\underbrace{(R'_g v_p)}_{\in T_p(E)}(R_g f) = v_p(f); \quad (R_g f)(p') \stackrel{\text{def}}{=} f(R_{g^{-1}} p') \quad \forall p' \in E.$$

<sup>11</sup>Für **jede** lineare Abbildung  $\omega_{|p} : T_p(E) \longrightarrow V_p$ , die der Bedingung (B.15) genügt, gilt (B.13), wenn man  $H_p$  gemäß (B.16) definiert. (B.17) garantiert dabei (B.14).

<sup>12</sup>Einen Vektor der Form (B.18) bezeichnet man als **KILLING-Vektor**.

Wenn wir also die  $\omega$  entsprechende Schar **linearer** Abbildungen in  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$  mit  $\hat{\omega}$  bezeichnen, so erhalten wir schließlich die der Parallelverschiebung entsprechende **Konnexionsform**, die den (B.15), (B.16) und (B.17) entsprechenden Bedingungen

$$\hat{\omega}|_p(v_p) = \hat{v}_p \quad \forall v_p \in V_p \tag{B.19}$$

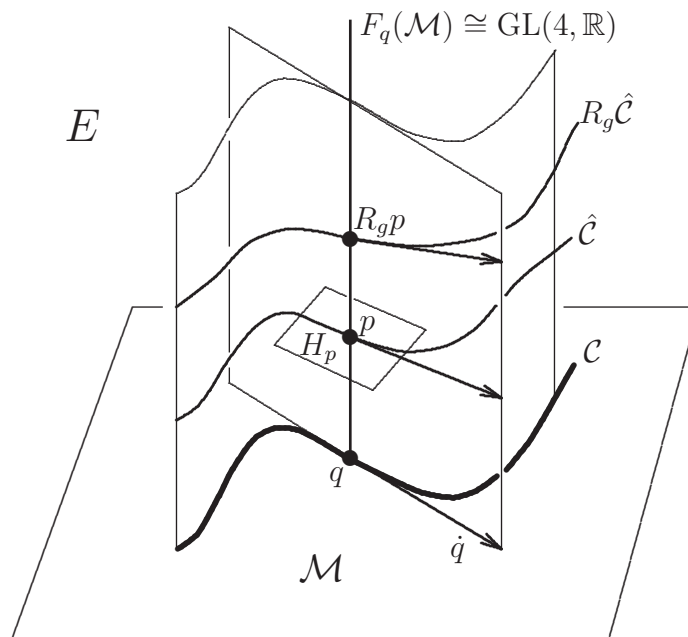
$$\hat{\omega}|_p(v_p) = 0 \iff v_p \in H_p \tag{B.20}$$

und

$$\hat{\omega}|_{R_g p}(R'_g v_p) = \text{Ad}(g^{-1})\hat{\omega}|_p(v_p) \quad \forall v_p \in T_p(E) \tag{B.21}$$

genügt.<sup>13</sup>

Umgekehrt bestimmt die Konnexionsform den Paralleltransport längs einer Kurve  $\mathcal{C} = \{q(t)\} \subset \mathcal{M}$  nach folgendem Schema:



Die  $\{b_{\underline{\alpha}}(t)\}$  sind genau dann längs  $\mathcal{C}$  ‘konstant’, wenn die Tangenten an die Kurve  $\hat{\mathcal{C}} = \{(q(t), \{b_{\underline{\alpha}}(t)\})\} \subset E$  alle horizontal, d.h. Elemente von  $H_p$  gemäß

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Die **adjungierte Darstellung**  $\text{Ad}$  ist durch

$$\text{Ad}(g) \frac{d}{dt} \exp(t\hat{v})|_{t=0} = \frac{d}{dt} (g \exp(t\hat{v}) g^{-1})|_{t=0}$$

gegeben. (B.21) folgt somit aus (B.17) und (B.18) gemäß

$$R'_g \frac{d}{dt} (R_{\exp(t\hat{v}_p)} p)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (R_g R_{\exp(t\hat{v}_p)} R_{g^{-1}} R_g p)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (R_{g^{-1} \exp(t\hat{v}_p) g} R_g p)|_{t=0} .$$

(B.20) sind. Aufgrund der Linearität von  $\hat{\omega}|_p$  garantiert (B.19), daß zu jedem Tripel  $(q(t), \{b_{\underline{\alpha}}(t)\}, \dot{q}(t))$  genau ein horizontaler Vektor

$$\dot{p}(t) = \left( \dot{q}(t), \left\{ \dot{b}_{\underline{\alpha}}(t) \right\} \right) \in T_{(q(t), \{b_{\underline{\alpha}}(t)\})}(E)$$

gehört und somit zu gegebenen Anfangswerten  $\{b_{\underline{\alpha}}(t_1)\}$  genau ein *horizontaler Lift*  $\hat{\mathcal{C}}$  von  $\mathcal{C}$  existiert. (B.21) garantiert, daß  $\dot{p}(t)$  **linear** von  $\{b_{\underline{\alpha}}(t)\}$  abhängt.

Allgemein versteht man unter einer **Konnexionsform** über  $E$  eine differenzierbar von  $p$  abhängige Schar linearer Abbildungen  $\hat{\omega}|_p : T_p(E) \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$  ( $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ -wertige 1-Form), die den Bedingungen (B.19) und (B.21) genügt. Unterschiedlichen Konnexionsformen entsprechen natürlich unterschiedliche  $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ -Koeffizienten im Sinne von (1.42). Obwohl dann (1.43 i.a. nicht mehr gilt, garantiert der Formalismus dennoch, daß der entspr. ‘Paralleltransport’ (längs  $\mathcal{C} = \{q(t) : t \in [t_1, t_2]\}$ ) Basen (von  $T_{q(t_1)}$ ) in Basen (von  $T_{q(t_2)}$ ) überführt, also lineare Unabhängigkeit erhält.

### B.3 Krümmungsform

Sei  $\{H_p\}$  die zur Konnexionsform  $\hat{\omega}$  über  $E$  gehörige Schar horizontaler Vektorräume und sei  $\{e_j\}$  eine Basis von  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ . Sei ferner

$$\hat{\varphi} = \varphi^j e_j$$

eine beliebige  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ -wertige  $p$ -Form<sup>14</sup> über  $E$ . Dann bezeichnet man als **kovariante äußere Ableitung** von  $\hat{\varphi}$  die durch

$$D\hat{\varphi}|_p(u, v, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} d\varphi^j|_p(\hat{H}_p u, \hat{H}_p v, \dots) e_j \quad \text{für } u, v, \dots \in T_p(E), \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{H}_p \stackrel{\text{def}}{=} \text{Projektion auf } H_p,$$

definierte<sup>15</sup>  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ -wertige  $(p+1)$ -Form  $D\hat{\varphi}$ . Speziell  $\hat{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} D\hat{\omega}$  bezeichnet man als die zu  $\hat{\omega}$  gehörige **Krümmungsform**.

<sup>14</sup>Die Entwicklungskoeffizienten  $\varphi^j$  sind also gewöhnliche  $p$ -Formen über  $E$  (**nicht**  $M$ ).

<sup>15</sup>Die Unabhängigkeit dieser Definition von der speziellen Wahl der Basis  $\{e_j\}$  ist offensichtlich.

# Literaturverzeichnis

- Brickel, F. und Clark, R. S. (1970). *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand Reinold Company London. **9**
- Einstein, A. (1956). *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Vieweg, Braunschweig. **3, 23**
- Ellis, G. F. R. und Hawking, S. W. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge. **37**
- Fischer, H. und Kaul, H. (2003). *Mathematik für Physiker*, Band 3. B.G. Teubner, Stuttgart. **3**
- Goenner, H. (1996). *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin · Oxford. **19**
- Lord, E. A. (1976). *Tensors Relativity and Cosmology*. Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi. **3**
- Lovelock, D. (1972). The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, 13:874–876. **33**
- Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf>. **23, 46, 48**
- Lücke, W. (mech). Klassische Mechanik  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/mech.pdf>. **25, 29**
- Lücke, W. (tdst). Thermodynamik und Statistik  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/tdst.pdf>. **67**
- Misner, C. W. (1963). The flatter regions of Neman, Unti, and Tamburino's generalized Schwarzschild space. *J. Math. Phys.*, 4:924–937. **36**
- Misner, C. W., Thorne, K. S., und Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco. **3, 34, 54**
- Noonan, T. W. und Robertson, H. P. (1968). *Relativity and Cosmology*. W. B. Saunders, Philadelphia. **71**

- Pound, R. V. und Snider, J. L. (1965). Effect of gravity on gamma radiation. *Phys. Rev. B*, 140:788–803. [42](#)
- Rindler, W. (1969). *Essential Relativity*. Van Nostrand Reinhold Company, New York. [3](#), [43](#), [52](#), [65](#), [67](#)
- Robertson, H. P. (1933). . *Rev. Mod. Phys.*, 5:62. [65](#)
- Schrödinger, E. (1960). *Space-Time Structure*. At The University Press, Cambridge. [3](#)
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London. [3](#), [36](#), [42](#), [43](#), [50](#), [55](#), [56](#)
- Whitney, H. (1936). Differentiable manifolds. *Ann. of Math.*, 37:645–680. [9](#)
- Whitney, H. (1944). Self intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Ann. of Math.*, 45:220–246. [9](#)
- Will, C. M. (1993). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press. [3](#)