

# Klassische Mechanik

Technische Universität Clausthal  
SS 1984 – WS 2001/02

W. Lücke



## Vorwort

Ziel dieser Vorlesung ist es, aufbauend auf (Lücke, ein), in die Methoden der klassischen Mechanik einzuführen, mit denen Systeme behandelt werden, die Nebenbedingungen unterworfen sind. Die Darstellung ist bewußt elementar gehalten, um die physikalischen Zusammenhänge deutlicher hervorzuheben. Auf die moderne differentialgeometrische Formulierung wird in Anhang A kurz eingegangen. Die Grundlagen der relativistischen Mechanik werden in Anhang B skizziert.

**Warnung:** Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium gedacht.

Als ergänzende Lektüre seien hauptsächlich (Arnol'd, 1988) und (José und Saletan, 2000) empfohlen.

**Weitere Literaturempfehlungen:** (Abraham und Marsden, 1978; Goldstein, 1972; Sommerfeld, 1964; Weizel, 1963; Fischer und Kaul, 2003; Dugas, 1955)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Eingeschränkte Systeme von Massenpunkten</b>	<b>7</b>
1.1	Formulierung des Hauptproblems	7
1.1.1	Idealisierte Nebenbedingungen	7
1.1.2	Zwangskräfte und eingeprägte Kräfte	13
1.1.3	Das Grundproblem	18
1.2	Lagrange-Formalismus	23
1.2.1	Generalisierte Koordinaten	23
1.2.2	Lagrange-Gleichungen	28
1.2.3	Das Lagrange-Lösungsverfahren	40
<b>2</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>45</b>
2.1	Kinematik	45
2.1.1	Allgemeine Beschreibung	45
2.1.2	Kinetische Energie	53
2.2	Einfache Kreiselgesetz	57
2.2.1	‘Kräftefreier’ Kreisel	57
2.2.2	Der schwere symmetrische Kreisel	64
<b>3</b>	<b>Mathematische Weiterentwicklung</b>	<b>71</b>
3.1	Hamilton-Theorie	71
3.1.1	Das Hamilton-Prinzip	71
3.1.2	Die kanonischen Gleichungen	78
3.2	Hamilton-Jacobi-Theorie	83
3.2.1	Kanonische Transformationen	83
3.2.2	Hamilton-Jacobi-Gleichung	93
3.2.3	Übergang zur Quantenmechanik	98
3.3	Periodische und bedingt Periodische Bewegungen	102
3.3.1	Invariante Untermannigfaltigkeiten des Phasenraumes	102
3.3.2	Winkel- und Wirkungsvariable	107
<b>A</b>	<b>Symplektische Mechanik</b>	<b>111</b>
A.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	111
A.2	Tensorfelder	114

A.3	Differentiation . . . . .	117
A.4	Symplektischer Formalismus . . . . .	119
<b>B</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>123</b>
B.1	Relativistische Kinematik . . . . .	123
B.2	Relativistische Dynamik . . . . .	130
<b>C</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>135</b>
<b>D</b>	<b>Lösungsvorschläge</b>	<b>149</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>199</b>
	<b>Index</b>	<b>203</b>

# Kapitel 1

## Grundlegendes über eingeschränkte Systeme endlich vieler Massenpunkte

### 1.1 Formulierung des Hauptproblems

#### 1.1.1 Idealisierte Nebenbedingungen

##### 1.1.1.1 Holonome Nebenbedingungen

Gegeben sei ein System von  $N$  Massenpunkten  $m_1, \dots, m_N$ , deren Ortsvektoren entsprechend mit  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet seien. Unter einer (gutartigen) **Bewegung**<sup>1</sup> dieses Systems verstehen wir dann eine stetig differenzierbare Abbildung

$$[t_1, t_2] \ni t \longmapsto \left( \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t) \right) \in \mathbb{R}^{3N}$$

eines Zeitintervalls  $[t_1, t_2]$  in die  $N$ -Tupel der Ortsvektoren des Systems.

Die im Prinzip möglichen Bewegungen seien nun aber durch idealisierte Zusatzmechanismen (z.B. masselos Gestänge, undeformbare Fäden usw.) so eingeschränkt, daß bestimmte **Nebenbedingungen** stets erfüllt sind. Die mit diesen Nebenbedingungen verträglichen Bewegungen seien als **erlaubt** bezeichnet.

Die Nebenbedingungen nennt man **holonom** ('ganz gesetzlich'), falls ein natürliches  $l$  und (hinreichend gutartige) Funktionen  $S_1, \dots, S_l$  der Vektoren  $\mathbf{x}_\nu$  sowie der Zeit  $t$  existieren derart, daß für jede Bewegung

$$\mathcal{B} = \left( \left( \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t) \right), t_1, t_2 \right) \tag{1.1}$$

---

Version vom 26. März 2009

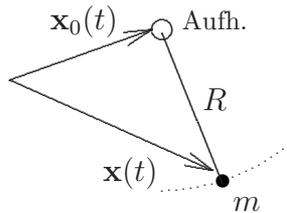
<sup>1</sup>Man vergleiche mit dem in Abschnitt 4.2.1 von *Math. Meth. d. Phys.* eingeführten Begriff *einfache Parametrisierung*.

gilt:<sup>2</sup>

$$\mathcal{B} \text{ erlaubt} \iff S_j(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], j \in \{1, \dots, l\}. \quad (1.2)$$

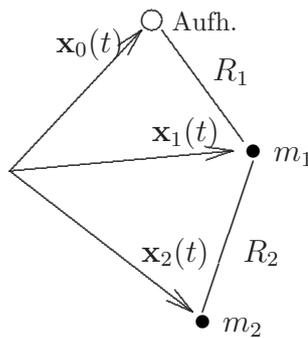
Beispiele:

(i) Sphärisches Pendel:



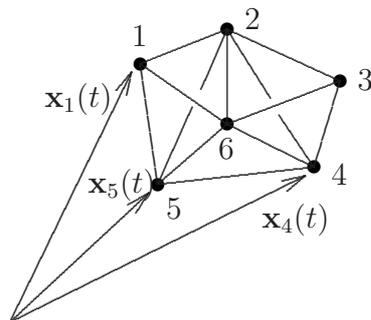
$$N = 1, \quad l = 1, \\ S_1(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} R - \underbrace{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|}_{\text{vorgegeben!}}.$$

(ii) Doppelpendel:



$$N = 2, \quad l = 2, \\ S_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_1 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|, \\ S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_2 - |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|.$$

(iii) Modell für starren Körper:<sup>3</sup> ( $N \rightarrow \infty$ )



$$N = 6, \quad l = \binom{6}{2} = 15, \\ S_{jk}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_6, t) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{R_{jk}}_{\text{vorgeg.}} - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k| \\ \text{für } 1 \leq j < k \leq 6.$$

<sup>2</sup>Man beachte in diesem Zusammenhang Lemma 3.3.1.

<sup>3</sup>Für  $N > 4$  sind diese Beschränkungs-Gleichungen **nicht** unabhängig voneinander!

Zur **geometrischen Deutung** von (1.2):

Eine Gleichung der Form

$$S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \text{const}$$

bestimmt i.a. eine (nicht notwendig zusammenhängende)  $t$ -abhängige **Hyperfläche**<sup>4</sup> im  $\mathbb{R}^{3N}$ .

**Warnung:** Die Hyperflächen können natürlich entarten.<sup>5</sup> Im Falle  $l = 1$  läßt sich z.B. die Beschränkung von  $\mathbf{x}$  auf die  $x^3$ -Achse durch

$$S(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$$

ausdrücken.

Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung gilt

$$S_j(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t) - S_j(\mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1), t_1) = \int_{t_1}^t \dot{S}_j(\mathbf{x}_1(t'), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(t'), t') dt'$$

und daher gemäß (1.2):

$$\mathcal{B} \text{ erlaubt} \iff \begin{cases} S_j(\mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1), t_1) = 0 & \forall j \in \{1, \dots, l\}, \\ \dot{S}_j(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t) = 0 & \forall t \in [t_1, t_2], j \in \{1, \dots, l\}. \end{cases}$$

Ausgeschrieben lauten die Beziehungen  $\dot{S}_j = 0$

$$\boxed{S_{j,0}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t) + \sum_{\nu=1}^N \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(t) \cdot \mathbf{S}_{j,\nu}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t) = 0} \quad (1.3)$$

$$\forall t \in [t_1, t_2], j \in \{1, \dots, l\},$$

wobei:

$$\begin{aligned} S_{j,0}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} S_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t), \\ \mathbf{S}_{j,\nu}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{x}_{\nu}} S_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Erinnerung (verallgemeinerte Kettenregel<sup>6</sup>):**

$$\begin{aligned} \dot{f}(g_1(t), \dots, \dot{g}_N(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(g_1(t), \dots, g_N(t)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g_1(t + \Delta t), \dots, g_N(t + \Delta t)) - f(g_1(t), \dots, g_N(t))}{\Delta t} \\ &= \sum_{\nu=1}^N \dot{g}_{\nu}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu}} f(\xi_1, \dots, \xi_N) \Big|_{\xi_1=g_1(t), \dots, \xi_N=g_N(t)}. \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Vgl. Äquipotentialflächen.

<sup>5</sup>Sie können sich sogar spalten, wie das Beispiel  $S(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (x^3)^2 - (x^1)^4 \theta(x^1) = 0$  zeigt.

Eine Bewegung (1.1) ist also gemäß (1.2) genau dann erlaubt, wenn die Bedingungen (1.3) und

$$S_j(\mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1), t_1) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\} \quad (1.5)$$

erfüllt sind.<sup>7</sup>

Nebenbedingungen nennt man **skleronom** ('starr gesetzlich'), wenn sie (wie z.B. beim Modell für den starren Körper) nicht explizit von der Zeit abhängen und wenn jedes Verharren in einer erlaubten Anfangsposition eine erlaubte 'Bewegung' ist. Andernfalls (wie z.B. beim Pendel oder Doppelpendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt  $\mathbf{x}_0(t)$ ) nennt man die Nebenbedingungen **rheonom** ('fließend gesetzlich').

Die **holonomen** Nebenbedingungen (1.2) sind also skleronom, wenn sich die  $S_j$  so wählen lassen, daß mit (1.4)

$$S_{j,0}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, l\} \quad (1.6)$$

gilt. Aus (1.6) und (1.4) folgt dann automatisch<sup>8</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{j,\nu}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, l\}, \nu \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.7)$$

### 1.1.1.2 Nicht holonome Nebenbedingungen

Als **nicht holonom** bezeichnet man natürlich all diejenigen Nebenbedingungen, die sich **nicht** in der Form (1.2) schreiben lassen.

**Beispiel:** Ersetzt man beim Pendel die Stange durch einen Faden, so ergibt sich die nicht holonome<sup>9</sup> Nebenbedingung

$$0 \leq S_1(\mathbf{x}(t), t) \leq R.$$

Ähnliche Beispiele:

- (i) Ausschließliche Betrachtung von  $m_2$  beim Doppelpendel.

Version vom 26. März 2009

<sup>6</sup>Spezialfall:  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \text{grad } V(\mathbf{x}(t))$ .

<sup>7</sup>Bedingungen der Form (1.5) (oder (1.2)) nennt man **geometrisch**, solche der Form (1.3) (unabhängig davon, ob (1.4) gilt) **kinematisch**.

<sup>8</sup>Für die im nächsten Abschnitt behandelten **nicht** holonomen Nebenbedingungen müßte (1.7) zusätzlich zu (1.6) gefordert werden.

<sup>9</sup>Bzgl. der einfachen Pendelbewegung tut man natürlich auch beim Faden so, als läge die holonome Nebenbedingung  $S_1(\mathbf{x}(t), t) = 0$  vor.

(ii) Massenpunkt auf glatte Kugel gesetzt.

Natürlich ist es nicht möglich die nicht holonomen Nebenbedingungen in ihrer Gesamtheit abzuhandeln.

**Vereinbarung:** Es seien stets nur solche Systeme betrachtet, für die sich die Nebenbedingungen in der Form (1.3)/(1.5) schreiben lassen.<sup>10</sup> Dabei sollen die Bedingungen (1.3) für jeden festen Zeitpunkt eine vollständige Charakterisierung der möglichen Momentangeschwindigkeiten darstellen.<sup>11</sup>

**Ohne** (1.4) (bzw. abgeschwächte Zusatzbedingung) folgt aus (1.3)/(1.5) **nicht** allgemein die Holonomie der Nebenbedingungen.

**Beispiel:** Die kinematische Nebenbedingung<sup>12</sup>

$$\dot{x}^2(t) \cos \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3} - \dot{x}^1 \sin \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3} = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

die einem am Punkt  $(x^1(t), x^2(t))$  auf der Ebene in die durch den Polarwinkel  $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}$  gegebene Richtung (oder entgegengesetzt dazu) rollendem Rad<sup>13</sup> entspricht, läßt sich durch **keine** Wahl von (1.5) zu einem System holonomer Nebenbedingungen ergänzen.<sup>14</sup>

Auch im allgemeinen Falle sind die durch (1.3)/(1.5) beschriebenen Nebenbedingungen genau dann skleronom, wenn die erlaubten Anfangspositionen nicht von der Zeit abhängen und sich die  $S_{j,0}$  und  $\mathbf{S}_{j,k}$  so wählen lassen, daß die Bedingungen (1.6),(1.7) erfüllt sind.

### 1.1.1.3 Virtuelle Verrückungen

Sei  $(\mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1))$  eine erlaubte Anfangsposition zum Zeitpunkt  $t_1$ . Dann versteht man unter einer **virtuellen Verrückung** (dieser Anfangsposition) eine (gedachte) Verschiebung längs eines, von  $(\mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1))$  ausgehenden, einfachen

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Dabei muß für die kinematischen Nebenbedingungen (1.3) nicht unbedingt (1.4) gelten. Die geometrischen Bedingungen (1.5) werden üblicherweise stillschweigend vorausgesetzt.

<sup>11</sup>Ohne diese Zusatzannahme können sich Schwierigkeiten beim Abzählen der Freiheitsgrade (siehe Schluß von 1.1.1.3) oder bei der Anwendung des D'ALEMBERTSchen Prinzips (siehe 1.1.2.3) ergeben.

<sup>12</sup>Vgl. (Hamel, 1967, Nr. 37)

<sup>13</sup>Bzgl. einer vollständigeren Beschreibung des rollenden Rades siehe z.B. (Sommerfeld, 1964, Übungsaufgabe II.1.) und (Neimark und Fufaev, 1972, Kap. II, § 2).

<sup>14</sup>Siehe Übungsaufgabe 8.

Kurvenstücks  $\mathcal{C}_{\text{virt}}$  im  $\mathbb{R}^{3n}$ , die durch eine erlaubte Bewegung (1.1) im Grenzfall unendlich großer Geschwindigkeit realisierbar ist. Gemäß (1.3) bedeutet letzteres für jede einfache Parametrisierung<sup>15</sup>

$$\left( \left( \mathbf{y}_1(s), \dots, \mathbf{y}_N(s) \right), s_1, s_2 \right)$$

von  $\mathcal{C}_{\text{virt}}$  :

$$\sum_{\nu=1}^N \dot{\mathbf{y}}_{\nu}(s) \cdot \mathbf{S}_{j,\nu} \left( \mathbf{y}_1(s), \dots, \mathbf{y}_N(s), t_1 \right) = 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2], j \in \{1, \dots, l\}. \quad (1.8)$$

Wenn man sich nur für die virtuellen Anfangsgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{y}}_{\nu}(s)|_{s=s_1}$  interessiert, spricht man von *infinitesimalen virtuellen Verrückungen*, die formal durch die

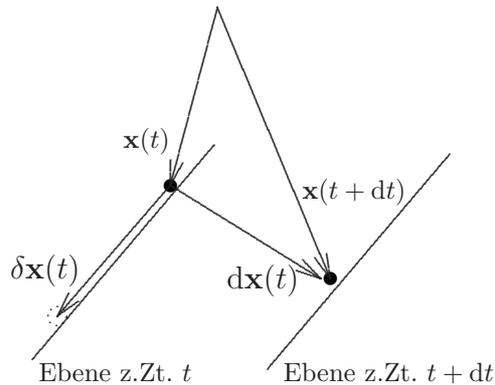
$$\delta \mathbf{x}_{\nu}(t_1) = \dot{\mathbf{y}}_{\nu}(s)|_{s=s_1} ds \quad (1.9)$$

gegeben und dementsprechend durch

$$\sum_{\nu=1}^N \delta \mathbf{x}_{\nu}(t_1) \cdot \mathbf{S}_{j,\nu} \left( \mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1), t_1 \right) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\} \quad (1.10)$$

eindeutig charakterisiert sind.<sup>16</sup>

**Beispiel** (bewegte Schiefe Ebene):



Die maximale Anzahl linear unabhängiger  $N$ -Tupel  $(\delta \mathbf{x}_1(t_1), \dots, \delta \mathbf{x}_N(t_1))$ , für die (1.10) gilt (zu vorgegebenem  $t_1$  und mit der in 1.1.1.2 getroffenen Vereinbarung), bezeichnet man als die **Zahl der Freiheitsgrade im Unendlichkleinen**. Wenn alle Bedingungen in (1.10) voneinander unabhängig sind, dann ist also die Zahl dieser Freiheitsgrade  $3N - l$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>15</sup>Dabei gilt

$$\left( \mathbf{y}_1(s_1), \dots, \mathbf{y}_N(s_2) \right) = \left( \mathbf{x}_1(t_1), \dots, \mathbf{x}_N(t_1) \right).$$

<sup>16</sup>Hier wird (1.4) nicht vorausgesetzt.

## 1.1.2 Zwangskräfte und eingeprägte Kräfte

### 1.1.2.1 Klassifizierung

Bei den Einzelkräften, die auf das System wirken, handelt es sich jeweils entweder um ‘eingeprägte Kräfte’ oder um Zwangskräfte.

Diese Unterscheidung läßt sich nicht mathematisch präzisieren, sondern verlangt physikalische Einsicht.

Die **Zwangskräfte** sind diejenigen minimalen<sup>17</sup> Kräfte, die der Beschränkungsmechanismus (Stangen, Fäden usw.) auf das System ausübt, ‘um die Einhaltung der Nebenbedingungen zu erzwingen’.

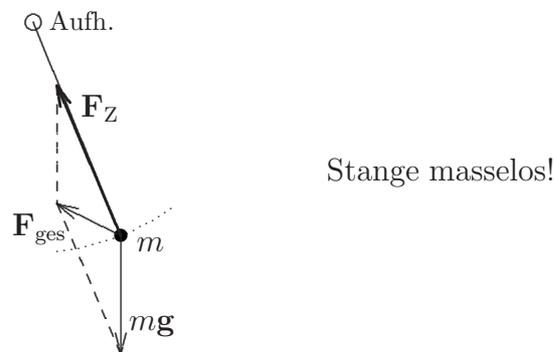
Alle übrigen auf das System einwirkenden Kräfte bezeichnet man als **eingeprägte Kräfte**.

Die Abhängigkeit der **eingepägten Kräfte** vom momentanen Bewegungszustand wird im mathematischen Formalismus der klassischen Mechanik als **bekannt vorausgesetzt**. Diese Kräfte hängen in typischen Fällen von physikalischen Konstanten (Schwerebeschleunigung, elektrische Ladung, Reibungskoeffizient usw.) ab.

Die **Zwangskräfte** sind dagegen i.d. Regel zunächst unbekannt. Sie **hängen** – abgesehen von den eingepägten Kräften, durch die sie induziert werden, den  $m$ , und ihren Geschwindigkeiten – **nur von den Nebenbedingungen ab**.

### 1.1.2.2 Beispiele

(i) Pendel:

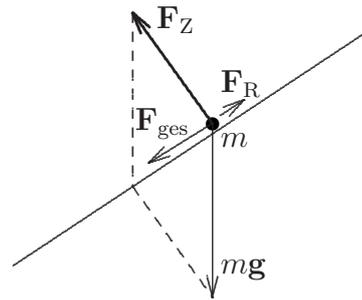


Eine zusätzliche **Reibungskraft** (z.B. Luftwiderstand) wäre **hier** als **eingeprägte Kraft** aufzufassen!

Version vom 26. März 2009

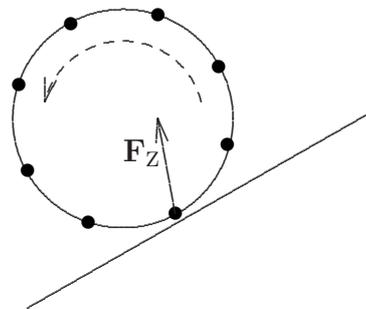
<sup>17</sup>Was hier mit ‘minimal’ gemeint ist, wird in Abschnitt 1.1.2.3 erklärt (siehe insbesondere Fußnote 21).

- (ii)
- Schiefe Ebene mit Gleitreibung:
- <sup>18</sup>



Obwohl die Reibungskraft  $\mathbf{F}_R$  hier (hauptsächlich) vom Beschränkungsmechanismus (Unterlage) hervorgerufen wird, ist sie auch hier als eingeprägte Kraft aufzufassen (Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten  $\rho$ ).

- (iii)
- Modell für rollenden Zylinder:



Solange rollende Bewegung vorliegt (holonome Nebenbedingung), trägt die **Haftreibung** zur **Zwangskraft**  $\mathbf{F}_Z$  bei,<sup>19</sup> die die Unterlage auf den berührenden Massenpunkt ausübt.

Grund: Die Haftreibung sorgt für Einhaltung der Rollbewegung und hängt von keiner physikalischen Konstanten **direkt** ab.

### 1.1.2.3 D'ALEMBERTSches Prinzip

Die Bewegungsgleichungen des Systems sind natürlich die NEWTONschen:

$$\boxed{m_\nu \ddot{\mathbf{x}}_\nu(t) = \mathbf{F}_\nu^e(t) + \mathbf{F}_\nu^Z(t)}, \quad (1.11)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>18</sup>Vgl. (Hamel, 1967, Nr. 31)

<sup>19</sup>Siehe Übungsaufgabe 7.

wobei:

$$\begin{aligned}
 m_\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Masse des } \nu\text{-ten Massenpunktes} \\
 \mathbf{F}_\nu^e(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektorsumme aller } \mathbf{eingep\ddot{r}agten} \text{ Kr\ddot{a}fte,} \\ \text{die zur Zeit } t \text{ auf } m_\nu \text{ wirken,} \end{array} \right. \\
 \mathbf{F}_\nu^Z(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektorsumme aller } \mathbf{Zwangskr\ddot{a}fte,} \\ \text{die zur Zeit } t \text{ auf } m_\nu \text{ wirken.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

W\dd{a}hrend die  $\mathbf{F}_\nu^e(t)$  als bekannt<sup>20</sup> vorausgesetzt werden, wei\dd{a}\ss man von den  $\mathbf{F}_\nu^Z(t)$  zun\dd{a}chst nur, da\ss sie die Einhaltung der Nebenbedingungen (1.3) erzwingen. Um die  $\mathbf{F}_\nu^Z(t)$  eindeutig festzulegen, ist ein Zusatzkriterium notwendig:

Man **fordert**, da\ss die Zwangskr\dd{a}fte in dem Sinne minimal<sup>21</sup> sind, ‘da\ss sie bei infinitesimalen virtuellen Verr\dd{u}ckungen insgesamt keine Arbeit verrichten’. Konkret ist damit gemeint, da\ss f\dd{u}r die in 1.1.1.3 betrachteten  $\mathbf{y}_\nu(s)$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^Z(t_1) \cdot \dot{\mathbf{y}}_\nu(s)|_{s=s_1} = 0 \tag{1.12}$$

gilt. Im Sinne von (1.9) teilen wir das formal durch

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^Z(t_1) \cdot \delta \mathbf{x}_\nu(t_1) = 0} \tag{1.13}$$

mit, wobei f\dd{u}r die  $\delta \mathbf{x}_\nu(t_1)$  stillschweigend stets (1.10) vorausgesetzt wird.<sup>22</sup> Bedingung (1.13) (genauer: (1.12)) ist die naheliegende Verallgemeinerung der Bedingung, da\ss  $\mathbf{F}_Z$  beim Pendel parallel zur Pendelstange bzw. bei der schiefen Ebene<sup>23</sup> senkrecht zur Ebene zeigt.<sup>24</sup>

---

Version vom 26. M\dd{a}rz 2009

<sup>20</sup>In der Regel als Funktionen von  $\mathbf{x}_\nu(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_\nu(t)$  und  $t$ .

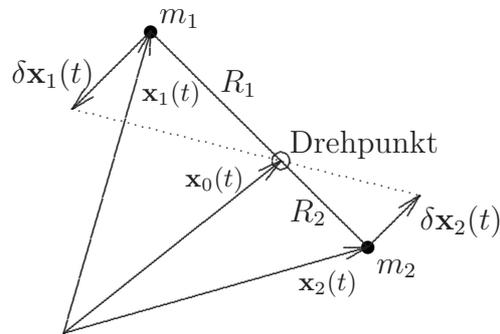
<sup>21</sup>Man kann zeigen, da\ss die Nebenbedingungen die zu allen  $(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_N)$  orthogonale Komponente von  $(\mathbf{F}_1^Z, \dots, \mathbf{F}_N^Z)$  eindeutig festlegen. Daher w\dd{a}hlt (1.13) die Zusatzkr\dd{a}fte  $\mathbf{F}_\nu^Z$  zur Einhaltung der Nebenbedingungen aus, f\dd{u}r die  $\sum_{\nu=1}^N |\mathbf{F}_\nu^Z|^2$  minimal ist.

<sup>22</sup>Da  $t_1$  in 1.1.1.3 beliebig vorgegeben war, wird (1.13) nat\dd{u}rlich f\dd{u}r alle  $t_1 \in \mathbb{R}$  gefordert.

<sup>23</sup>Die Pendelaufh\dd{a}ngung (der masselosen Pendelstange) bzw. die schiefe Ebene (mit konstanter Fl\dd{a}chennormalen) d\dd{u}rfen beliebig bewegt sein!

<sup>24</sup>Eine entsprechend anschauliche Interpretation von (1.13) f\dd{u}r das Modell eines rollenden Zylinders ist wohl kaum m\dd{o}glich.

**Beispiel** ( $\mathbf{x}_0(t)$  vorgegeben):



Hier gilt<sup>25</sup>

$$(1.10) \iff \begin{cases} R_2 \delta \mathbf{x}_1(t) = -R_1 \delta \mathbf{x}_2(t), \\ 0 = \delta \mathbf{x}_1(t) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)) \end{cases}$$

und daher

$$(1.13) \iff 0 = (R_1 \mathbf{F}_1^Z(t) - R_2 \mathbf{F}_2^Z(t)) \cdot \delta \mathbf{x}_1(t) \quad \forall \delta \mathbf{x}_1(t) \perp (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t))$$

$$\iff 0 = \underbrace{\frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)|} \times (R_1 \mathbf{F}_1^Z(t) - R_2 \mathbf{F}_2^Z(t))}_{= \text{Gesamtdrehmoment der Zwangskräfte (bzgl. } \mathbf{x}_0(t))},$$

obwohl die ‘virtuelle Arbeit’ der **Einzelkräfte** i.a. von Null verschieden ist!

Aus (1.13) folgt unmittelbar das

**Prinzip von D’ALEMBERT:**

$$(1.11), (1.10) \implies 0 = \sum_{\nu=1}^N (m_\nu \ddot{\mathbf{x}}_\nu(t) - \mathbf{F}_\nu^e(t)) \cdot \delta \mathbf{x}_\nu(t).$$

(1.14)

In der Praxis legt das D’ALEMBERTSche Prinzip (**nicht** dagegen (1.13) **ohne** (1.11)) in Kombination mit den Nebenbedingungen (1.3) bereits den Bewegungsablauf zu vorgegebenen  $\mathbf{F}_\nu^e(t)$  und erlaubten Anfangsbedingungen fest. Die  $\mathbf{F}_\nu^Z(t)$  ergeben sich dann aus den NEWTONSchen Gleichungen (1.11).

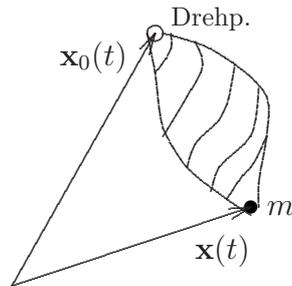
Version vom 26. März 2009

<sup>25</sup>In Abschnitt 1.1.3.2 wird dies detailliert begründet; siehe (1.18).

Es sei betont, daß das D’ALEMBERTSche Prinzip **nicht beweisbar** ist, sondern diejenigen Systeme kennzeichnet, die sich mit den üblichen Methoden der Theoretischen Mechanik behandeln lassen!

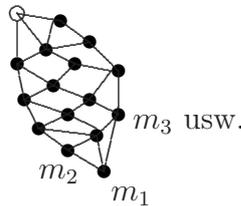
Es bleibt dem Geschick des Physikers überlassen, das jeweilige System so einzugrenzen und die Einteilung in eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte so vorzunehmen, daß (1.14) gilt.

Beim ebenen Pendel mit **schwerer** Stange



gibt es z.B. folgende Möglichkeiten:<sup>26</sup>

- (i) Man behandelt die vom Beschränkungsmechanismus zusätzlich auf  $m$  rückwirkenden Trägheitskräfte als eingeprägte Kräfte.
- (ii) Man betrachtet das Gesamtsystem Stange+Massenpunkt approximativ als System von Massenpunkten, deren Abstände sich nicht ändern:



Als Spezialfall des D’ALEMBERTSchen Prinzips ergibt sich eine Gleichgewichtsbedingung, das sog.

**Prinzip der virtuellen Arbeit:**<sup>27</sup>

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{x}}_\nu(t) = 0 \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}, \\ (1.11), (1.10) \end{array} \right\} \implies 0 = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^e(t) \cdot \delta \mathbf{x}_\nu(t). \quad (1.15)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>26</sup>Für die Wahl (i) hängen die ‘eingeprägten Kräfte’ dann allerdings von der Beschleunigung des Massenpunktes ab. Für die (Standard-) Wahl (ii) läßt sich der Grenzfall unendlich vieler Massenpunkte (ausgedehnter starrer Körper) leicht im LAGRANGE-Formalismus (siehe Abschnitt 1.2) behandeln.

### 1.1.3 Das Grundproblem

#### 1.1.3.1 Zusammenfassung

Man betrachtet Systeme von  $N$  Massenpunkten mit Ortsvektoren  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$ , die **Nebenbedingungen** der Form

$$S_{j,0} dt + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}_{j,\nu} \cdot d\mathbf{x}_\nu = 0 \quad \forall j \in (1, \dots, l)$$

(genauer siehe (1.3), (1.5) und Fußnote 11) genügen.

Die Kräfte, die auf die Massenpunkte wirken, teilt man so in eingeprägte Kräfte  $\mathbf{F}_\nu^e(t)$  und in Zwangskräfte  $\mathbf{F}_\nu^Z(t)$  auf, daß das **D'ALEMBERTSche Prinzip**

$$\left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}_{j,\nu} \cdot \delta\mathbf{x}_\nu = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\} \right) \implies \sum_{\nu=1}^N (m_\nu \ddot{\mathbf{x}}_\nu - \mathbf{F}_\nu^e) \cdot \delta\mathbf{x}_\nu = 0.$$

für den **tatsächlichen** Bewegungsablauf gilt.<sup>28</sup>

Man hofft, daß die Nebenbedingungen zusammen mit dem D'ALEMBERTSchen Prinzip – bei bekannten  $\mathbf{F}_\nu^e(t) = \mathbf{F}_\nu^e(\mathbf{x}_\nu(t), \dot{\mathbf{x}}_\nu(t), t)$  und erlaubten Anfangsbedingungen – auf Bewegungsgleichungen (siehe 1.2.2.2) führen, die eindeutig lösbar<sup>29</sup> sind.

Die  $\mathbf{F}_\nu^Z(t)$  lassen sich dann (für die jeweilige Lösung der Bewegungsgleichungen) aus den **NEWTONSchen Gleichungen**

$$m_\nu \ddot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{F}_\nu^e + \mathbf{F}_\nu^Z$$

(vgl. (1.11)) bestimmen. Dafür gilt dann automatisch<sup>30</sup>

$$\left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}_{j,\nu} \cdot \delta\mathbf{x}_\nu = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\} \right) \implies \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^Z \cdot \delta\mathbf{x}_\nu = 0.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>27</sup>Für **rheonome** Systeme ist die Voraussetzung

$$\ddot{\mathbf{x}}_\nu(t) = 0 \quad \forall \nu \in (1, \dots, N)$$

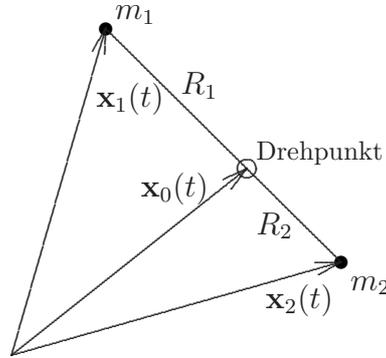
i.a. allerdings **nicht** erfüllbar.

<sup>28</sup>Vgl. (1.10) und (1.14).

<sup>29</sup>Für (hinreichend gutartige) holonome Systeme wird die eindeutige Lösbarkeit der Bewegungsgleichungen in 3.1.2.2 gezeigt (siehe auch Übungsaufgabe 20).

<sup>30</sup>Vgl. (1.12) und (1.13).

## 1.1.3.2 Beispiel (wie zu (1.13))



Die Nebenbedingungen sind:

$$\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_0(t) = -R_2 \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)}{R_1}, \quad \left| \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)}{R_1} \right| = 1. \quad (1.16)$$

Dem entspricht (1.2) mit:

$$N = 2, \quad l = 4,$$

$$S_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = (x_1^j - x_0^j(t)) R_2 + (x_2^j - x_0^j(t)) R_1 \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

$$S_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = R_1^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|^2.$$

Mit (1.4) folgt daraus

$$S_{j,0}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = -(R_1 + R_2) \dot{x}_0^j(t) \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

$$S_{4,0}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 2 \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)),$$

$$S_{j,1}^k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \delta_{jk} R_2 \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

$$S_{j,2}^k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \delta_{jk} R_1 \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{S}_{4,1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = -2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)),$$

$$\mathbf{S}_{4,2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 0$$

und damit lauten die kinematischen Nebenbedingungen (1.3):

$$\begin{aligned} -(R_1 + R_2) \dot{\mathbf{x}}_0 dt + R_2 d\mathbf{x}_1 + R_1 d\mathbf{x}_2 &= 0, \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) dt - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen (1.10) sind durch

$$\begin{aligned} R_2 \delta \mathbf{x}_1 + R_1 \delta \mathbf{x}_2 &= 0, \\ (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

charakterisiert und das D'ALEMBERTSche Prinzip lautet hier:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}_1 = 0 \implies 0 = \left( m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{F}_1^e - \frac{R_2}{R_1} (m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{F}_2^e) \right) \cdot \delta \mathbf{x}_1. \quad (1.19)$$

Mit

$$\boldsymbol{\xi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t) \quad (1.20)$$

wird (1.17) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_0 &= -\frac{R_2}{R_1} \dot{\boldsymbol{\xi}}, \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

und das D'ALEMBERTSche Prinzip äquivalent zu

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \delta \mathbf{x}_1 = 0 \implies 0 = \left( m_1 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + m_1 \ddot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{F}_1^e + \frac{R_2}{R_1} \mathbf{F}_2^e + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 m_2 \ddot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{R_2}{R_1} m_2 \ddot{\mathbf{x}}_0 \right) \cdot \delta \mathbf{x}_1,$$

d.h. zu:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \cdot \delta \mathbf{x}_1 = 0 &\implies (\mu \ddot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{x}_1 = 0, \\ \text{wobei: } \mu &\stackrel{\text{def}}{=} m_1 + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 m_2, \\ \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_1^e - \frac{R_2}{R_1} \mathbf{F}_2^e - \left( m_1 - \frac{R_2}{R_1} m_2 \right) \ddot{\mathbf{x}}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

**Anmerkung:** An dieser Stelle sollte man sich z.B. von der Richtigkeit folgender Aussagen überzeugen:

- Die physikalischen Dimension stimmen.
- Die Numerierung der Massenpunkte spielt keine Rolle.
- Im Grenzfall  $R_2 \rightarrow 0$  ergeben sich die Gleichungen für das einfache Pendel.
- Auch im Spezialfall  $m_2 = 0$ ,  $\mathbf{F}_2^e = 0$  ergeben sich die Gleichungen für das einfache Pendel.

Das Problem (entspr. 1.1.3.1) ist also:

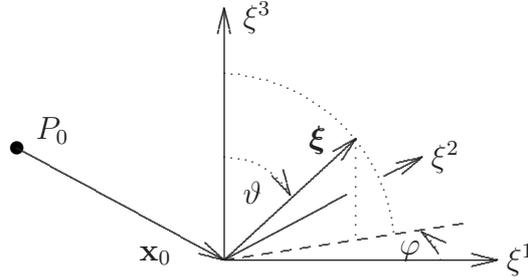
Was folgt aus (1.21) und (1.22) für erlaubte Anfangsbedingungen?

Für erlaubte Anfangsbedingungen ist (1.21) äquivalent zu (1.16).<sup>31</sup> Damit lautet dieses **Problem:**

Was folgt aus (1.16) und (1.22) für  $\boldsymbol{\xi}(t)$  gemäß Definition (1.20), bei vorgegebenem  $\mathbf{x}_0(t)$  ?

<sup>31</sup>D.h.: (1.21)  $\iff$  ((1.16) für  $t = t_0 \implies$  (1.16)  $\forall t \in \mathbb{R}$ ).

Das untersucht man zweckmäßigerweise in **Kugelkoordinaten** bzgl.  $\mathbf{x}_0$  :



$$\mathbf{e}_r = \frac{\boldsymbol{\xi}}{R_1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Anmerkung:** Die Richtungen der  $\xi^j$ -Achsen sind zeitlich konstant.  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$  ist eine (von den Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  abhängige) rechtshändige Orthonormalbasis; vgl. Abschn. 4.3.2 von (Lücke, ein).

Die einzige Einschränkung an  $\delta \mathbf{x}_1$  gemäß (1.18) ist

$$\mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{x}_1 = 0.$$

Mit (1.22) und (1.16) ergeben sich daraus die **Bewegungsgleichungen**<sup>32</sup>

$$(\mu R_1 \ddot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0, \quad (\mu R_1 \ddot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0 \quad (1.23)$$

(für  $\vartheta(t), \varphi(t)$ ). Um die eindeutige Lösbarkeit von (1.23) zu erkennen, wollen wir diese Gleichungen explizit ausschreiben. Dazu beachten wir zunächst, daß die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi, \\ \ddot{\mathbf{e}}_r &= \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \left( \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \dot{\mathbf{e}}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi \cdot \dot{\mathbf{e}}_\vartheta &= -\dot{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \dot{\varphi} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\vartheta &= \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \ddot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi &= \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>32</sup>Die Lösungen von (1.23) erfüllen natürlich (1.17) und (1.19).

gelten. Nach Multiplikation mit  $R_1$  lauten also die Bewegungsgleichungen (1.23) explizit:<sup>33</sup>

$$\left\| \begin{aligned} & (R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2) (\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \\ & = (R_1 \mathbf{F}_1^e - R_2 \mathbf{F}_2^e - (R_1 m_1 - R_2 m_2) \ddot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{e}_\vartheta, \\ & (R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2) (\ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \\ & = (R_1 \mathbf{F}_1^e - R_2 \mathbf{F}_2^e - (R_1 m_1 - R_2 m_2) \ddot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

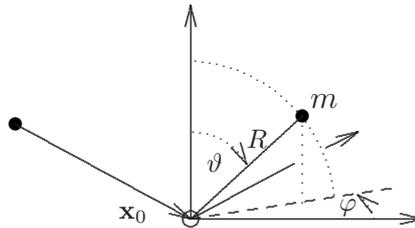
Dies sind zwei gutartige, gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. Gemäß Kap. 5 von (Lücke, ein) können wir also schließen:

**Das Anfangswertproblem besitzt eine eindeutige Lösung.**

**Anmerkungen:**

- (i) Entsprechend (1.24) lauten also die Bewegungsgleichungen für das einfache sphärische Pendel ( $R_2 = 0$ ,  $m_1 = m$ ,  $\mathbf{F}_1^e = \mathbf{F}$ ):

$$\begin{aligned} mR (\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) &= (\mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{e}_\vartheta, \\ mR (\ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) &= (\mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$



Gewöhnlich wird nur der Spezialfall

$$\vartheta = \pi/2, \quad (\mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{e}_\varphi = f(\varphi)$$

behandelt, für den dann

$$mR \ddot{\varphi} = f(\varphi)$$

gilt.

- (ii) Im Falle  $m_1 = m_2 \frac{R_2}{R_1}$  hat nach (1.24) die Bewegungsgleichung des Aufhängepunktes plausiblerweise keinen Einfluß auf  $\boldsymbol{\xi}(t)$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>33</sup>Man mache die üblichen Proben. Z.B. muß der Austausch der Indizes 1,2 der Ersetzung von  $\vartheta$  durch  $\pi - \vartheta$  entsprechen.

(iii) Hätte man die Nebenbedingung in der Form (1.2) mit  $l = 3$  und

$$S_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_j^2 - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0(t)|^2 \quad \text{für } j = 1, 2,$$

$$S_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} (R_1 + R_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$$

geschrieben, hätte sich für (1.10)

$$(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2,$$

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\delta \mathbf{x}_1 - \delta \mathbf{x}_2) = 0$$

statt (1.24) ergeben. Das wäre aber offensichtlich keine vollständige Charakterisierung der infinitesimalen virtuellen Verrückungen (z.B. würde nicht  $\delta \mathbf{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1} \delta \mathbf{x}_1$  folgen).

(iv) Ein systematisches Verfahren zur Auswertung von Nebenbedingungen und D'ALEMBERTSchem Prinzip wird in Abschn. 1.2 entwickelt.

## 1.2 LAGRANGE-Formalismus

### 1.2.1 Generalisierte Koordinaten

**Vorbemerkung:** Die im folgenden benutzten *generalisierten Koordinaten* sind in der Regel nicht global definiert. Gleichungen mit generalisierten Koordinaten haben daher in aller Regel nur lokale Gültigkeit. Diese Problematik soll hier aber nicht thematisiert werden.<sup>34</sup>

#### 1.2.1.1 Allgemeine Beschreibung

Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  seien

$$q^1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t), \dots, q^n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$$

(hinreichend gutartige) Funktionen über einer offenen<sup>35</sup> Teilmenge  $D_q(t)$  des  $\mathbb{R}^{3N}$ , die (lokal) alle zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  erlaubten Ortskonfigurationen umfaßt. Dann bezeichnet man die  $q^1, \dots, q^n$  als **generalisierte Koordinaten** des betrachteten Systems, falls (hinreichend gutartige) Funktionen

$$\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \mathbf{x}_N(q^1, \dots, q^n, t)$$

---

Version vom 26. März 2009

<sup>34</sup>Der eigentlich notwendige mathematische Formalismus wird in Anhang A beschrieben.

<sup>35</sup>Siehe Fußnote 1 von Anhang A.

über  $\mathbb{R}^{n+1}$  existieren mit:<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} q^\nu &= q^\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} \\ \iff \mathbf{x}_\nu &= \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\} \\ & \text{(lokal) für alle erlaubten Momentan-Ortskonfigurationen.} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Für erlaubte Bewegungen (1.1) ist der Zusammenhang zwischen den **generalisierten Geschwindigkeiten**  $\dot{q}^\nu$  und den gewöhnlichen Geschwindigkeiten durch

$$\dot{q}^\nu(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) + \sum_{\mu=1}^N \dot{\mathbf{x}}_\mu(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\mu} q^\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}_\rho = \mathbf{x}_\rho(t)} \quad (1.26)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_\nu(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) + \sum_{\mu=1}^n \dot{q}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) \right) \Big|_{q^\rho = q^\rho(t)} \quad (1.27)$$

gegeben. Somit ist (1.3) für (physikalisch) erlaubte Anfangswerte  $q^1(t_0), \dots, q^n(t_0)$  äquivalent zu:

$$0 = a_{j,0}(q^1(t), \dots, q^n(t), t) + \sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu}(q^1(t), \dots, q^n(t), t) \dot{q}^\nu(t) \quad \forall j \in \{1, \dots, l\},$$

wobei :

$$\begin{aligned} & a_{j,0}(q^1, \dots, q^n, t) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} S_{j,0}(\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \mathbf{x}_N(q^1, \dots, q^n, t), t) \\ & \quad + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}_{j,\nu}(\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \mathbf{x}_N(q^1, \dots, q^n, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t), \\ & a_{j,\nu}(q^1, \dots, q^n, t) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^N \mathbf{S}_{j,\mu}(\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \mathbf{x}_N(q^1, \dots, q^n, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\mu(q^1, \dots, q^n, t). \end{aligned}$$

(1.28)

Dafür schreiben wir auch (**Pfaff**sche Form):

$$a_{j,0} dt + \sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu} dq^\nu = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}. \quad (1.29)$$

<sup>36</sup>Die  $q^1, \dots, q^n$  sollen also den **erlaubten** Momentanpositionen  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in D_q(t)$  eindeutig zugeordnet sein.

Mithilfe der generalisierten Koordinatenfunktionen  $q^\nu(t)$  lassen sich also die mit den Nebenbedingungen verträglichen Bewegungen **vollständig** durch (1.29) und Angabe der erlaubten Anfangspositionen charakterisieren. Dabei charakterisiert (1.29) – entsprechend der in 1.1.3.2 getroffenen Vereinbarung – jeweils die erlaubten generalisierten Geschwindigkeitskonfigurationen  $(\dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  zur (erlaubten) generalisierten Ortskonfiguration  $(q^1(t), \dots, q^n(t))$  zum Zeitpunkt  $t$ .

**Anmerkungen:**

- (i) Für das folgende ist es ohne Belang, ob die  $a_{j,\nu}$  von der in (1.28) angegebenen Form sind.
- (ii) In der Praxis bestimmt man geeignete Bedingungsgleichungen (1.29) direkt am System, nicht erst über (1.3).

Wir betrachten nur solche Systeme, für die virtuelle Verrückungen die Menge der erlaubten Momentan-Ortskonfigurationen invariant lassen. Dann folgt aus (1.25)

**für virtuelle Verrückungen**<sup>37</sup>  $\mathbf{x}_\nu(t_1) \rightarrow \mathbf{y}_\nu(s)$  :

$$\mathbf{y}_\nu(s) = \mathbf{x}_\nu(q_\nu^1(s), \dots, q_\nu^n(s), t_1) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\} \quad (1.30)$$

$$\iff q_\nu^\nu(s) = q^\nu(\mathbf{y}_1(s), \dots, \mathbf{y}_N(s), t_1) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} .$$

Den virtuellen Verrückungen erlaubter Momentanwerte der karthesischen Koordinaten entsprechen also eineindeutig virtuelle Verrückungen  $q^\nu(t_1) \rightarrow q_\nu^\nu(s)$  der verallgemeinerten Koordinaten, wobei der Zusammenhang zwischen den entsprechenden infinitesimalen virtuellen Verrückungen<sup>38</sup> durch

$$\delta \mathbf{x}_\nu = \sum_{\mu=1}^n \delta q^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu, \quad (1.31)$$

$$\delta q^\nu = \sum_{\mu=1}^N \delta \mathbf{x}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\mu} q^\nu \quad (1.32)$$

gegeben ist. Direkt sind die infinitesimalen virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten vollständig charakterisiert durch.<sup>39</sup>

$$0 = \sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu} (q^1(t), \dots, q^n(t), t) \delta q^\nu(t) \quad \text{für } j = 1, \dots, l. \quad (1.33)$$

<sup>37</sup>Die  $\mathbf{y}_\nu(s)$  sind natürlich entsprechend 1.1.1.3 aufzufassen.

<sup>38</sup>Entsprechend (1.9) steht  $\delta q^\nu(t_1)$  formal für  $\dot{q}_\nu^\nu(s_1) ds$ .

<sup>39</sup>Für  $a_{j,\nu}$  gemäß (1.28) ist das eine direkte Folge von (1.10) und (1.31)/(1.32).

Die Nebenbedingungen sind genau dann **holonom**, wenn sie sich mithilfe der gewählten generalisierten Koordinaten in der Form

$$\boxed{a_j(q^1(t), \dots, q^n(t), t) = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, l_q \text{ und bel. } t} \quad (1.34)$$

ausdrücken lassen.

Im Falle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, N$$

sind die Nebenbedingungen genau dann **skleronom**, wenn sie sich mithilfe geeigneter  $a_{j,\nu}$  durch

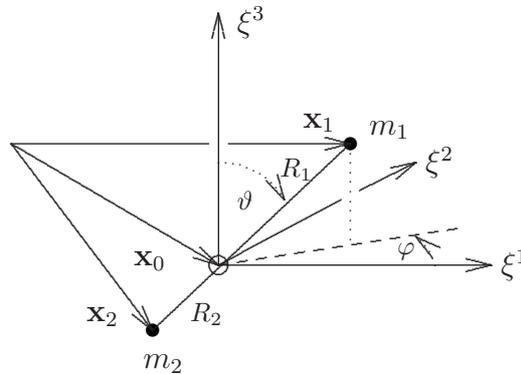
$$\boxed{\sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu}(q^1(t), \dots, q^n(t)) \dot{q}^\nu(t) = 0} \quad (1.35)$$

sowie Angabe der erlaubten Anfangspositionen vollständig charakterisieren lassen und die Menge aller erlaubten Anfangspositionen nicht vom Anfangszeitpunkt abhängt.

Die Mindestzahl  $n$  (lokal) benötigter generalisierter Koordinaten bezeichnet man auch als **Zahl der Freiheitsgrade im Endlichen**.<sup>40</sup>

### 1.2.1.2 Standardbeispiel

Wir betrachten wieder die gleiche Situation wie in Abschnitt 1.1.3.2.



Hier gilt (1.25) z.B. für  $n = 3$  (lokal<sup>41</sup>) mit:

$$\left. \begin{aligned} q^1 &= \vartheta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \arccos \left( \frac{x_1^3 - x_0^3(t)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|} \right) \in (0, \pi), \\ q^2 &= \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \arctan \left( \frac{x_1^2 - x_0^2(t)}{|x_1^1 - x_0^1(t)|} \right) \in [-\pi, +\pi), \\ q^3 &= r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|, \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>40</sup>Für **holonome** Systeme stimmt die Zahl der Freiheitsgrade im Endlichen mit der Zahl der Freiheitsgrade im Unendlichkleinen überein.

<sup>41</sup>Solange  $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)$  nicht ein Vielfaches von  $\mathbf{e}_3$  ist.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1(r, \vartheta, \varphi, t) &= \mathbf{x}_0(t) + r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(r, \vartheta, \varphi, t) &= \mathbf{x}_0(t) - \frac{R_2}{R_1} r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Die erlaubten Anfangspositionen zur Zeit  $t = t_1$  sind

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1(t_1) &= \mathbf{x}_0(t_1) + R_1 \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|}, \\ \mathbf{x}_2(t_1) &= \mathbf{x}_0(t_1) - R_2 \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \end{aligned} \right\} \text{ mit bel. } \mathbf{e} \neq 0$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} q^1(t_1) &= \vartheta(t_1) \in (0, \pi), \\ q^2(t_1) &= \varphi(t_1) \in [-\pi, +\pi), \\ q^3(t_1) &= r(t_1) = R_1. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{reine Konvention} \\ \text{(phys. Einschr.)} \end{array}$$

Generalisierte Geschwindigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}(t) &= \dot{r}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_1(t), \dot{\mathbf{x}}_2(t), t) \\ &\stackrel{(1.26)}{=} (\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t)) \cdot \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)|}, \\ \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t) &\text{ komplizierter.} \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Gewöhnliche Geschwindigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \dot{\mathbf{x}}_1(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t), \dot{r}(t), t) \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{r}(t) \mathbf{e}_r(\vartheta(t), \varphi(t)) + r(t) \dot{\vartheta}(t) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta(t), \varphi(t)) \\ &\quad + r(t) \sin \vartheta(t) \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_\varphi(\vartheta(t), \varphi(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \dot{\mathbf{x}}_2(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t), \dot{r}(t), t) \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \dot{\mathbf{x}}_0(t) - \frac{R_2}{R_1} \left( \dot{\mathbf{x}}_1(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t), \dot{r}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Mit den  $S_{j,0}$  und  $\mathbf{S}_{j,\nu}$  aus 1.1.3.2 ergibt sich für die  $a_{j,\nu}$  in (1.28):

$$\begin{aligned} a_{j,0}(\vartheta, \varphi, r, t) &= -(R_1 + R_2) \dot{x}_0^j(t) + R_2 \frac{\partial}{\partial t} x_1^j(\vartheta, \varphi, r, t) + \frac{\partial}{\partial t} x_2^j(\vartheta, \varphi, r, t) \\ &\quad \text{für } j = 1, 2, 3, \\ a_{4,0}(\vartheta, \varphi, r, t) &= 2 \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \left( \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) - \mathbf{x}_0(t) \right) \\ &\quad - 2 \left( \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) - \mathbf{x}_0(t) \right) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t), \\ a_{j,\nu}(\vartheta, \varphi, r, t) &= R_2 \frac{\partial}{\partial q^\nu} x_1^j(\vartheta, \varphi, r, t) + R_1 \frac{\partial}{\partial q^\nu} x_2^j(\vartheta, \varphi, r, t) \quad \text{für } j, \nu = 1, 2, 3, \\ a_{4,\nu}(\vartheta, \varphi, r, t) &= -2 \left( \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) - \mathbf{x}_0(t) \right) \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_2(\vartheta, \varphi, r, t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t), \\ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) &= -\frac{R_1}{R_2} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x}_2(\vartheta, \varphi, r, t) = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) &= -\frac{R_1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}_2(\vartheta, \varphi, r, t) = r \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, r, t) &= -\frac{R_1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}_2(\vartheta, \varphi, r, t) = r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

folgt daraus

$$a_{j,\nu}(\vartheta, \varphi, r, t) = \begin{cases} -2r & \text{für } j = 4, \nu = 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß (1.28) lauten also die **Nebenbedingungen (1.29)**:

$$\boxed{-2r(t)\dot{r}(t) = 0.} \quad (1.41)$$

(1.41) ist **direkt** als vollständige Charakterisierung der erlaubten generalisierten Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t$  bei gegebenem  $r(t) > 0$  erkennbar (vgl. Anmerkung zu (1.29))! Damit ergibt sich als vollständige Charakterisierung (1.33) der **infinite-simalen virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten**:<sup>42</sup>

$$\boxed{\delta r = 0.} \quad (1.42)$$

In der  $(r, \vartheta, \varphi)$ -Beschreibung erkennt man die **Holonomie** der Nebenbedingungen daran, daß (1.41) für erlaubte Anfangskonfigurationen offensichtlich äquivalent zu (1.34) mit  $l_q = 1$  und  $a_1(\vartheta, \varphi, r, t) = R_1 - r$  ist.

Trotzdem<sup>43</sup> sind die Nebenbedingungen nur dann **skleronom**, wenn  $\dot{\mathbf{x}}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_2 = 0$  gilt.

Das System hat zwei Freiheitsgrade, da man auch ohne  $r$  auskommen kann.

## 1.2.2 LAGRANGE-Gleichungen

### 1.2.2.1 Konsequenzen der NEWTONschen Gleichungen

Im Hinblick auf das D'ALEMBERTSche Prinzip ist es von Interesse, daß aus den NEWTONschen Gleichungen (1.30) für die **tatsächliche Bewegung** unmittelbar

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu = Q_\mu^e + Q_\mu^Z \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.43)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>42</sup> $\delta\vartheta$  und  $\delta\varphi$  unterliegen also keinen Einschränkungen.

<sup>43</sup>Man hätte in der Definition von  $\vartheta(\dots)$  und  $\varphi(\dots)$  auch  $\mathbf{x}_2$  statt  $\mathbf{x}_0(t)$  verwenden können, um  $\frac{\partial}{\partial t} \vartheta = \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0$  zu erreichen!

folgt, wobei

$$\boxed{Q_\mu^e \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^e \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu, \quad Q_\mu^Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^Z \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu} \quad (1.44)$$

die sog. **generalisierten Kräfte** sind.

### Warnungen:

- (i) Die  $Q_\mu$  haben i.a. **nicht** mehr die physikalische Dimension einer Kraft.
- (ii) Die Zuordnung  $(\mathbf{F}_1^e, \dots, \mathbf{F}_N^e) \longrightarrow (Q_1^e, \dots, Q_n^e)$  ist i.a. **nicht** rückerdeutig.

In der Schreibweise<sup>44</sup>

$$\dot{f}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} f(q^1, \dots, q^n, t) + \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q^1, \dots, q^n, t)$$

für beliebiges (hinreichend gutartiges)  $f(q^1, \dots, q^n, t)$  gilt allgemein

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial q^\nu} f = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} \dot{f}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^\nu} f = \frac{\partial}{\partial q^\nu} \dot{f}} \quad (1.45)$$

und somit

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu}_{\stackrel{(1.45)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} \dot{\mathbf{x}}_\nu} \right) - \left( \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu}_{\stackrel{(1.45)}{=} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \dot{\mathbf{x}}_\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} |\dot{\mathbf{x}}_\nu|^2 - \frac{\partial}{\partial q^\mu} |\dot{\mathbf{x}}_\nu|^2 \right). \end{aligned}$$

Mit der **kinetischen Energie**

$$\boxed{T(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} \left| \dot{\mathbf{x}}_\nu(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t), t) \right|^2} \quad (1.46)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>44</sup>Hierdurch ist

$$f(t) = f(q^1(t), \dots, q^n(t), t) \implies \dot{f}(t) = \dot{f}(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t), t)$$

garantiert.

des Systems zum Zeitpunkt  $t$  gilt also

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \ddot{\mathbf{x}}_{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\mu}} \mathbf{x}_{\nu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\mu}} T - \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} T. \quad (1.47)$$

Gemäß (1.47) ist (1.43) für die **tatsächliche Bewegung** äquivalent zu

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\mu}} T - \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} T = Q_{\mu}^e + Q_{\mu}^Z.} \quad (1.48)$$

### 1.2.2.2 Auswertung des D'ALEMBERTSchen Prinzips

Nach (1.31)/(1.32), (1.44) und (1.47) ergibt sich in generalisierten Koordinaten für die **tatsächliche Bewegung** folgende äquivalente Formulierung für das

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Prinzip von D'ALEMBERT:} \\ \sum_{\mu=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\mu}} T - \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} T - Q_{\mu}^e \right) \delta q^{\mu} = 0. \end{array}} \quad (1.49)$$

**Anmerkung:** In Übereinstimmung mit (1.48) lautet die entspr. Formulierung von (1.13):

$$\sum_{\mu=1}^n Q_{\mu}^Z \delta q^{\mu} = 0.$$

Da (1.33), d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta q^1 \\ \vdots \\ \delta q^n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, l_q,$$

für jeden Zeitpunkt eine **vollständige** Charakterisierung der infinitesimalen virtuellen Verrückungen  $(\delta q^1, \dots, \delta q^n)$  darstellt (nach Vereinbarung in 1.1.3.2), ist (1.49) äquivalent zu folgender Aussage:

Für die **tatsächliche Bewegung** steht

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} T - \frac{\partial}{\partial q^1} T - Q_1^e \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^n} T - \frac{\partial}{\partial q^n} T - Q_n^e \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

(in  $\mathbb{R}^n$ ) zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf all denjenigen Vektoren, die senkrecht auf allen Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,n} \end{pmatrix} ; j = 1, \dots, l_q, \quad (1.51)$$

stehen.

Äquivalent dazu ist die Aussage:

(1.50) ist zu jedem Zeitpunkt eine Linearkombination der Vektoren (1.51).

Daraus folgt:

Das D'ALEMBERTSche Prinzip ist äquivalent zu folgender Aussage:

Zum tatsächlichen Bewegungsablauf des Systems existieren sog. **LAGRANGE-Parameter** (i.a. nicht eindeutig), d.h. Funktionen  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{l_q}(t)$  mit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} T - \frac{\partial}{\partial q^\mu} T = Q_\mu^e + \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\mu} \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.52)$$

Aus (1.52) und (1.48) folgt sofort<sup>45</sup>

$$Q_\mu^Z = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\mu} \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.53)$$

Die Gleichungen (1.52) bezeichnet man als

- **LAGRANGE-Gleichungen I. Art:**

falls  $n = 3N$  und nicht alle  $a_{j,\mu} = 0$ ,

- **LAGRANGE-Gleichungen II. Art:**

falls alle  $a_{j,\mu} = 0$  ( $n =$  Zahl der Freiheitsgrade),

- **LAGRANGE-Gleichungen vom gemischten Typ:** sonst.

<sup>45</sup>Die Dimension des Vektorraumes der Zwangskräfte wächst mit der Zahl der Nebenbedingungen.

**Anmerkungen:**

- (i) **Sämtliche LAGRANGE-Gleichungen** zum vorgegebenen Problem (System + eingeprägte Kräfte) sind – sofern die entspr. generalisierten Koordinaten existieren – **für erlaubte Bewegungen** offensichtlich **äquivalent**.
- (ii) Für die **LAGRANGE-Gleichungen II. Art** ( $n$  gewöhnliche Differentialgleichungen für  $n$  unbekannte Funktionen  $q^1(t), \dots, q^n(t)$ ) läßt sich relativ leicht zeigen (Übungsaufgabe 20), daß das zugehörige Anfangswertproblem **lokal eindeutig lösbar** ist, falls

$$\mathbf{F}_\nu^e(t) = \mathbf{F}_\nu^e(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t), t) \quad \text{hinr. gutartig}$$

für  $\nu = 1, \dots, n$ .

**1.2.2.3 Verallgemeinerte Potentiale**

Wenn sich die generalisierten Kräfte  $Q_\nu^e(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$  gemäß<sup>46</sup>

$$Q_\nu^e = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial U}{\partial q^\nu} \quad (1.54)$$

aus einem sog. **verallgemeinerten Potential**  $U(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$  ergeben, lassen sich die LAGRANGE-Gleichungen (1.52) durch Einführung der sog. **LAGRANGE-Funktion**

$$L \stackrel{\text{def}}{=} T - U \quad (1.55)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>46</sup>Für beliebiges (hinreichend gutartiges)  $F(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$  bezeichnen wir mit  $\frac{d}{dt}F$  die durch

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} F \right) (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, \ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n, t) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} F(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) + \sum_{\mu=1}^n \dot{q}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} F(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \\ & \quad + \sum_{\mu=1}^n \ddot{q}^\mu \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} F(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \end{aligned}$$

gegebene Funktion von  $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, \ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n$  und  $t$ . Dementsprechend muß ein verallgemeinertes Potential stets von der Form

$$U(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = f(q^1, \dots, q^n, t) + \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu g_\nu(q^1, \dots, q^n, t)$$

sein muß, damit die  $Q_\nu^e$  nicht von den  $\ddot{q}^\mu$  abhängen.

in der Form

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\nu} \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}} \quad (1.56)$$

schreiben.

- (i)  $U$  (und somit  $L$ ) ist nicht eindeutig; denn z.B. ist nach (1.45) mit  $U$  auch  $\hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} U + \dot{f}$  – mit bel.  $f(q^1, \dots, q^n, t)$  – ein verallgemeinertes Potential.<sup>47</sup>
- (ii) Im allgemeinen Falle wird nur ein Teil der eingepprägten Kräfte erfaßt, die übrigen bleiben dann rechts stehen.

Gewöhnlich sucht man zunächst in karthesischen Koordinaten für die eingepprägten Kräfte  $\mathbf{F}_\nu^e(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t)$  ein verallgemeinertes Potential  $U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t)$ :

$$\boxed{\mathbf{F}_\nu^e = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\nu} U) - \nabla_{\mathbf{x}_\nu} U.} \quad (1.57)$$

Dann gilt (1.54) mit

$$\boxed{\begin{aligned} &U(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^\nu, t) \\ &= U(\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t), t). \end{aligned}} \quad (1.58)$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt mit (1.44) aus

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial U}{\partial q^\nu} \\ &= \sum_{\mu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\mu} U \right)}_{\stackrel{(1.55)}{=} \frac{\partial \mathbf{x}_\mu}{\partial q^\nu}} - \frac{\partial \mathbf{x}_\mu}{\partial q^\nu} \nabla_{\mathbf{x}_\mu} U - \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_\mu}{\partial q^\nu} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\mu} U}_{\stackrel{(1.55)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_\mu}{\partial q^\nu}} \right) \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_{\mu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\mu} U - \nabla_{\mathbf{x}_\mu} U \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_\mu}{\partial q^\nu}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiele:**

<sup>47</sup>Siehe Übungsaufgabe 23 a).

(i) Für gewöhnliche Potentialkräfte gilt

$$U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t).$$

Im Falle  $\frac{\partial}{\partial t}U = 0$  sind diese Kräfte **konservativ**, d.h. es gilt

$$\dot{T} + \dot{U} = 0 \quad \text{für alle Lösungen von (1.56),}$$

**falls** die Nebenbedingungen **skleronom** sind<sup>48</sup> (Energiesatz; siehe Schluß von 1.2.2.4).

(ii) Im Falle linearer Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der Form

$$U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = - \sum_{\nu=1}^N e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_\nu$$

folgt mit (1.57)

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_\nu} \mathbf{F}_\nu^e(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) &= -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_\nu, \dot{\mathbf{x}}_\nu, t) + \nabla_{\mathbf{x}_\nu} (\dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) - (\dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\nu}) \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{x}_\nu} (\dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \\ &\stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) + \dot{\mathbf{x}}_\nu \times \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t). \end{aligned}$$

(iii) Der  $\nu$ -te Massenpunkt besitze jeweils die elektrische Ladung  $e_\nu$ . Dann übt das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

— im MKSA-System, Anhang A.3.3 von (Lücke, edyn) — jeweils die Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \dot{\mathbf{x}}_\nu, t) &= e_\nu \mathbf{E}(\mathbf{x}_\nu, t) + \underbrace{e_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu, t)}_{\text{LORENTZ-Kraft}} \\ &= e_\nu \left( -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}_\nu, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) \right) + e_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \times \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) \end{aligned}$$

aus. Nach (ii) gilt also

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\nu} U - \nabla_{\mathbf{x}_\nu} U$$

<sup>48</sup>Im Falle rheonomer Nebenbedingungen gilt die Energieerhaltung i.a. **nicht**, die Zwangskräfte können Arbeit leisten (siehe Übungsaufgaben 10 und 26).

mit

$$U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = \sum_{\nu=1}^N e_{\nu} (\Phi(\mathbf{x}_{\nu}, t) - \dot{\mathbf{x}}_{\nu} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu}, t)) .$$

#### 1.2.2.4 Erhaltungssätze

Die  $q^1, \dots, q^n$  seien (von den üblichen Bereichsfragen abgesehen) uneingeschränkt<sup>49</sup> und es mögen die LAGRANGE-Gleichungen (1.56), also

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\nu}} = 0 \quad \forall \nu \in (1, \dots, n) ,} \quad (1.59)$$

für die **tatsächliche Bewegung** gelten. Dann bezeichnet man

$$\boxed{p_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\nu}} L} \quad (1.60)$$

für  $\nu \in \{1, \dots, n\}$  jeweils als den zu  $q^{\nu}$  **kanonisch konjugierten Impuls**.<sup>50</sup>

Die  $\nu$ -te generalisierte Koordinate bezeichnet man als **zyklisch**, falls  $\frac{\partial}{\partial q^{\nu}} L = 0$ . Damit ergibt sich aus (1.59) unmittelbar folgender

$$\boxed{\text{Erhaltungssatz:} \\ q^{\nu} \text{ zyklisch} \quad \implies \quad \dot{p}_{\nu} = 0 \text{ für alle Lösungen von (1.59).}} \quad (1.61)$$

**Warnung:** Die Definition z.B. von  $p_1$  in (1.60) hängt i.a. auch von der Wahl der  $q^2, \dots, q^n$  ab!

#### Beispiele für kanonisch konjugierte Impulse:

(i) Sei

$$\begin{aligned} U(q^1, \dots, \dot{q}^n, t) \\ = V(q^1, \dots, q^n, t) - \sum_{\nu=1}^N e_{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu}(q^1, \dots, q^n, t), t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\nu}(q^1, \dots, \dot{q}^n, t) . \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>49</sup>Die Nebenbedingungen (für die karthesischen Koordinaten) sind also holonom und  $n$  ist die Zahl der Freiheitsgrade.

<sup>50</sup>I.a. hat  $p_{\nu}$  natürlich **nicht** die physikalische Dimension eines gewöhnlichen Impulses.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} L &\stackrel{(1.55)}{=} \sum_{\nu=1}^N (m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu + e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} \dot{\mathbf{x}}_\nu \\ &\stackrel{(1.45)}{=} \sum_{\nu=1}^N (m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu + e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \cdot \frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{x}_\nu. \end{aligned}$$

Falls ein konstanter Vektor  $\mathbf{e}$  existiert mit

$$\mathbf{x}_\nu(q^1 + \Delta q^1, q^2, \dots, q^n, t) = \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) + \Delta q^1 \mathbf{e},$$

dann ist der zu  $q^1$  kanonisch konjugierte Impuls gemäß (1.60) also

$$p_1 = \sum_{\nu=1}^N \left( \underbrace{m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu}_{\text{mech. Impuls v. } m_\nu} + e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t) \right) \cdot \mathbf{e}.$$

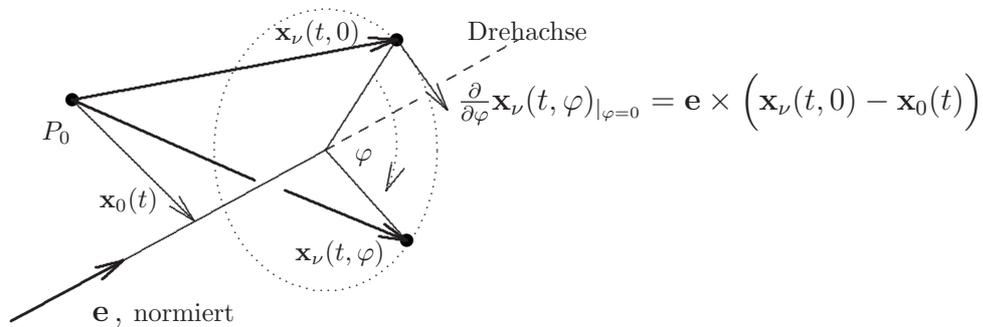
In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^1} T &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^1} \dot{\mathbf{x}}_\nu}_{\substack{\text{d} \\ \text{d}t}} \\ &\stackrel{(1.45)}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{x}_\nu}_{=\mathbf{e}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$q^1$  ist hier also genau dann zyklisch, wenn  $\frac{\partial}{\partial q^1} U = 0$  gilt.

(ii) Für gleiche  $U$ ,  $\mathbf{e}$  wie in (i), aber

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) = \mathbf{e} \times (\mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) - \mathbf{x}_0(t)) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}$$



gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{\nu=1}^N (m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu + e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \cdot (\mathbf{e} \times (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0(t))) \\ &= \left( \underbrace{\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0(t))}_{\text{mech. Drehimp. von } m_\nu \text{ bzgl. } \mathbf{x}_0(t)} \times (m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu + e_\nu \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu, t)) \right) \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Für  $\underline{\mathbf{x}_0 = \text{const.}}$  ist hier  $q^1$  genau dann zyklisch, wenn  $\frac{\partial}{\partial q^1} U = 0$   
(Beweis als Übungsaufgabe 25).

Aus obigen Beispielen<sup>51</sup> ergeben sich folgende Spezialfälle für (1.61):

**Satz 1.2.1 (Impulssatz)** Für gegebenes  $\mathbf{e} = \text{const.}$  gelte (1.58) mit

$$U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = U(\mathbf{x}_1 + \xi \mathbf{e}, \dots, \mathbf{x}_N + \xi \mathbf{e}, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Dann ist die  $\mathbf{e}$ -Komponente des (mechanischen) Gesamtimpulses

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu$$

für alle Lösungen von (1.59) zeitlich konstant, falls mit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  stets auch  $(\mathbf{x}_1 + \xi \mathbf{e}, \dots, \mathbf{x}_N + \xi \mathbf{e}, t)$  für beliebiges  $\xi \in \mathbb{R}^1$  mit den Nebenbedingungen verträglich ist.

**Satz 1.2.2 (Drehimpulssatz)** Für gegebenes  $\mathbf{e} = \text{const.}$  gelte (1.58) mit

$$U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = U(\hat{D}_{\varphi \mathbf{e}} \mathbf{x}_1, \dots, \hat{D}_{\varphi \mathbf{e}} \mathbf{x}_N, t) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

wobei:

$$\hat{D}_{\varphi \mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Drehung um die } \mathbf{e}\text{-Achse (durch } P_0) \\ \text{um den Winkel } \varphi |\mathbf{e}| \text{ (im Rechtsschraubensinn)}. \end{cases}$$

Dann ist die  $\mathbf{e}$ -Komponente des (mechanischen) Gesamtdrehimpulses (bzgl. des gewählten Koordinatenursprungs)

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{x}_\nu \times m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu$$

für alle Lösungen von (1.59) zeitlich konstant, falls mit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  stets auch  $(\hat{D}_{\varphi \mathbf{e}} \mathbf{x}_1, \dots, \hat{D}_{\varphi \mathbf{e}} \mathbf{x}_N, t)$  für bel.  $\varphi \in \mathbb{R}^1$  eine erlaubte Konfiguration ist.

<sup>51</sup>Die Nebenbedingungen waren als holonom vorausgesetzt!

**Anmerkung:** Eigentlich müßte man für Impuls- und Drehimpulssatz die Existenz obigen Beispielen entsprechender generalisierter Koordinaten zeigen. Das ist (lokal, außer am Punkte  $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_N = 0$ ) aber möglich, wenn überhaupt uneingeschränkte generalisierte (lokale) Koordinaten existieren.

Naheliegende Frage: Was folgt aus<sup>52</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} L(q^1, \dots, \dot{q}^n, t) = 0$$

für die tatsächliche Bewegung?

Antwort: Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \sum_{\nu=1}^n \left( \dot{q}^\nu \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^\nu}}_{\substack{\text{d} \\ \text{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu}} + \ddot{q}^\nu \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu}}_{\substack{= p_\nu \\ \text{(1.60)}}} \right) \\ &\stackrel{\text{Produkt.}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu p_\nu. \end{aligned}$$

Somit gilt für die **tatsächliche Bewegung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} L = 0 \implies \dot{H} = 0} \quad (1.62)$$

mit:<sup>53</sup>

$$\boxed{H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu p_\nu - L.} \quad (1.63)$$

Im Falle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, N$$

gilt nach (1.27) und (1.46)

$$T = \sum_{\nu, \mu=1}^n \alpha_{\nu, \mu}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu$$

Version vom 26. März 2009

<sup>52</sup>Man beachte, daß die Gültigkeit von  $\frac{\partial}{\partial t} L(q^1, \dots, \dot{q}^n, t) = 0$  für bel.  $t$  **nicht** äquivalent zur Gültigkeit von  $\frac{\partial}{\partial t} L(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = 0$  für bel.  $t$  ist!

<sup>53</sup>Man beachte auch (3.22) und (3.19).

(o.B.d.A. mit  $\alpha_{\nu,\mu} = \alpha_{\mu,\nu}$ ; vgl. Übungsaufgabe 20) und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} T = 0 \quad (1.64)$$

sowie

$$\sum_{\nu=1}^n \dot{q}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\nu}} T = 2T.$$

(Spezialfall des EULERSchen Fundamentalsatzes). Mit (1.63), (1.60) und (1.55) folgt somit

$$\boxed{\begin{array}{l} H = T + U, \\ \text{falls: } U = U(q^1, \dots, q^n, t) \text{ und} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_{\nu} = 0 \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}, \end{array}} \quad (1.65)$$

und daraus<sup>54</sup> mit (1.64) der

**Satz 1.2.3 (Energiesatz)** *Es gelte (1.58) mit*

$$U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$$

(konservative eingeprägte Kräfte!) und die Nebenbedingungen seien **skleronom**. Dann<sup>55</sup> gilt für alle Lösungen von (1.59):

$$\begin{aligned} H &= T + U = \text{Energie} \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

**Merkregel:** (für Systeme mit  $U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ )

- (i) Translationsinvarianz des Systems  
 $\implies$  Impulserhaltung (für Komp. in Transl.-Richtung).
- (ii) Drehinvarianz des Systems  
 $\implies$  Drehimpulserhaltung (für Komp. in Richtung d. Drehachse).
- (iii) Zeittranslationsinvarianz  
 $\implies$  Energieerhaltung.

<sup>54</sup>Für skleronome Nebenbedingungen kann man nämlich O.B.d.A.  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_{\nu} = 0$  für  $\nu = 1, \dots, N$  voraussetzen.

<sup>55</sup>Man beachte Fußnote 48.

**Anmerkung:** Die Ableitung des Energiesatzes und der Erhaltungsgrößen zu zyklischen Koordinaten sind Spezialfälle eines allgemeineren Prinzips von NOETHER:

Wenn ein (hinreichend gutartig) von  $t$  und dem Zusatzparameter  $\alpha$  abhängiges Funktional  $\mathcal{T}_{\alpha,t}(q)$  und Funktionen  $K(q, \dot{q}, t)$  sowie  $R_0^\nu(q, \dot{q}, t)$  existieren mit

$$\mathcal{T}_{0,t}(q) = q(t), \quad (1.66)$$

$$R_0^\nu(q(t), \dot{q}(t), t) = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} q_\alpha^\nu(t) \right)_{|\alpha=0} \quad (1.67)$$

und

$$\left( \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) \right)_{|\alpha=0} = \frac{d}{dt} K(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.68)$$

für alle (hinreichend gutartigen) Bewegungsabläufe  $q(t)$ , wobei

$$q_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\alpha,t}(q),$$

dann folgt daraus (für hinreichend gutartiges  $\mathcal{T}_{\alpha,t}(q)$ ), daß

$$Q(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_0^\nu(q, \dot{q}, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) - K(q, \dot{q}, t)$$

eine Erhaltungsgröße ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q^\nu(t)} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu(t)} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right) = 0 \\ \implies & \frac{d}{dt} Q(q(t), \dot{q}(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Man kann zeigen,<sup>56</sup> daß sich (lokal) jede (hinreichend gutartige) Erhaltungsgröße auf diese Weise ergibt (NOETHER-*Theorem*).

## 1.2.3 Das LAGRANGE-Lösungsverfahren zum Grundproblem für eingeprägte Kräfte mit verallgemeinertem Potential

### 1.2.3.1 Zusammenfassung

Man sucht (lokal) geeignete Funktionen

$$\begin{aligned} q^\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) & ; \nu = 1, \dots, n, \\ \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) & ; \nu = 1, \dots, N, \\ a_{j,\nu}(q^1, \dots, q^n, t) & ; j = 1, \dots, l_q; \nu = 0, \dots, n \end{aligned}$$

derart, daß für **erlaubte** Momentanpositionen (jeweils lokal) folgende beiden Aussagen gelten:

$\begin{aligned} \mathbf{x}_\nu &= \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\} \\ \iff q^\nu &= q^\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<sup>56</sup>Siehe z.B. (Saletan und Cromer, 1974, Abschn. 3.5.d)).

(vgl. (1.25)).

$$a_{j,0} + \sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu} \dot{q}^\nu = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l_q\}$$

charakterisiert die erlaubten  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  vollständig.

(vgl. (1.29) und Anmerkung dazu).

Dann sucht man ein verallgemeinertes Potential  $U$  mit

$$\mathbf{F}_\nu^e(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_\nu} U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) - \nabla_{\mathbf{x}_\nu} U(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t)$$

(vgl. (1.57)) und bestimmt die zugehörige LAGRANGE-Funktion

$$L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu(q^1, \dots, \dot{q}^n, t)|^2 - U(\mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(q^1, \dots, \dot{q}^n, t), t)$$

(vgl. (1.55) und (1.46)) nach Berechnung der

$$\dot{\mathbf{x}}_\nu(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) + \sum_{\mu=1}^n \dot{q}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t).$$

Die tatsächliche Bewegung ermittelt man schließlich (lokal) durch Lösung der LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L - \frac{\partial}{\partial q^\nu} L = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\nu} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n$$

(vgl. (1.56)) zur vorgegebenen (erlaubten) Anfangsposition **unter Einhaltung der Nebenbedingung (1.29)** mithilfe geeigneter  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{l_q}(t)$ . Die verallgemeinerten Zwangskräfte

$$Q_\nu^Z = \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_\mu^Z \cdot \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\mu$$

(vgl. (1.44)) ergeben sich dann zu

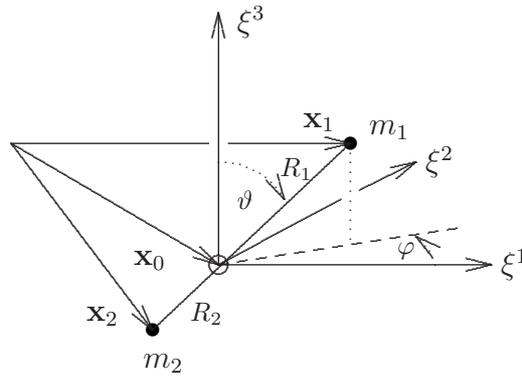
$$Q_\nu^Z = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\nu}$$

(vgl. (1.53)).

### 1.2.3.2 Standardbeispiel

Wir betrachten wieder unser Standardbeispiel entspr. 1.1.3.2 bzw. 1.2.1.2, jetzt für den **Spezialfall**

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= 0 && \text{für alle } t, \\ \mathbf{F}_j^e &= m_j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} && \text{für } j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$



Für die in 1.2.1.2 gewählten generalisierten Koordinaten  $q^1 = \vartheta, q^2 = \varphi, q^3 = r$  gilt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \\ \mathbf{x}_2 &= -\frac{R_2}{R_1} \mathbf{x}_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\frac{R_2}{R_1} \dot{\mathbf{x}}_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Die erlaubten generalisierten Geschwindigkeiten sind für jeden Zeitpunkt vollständig charakterisiert durch

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^3 a_{j,\nu} \dot{q}^\nu &= 0 && \text{für } j = 1, \\ a_{1,\nu} &= \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 3, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

was ja nichts anderes bedeutet, als  $\dot{r} = 0$ . Wegen (1.69) gilt (1.57) mit

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \stackrel{\text{def}}{=} m_1 g x_1^3 + m_2 q x_2^3.$$

Mit (1.70) und (1.71) folgt daraus

$$L(\vartheta, \varphi, r, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{r}, t) = \left. \begin{aligned} & \frac{m_1 + (R_2/R_1)^2 m_2}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) \\ & - \left( m_1 - \frac{R_2}{R_1} m_2 \right) g r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Nach (1.72) lauten die LAGRANGE-Gleichungen (1.56) (vom gemischten Typ):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad (1.74)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.75)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \stackrel{(1.53)}{=} Q_r^Z. \quad (1.76)$$

Diese Gleichungen sind zu erlaubten Anfangsbedingungen so zu lösen, daß die Nebenbedingungen erfüllt sind; d.h. daß

$$r = R_1. \quad (1.77)$$

Damit ergibt sich nach (1.73) für (1.74) explizit

$$\left\| (R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2) \left( \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) - (R_1 m_1 - R_2 m_2) g \sin \vartheta = 0, \right.$$

was wegen (1.69) und  $\mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$  mit der ersten der Gleichungen (1.24) von 1.1.3.2 übereinstimmt.

Nach (1.73) ist  $\varphi$  **eine zyklische Koordinate**, d.h. es gilt  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ . Daher besagt (1.75), daß der zu  $\varphi$  kanonisch konjugierte Impuls

$$\left\| p_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \stackrel{(1.73), (1.77)}{=} \underbrace{(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta}_{=3\text{-Komp. d. Gesamtdrehimp.}} \quad \text{zeitlich konstant}$$

ist.<sup>57</sup> Wegen (1.69) stimmt das mit der zweiten der Gleichungen (1.24) von 1.2.3.2 überein.

<sup>57</sup>Vgl. (1.61), wo  $a_{j,\nu} = 0$  vorausgesetzt war.

(1.74), (1.75) und (1.72) (bzw. (1.77)) legen die Bewegung (zu vorgegebenen, erlaubten Anfangsbedingungen) über (1.70) bereits eindeutig fest.

Die Zusatzgleichung (1.76), die aus der Verwendung der überflüssigen generalisierten Koordinate  $r$  resultiert, dient lediglich zu Berechnung der Zwangskraft<sup>58</sup>

$$\left| \quad Q_r^Z \stackrel{\text{def}}{(1.44)} \left( \mathbf{F}_1^Z - \frac{R_2}{R_1} \mathbf{F}_2^Z \right) \cdot \mathbf{e}_r . \right.$$

Nach (1.73) und (1.77) liefert (1.76) dafür:

$$\left\| \quad Q_r^Z = - \left( R_1 m_1 + \frac{R_2^2}{R_1} m_2 \right) \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) - \left( m_1 - \frac{R_2}{R_1} m_2 \right) g \cos \vartheta . \right.$$

**Abschließende Bemerkung:** Für  $\dot{\mathbf{x}}_0 \neq 0$  wäre die oben beschriebene Methode umständlicher als die in 1.1.3.2 angewandte.<sup>59</sup>

<sup>58</sup>Im Spezialfall  $R_2 = 0$  stimmt sie mit der Spannung der Pendelstange überein.

<sup>59</sup>Siehe Übungsaufgabe 18.

# Kapitel 2

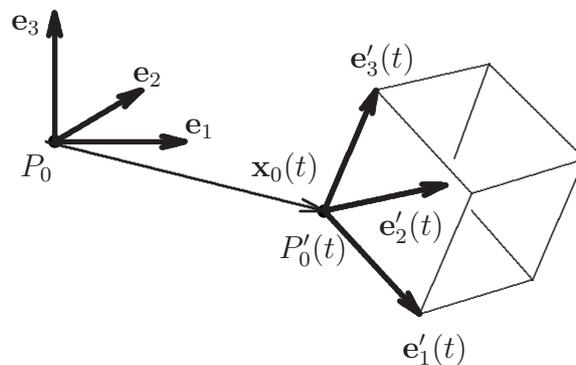
## Starre Körper

### 2.1 Kinematik

#### 2.1.1 Allgemeine Beschreibung

##### 2.1.1.1 Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem

Wie immer sei ein **raumfestes** Bezugssystem gewählt, d.h. ein Koordinatenursprung  $P_0$  und orthogonale Achsenrichtungen entspr. den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Die Bewegung eines **starren** Körpers läßt sich dadurch beschreiben, daß man am Körper selbst einen Koordinatenursprung  $P'_0$  und orthogonale Achsenrichtungen entspr. den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  markiert und dann  $\mathbf{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{P_0 P'_0}$  sowie die  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  als zeitabhängige Linearkombinationen der  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  angibt:



Natürlich gilt für jeden Zeitpunkt  $t$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1(t) \\ \mathbf{e}'_2(t) \\ \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}} \quad (2.1)$$

mit einer eindeutigen **Drehmatrix**  $R(t)$ . Wir schreiben insbesondere  $R(t) = R_{\varphi(t)}$ , falls

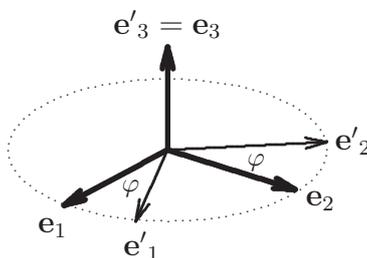
$$\mathbf{e}'_j(t) = \hat{D}_{\varphi(t)} \mathbf{e}_j \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

mit dem im Drehimpulssatz (Abschn. 1.2.2.4) eingeführten Drehoperator  $\hat{D}_{\varphi(t)}$  gilt.<sup>1</sup>

**Warnung:** Im Gegensatz zu  $\hat{D}_{\varphi}$  ist  $R_{\varphi}$  von der Wahl des Orthonormalsystems  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  abhängig!

Z.B. gilt:

$$R_{\varphi \mathbf{e}_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$



Allgemein stellt der  $j$ -te **Zeilenvektor** der Transformationsmatrix die Komponenten bzgl.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  des Bildes von  $\mathbf{e}_j$  dar. Daher:

$$R = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix} \text{ Matrix für Drehspiegelung}^2 \quad (2.3)$$

$$\iff \sum_{k=1}^3 R_j^k R_l^k = \delta_{jl} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bewegung des starren Körpers läßt sich also beschreiben durch Angabe des zeitabhängigen Translationsvektors  $\mathbf{x}_0(t)$  sowie der zeitabhängigen Drehmatrix  $R(t)$ .

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$  bzgl. des raumfesten Systems und den Koordinaten  $x'^1(t), x'^2(t), x'^3(t)$  des **körperfesten** Systems

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Man kann zeigen, daß  $\{\hat{D}_{\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}^3\}$  die Menge **aller** Drehoperatoren ist (Fredenhagen, 9798, Satz 4.2); siehe auch Übungsaufgabe 71.c) zu *Math. Meth. d. Phys.* Natürlich gilt stets  $\hat{D}_{\varphi} \varphi = \varphi$ .

<sup>2</sup>Als **Drehspiegelung** bezeichnet man eine lineare Transformation, die Orthonormalbasen stets in Orthonormalbasen überführt. Als **Drehung** bezeichnet man eine Drehspiegelung, die rechtshändige Basen stets in rechtshändige Basen überführt.

(*passive* Koordinatentransformation) ist gegeben durch<sup>3</sup>

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 x^j(t) \mathbf{e}_j &= \mathbf{x}_0(t) + \sum_{j=1}^3 x'^j(t) \mathbf{e}'_j(t) \\ \stackrel{(2.1)}{\iff} \begin{pmatrix} x'^1(t) \\ x'^2(t) \\ x'^3(t) \end{pmatrix} &= R(t) \begin{pmatrix} x^1(t) - x_0^1(t) \\ x^2(t) - x_0^2(t) \\ x^3(t) - x_0^3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}} \quad (2.4)$$

**Beweis:**

linke Seite von (2.4)

$$\begin{aligned} \iff \sum_{k=1}^3 (x^k - x_0^k) \mathbf{e}_k &= \sum_{j=1}^3 x'^j \mathbf{e}'_j \stackrel{(2.1)}{=} \sum_{j,k=1}^3 x'^j R_j^k \mathbf{e}_k \\ \iff x^k - x_0^k &= \sum_{j=1}^3 x'^j R_j^k \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \\ \stackrel{(2.3)}{\iff} x'^l &= \sum_{j=1}^3 x'^j \sum_{k=1}^3 R_j^k R_l^k = \sum_{k=1}^3 R_l^k (x^k - x_0^k) \quad \forall l \in \{1, 2, 3\} \\ \iff &\text{ rechte Seite von (2.4).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

|| Für einen körperfesten Punkt sind die Koordinaten  $x'^1(t), x'^2(t), x'^3(t)$  des momentanen Aufenthaltsortes bzgl. des körperfesten Systems zeitlich konstant.

Aus (2.4) folgt<sup>4</sup>

$$\boxed{\hat{D}_\varphi \sum_{j=1}^3 x^j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 x'^j \mathbf{e}'_j \iff \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = R_{-\varphi} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.} \quad (2.5)$$

(*aktive* Koordinatentransformation). Der  $j$ -te **Spaltenvektor** der Transformationsmatrix  $R_{-\varphi}$  stellt die Komponenten des Bildes von  $\mathbf{e}_j$  unter  $\hat{D}_\varphi$  bzgl.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dar.<sup>5</sup>

### 2.1.1.2 Infinitesimale Drehungen

Aufgrund von

$$R_{-(\tau+\Delta\tau)} \boldsymbol{\omega} = R_{-\Delta\tau} \boldsymbol{\omega} R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} R_{-\Delta\tau} \boldsymbol{\omega}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>3</sup>Hier geht die Orthonormalität der Basen wesentlich ein (vgl. Anhang A.1.3 der *Math. Meth. d. Phys.*).

<sup>4</sup>Man wende die inverse Drehung  $\hat{D}_{-\varphi}$  auf (2.5) an und vergleiche mit (2.4) für  $\mathbf{x}_0 = 0$ .

<sup>5</sup>Nach dem oben (zur Begründung von (2.3)) gesagten bedeutet das:  $R_{-\varphi} = (R_{+\varphi})^T$ .

sieht man leicht, daß

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = J_{\boldsymbol{\omega}} R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} J_{\boldsymbol{\omega}}} \quad (2.6)$$

mit

$$\boxed{J_{\boldsymbol{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{d}{d\tau} R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} \right) \Big|_{\tau=0}} \quad (2.7)$$

und somit<sup>6</sup>

$$\boxed{R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = \exp(\tau J_{\boldsymbol{\omega}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (\tau J_{\boldsymbol{\omega}})^{\nu}} \quad (2.8)$$

gilt. Man bezeichnet die Matrix  $J_{\boldsymbol{\omega}}$  als **Generator der** (Matrix der) **infinitesimalen Drehung**

$$R_{-\boldsymbol{\omega} d\tau} = \mathbb{1} + J_{\boldsymbol{\omega}} d\tau.$$

Entsprechend den Überlegungen zum Drehimpulssatz (Abschn. 1.2.2.4) folgt aus (2.5) und (2.7):

$$\boxed{J_{\boldsymbol{\omega}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 x^3 - \omega^3 x^2 \\ \omega^3 x^1 - \omega^1 x^3 \\ \omega^1 x^2 - \omega^2 x^1 \end{pmatrix}.} \quad (2.9)$$

Für  $J_{\boldsymbol{\omega}}$  ergibt sich daraus explizit

$$\boxed{J_{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^3 \omega^j \mathbf{e}_j} \quad (2.10)$$

und somit<sup>7</sup>

$$\boxed{J_{\boldsymbol{\omega}} = \omega^1 J_{\mathbf{e}_1} + \omega^2 J_{\mathbf{e}_2} + \omega^3 J_{\mathbf{e}_3}} \quad (2.11)$$

sowie

$$\begin{aligned} & [J_{\mathbf{e}_j}, J_{\mathbf{e}_k}] \stackrel{\text{def}}{=} J_{\mathbf{e}_j} J_{\mathbf{e}_k} - J_{\mathbf{e}_k} J_{\mathbf{e}_j} \\ & = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} J_{\mathbf{e}_l} \quad \text{für } j, k = 1, 2, 3, \\ & \text{wobei:} \\ & \epsilon_{jkl} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } (j, k, l) \text{ gerade Permut. v. } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (j, k, l) \text{ ungerade Permut. v. } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

<sup>6</sup> $R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = \exp(\tau J_{\boldsymbol{\omega}})$  ist die nach Kap. 5 von *Math. Meth. d. Phys.* eindeutige Lösung von (2.6) zur Anfangsbedingung  $R_{-\tau} \boldsymbol{\omega} = \mathbb{1}$ .

<sup>7</sup>Wir übernehmen (2.10) natürlich als Definition von  $J_{\boldsymbol{\omega}}$  für Vektoren  $\boldsymbol{\omega}$  beliebiger physikalischer Dimension.

Im Falle

$$\dot{R}(t) = J_{-\omega(t)} R(t)$$

setzt sich der momentane Bewegungszustand (zur Zeit  $t$ ) des starren Körpers offensichtlich zusammen aus

- einer Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$  und
- einer Rotationsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $|\omega(t)|$  im Rechtsschraubensinn um die Achse in Richtung von<sup>8</sup>

$$\omega'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega^1(t) \mathbf{e}'_1(t) + \omega^2(t) \mathbf{e}'_2(t) + \omega^3(t) \mathbf{e}'_3(t)$$

durch den Ursprung  $P'_0(t)$  des körperfesten Koordinatensystems.<sup>9</sup>

### 2.1.1.3 EULERSche Winkel

Der Vorteil der Schreibweise (2.1) beruht auf folgender Eigenschaft der  $R$ -Matrizen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}'_j = \hat{D}_{\tau_1 \omega_1} \mathbf{e}_j \\ \omega'_{\cdot 2} = \sum_{j=1}^3 (\omega_2 \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}'_j \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{D}_{\tau_2 \omega'_2} \hat{D}_{\tau_1 \omega_1} \mathbf{e}_1 \\ \hat{D}_{\tau_2 \omega'_2} \hat{D}_{\tau_1 \omega_1} \mathbf{e}_2 \\ \hat{D}_{\tau_2 \omega'_2} \hat{D}_{\tau_1 \omega_1} \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = R_{\tau_2 \omega_2} R_{\tau_1 \omega_1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Seien  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  und  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  beliebig vorgegebene (physikalisch dimensionslose) rechtshändige Orthonormalbasen des  $\mathbb{R}^3$ . Eine anschauliche Methode,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  überzuführen ergibt sich dann aus folgender Überlegung:

- Eine Basis  $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$  mit  $\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3$  läßt sich durch eine Rotation  $\hat{D}_{\psi \mathbf{e}''_3}$  mit geeignetem  $\psi$  in  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  überführen.
- Eine Basis  $\{\mathbf{e}'''_1, \mathbf{e}'''_2, \mathbf{e}'''_3\}$  mit  $\mathbf{e}'''_3 = \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{e}'''_1 \perp \mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_3$  läßt sich durch eine Rotation  $\hat{D}_{\vartheta \mathbf{e}'''_1}$  mit geeignetem  $\vartheta$  in eine Basis  $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$  gemäß a) überführen.
- Die Ausgangsbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  läßt sich durch eine Rotation  $\hat{D}_{\phi \mathbf{e}_3}$  mit geeignetem  $\phi$  in eine Basis  $\{\mathbf{e}'''_1, \mathbf{e}'''_2, \mathbf{e}'''_3\}$  gemäß b) überführen.

Version vom 26. März 2009

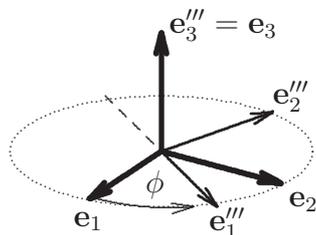
<sup>8</sup>Nach (2.10) gilt nämlich:

$$J_{-\omega(t)} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1(t) \\ \mathbf{e}'_2(t) \\ \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'(t) \times \mathbf{e}'_1(t) \\ \omega'(t) \times \mathbf{e}'_2(t) \\ \omega'(t) \times \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix}.$$

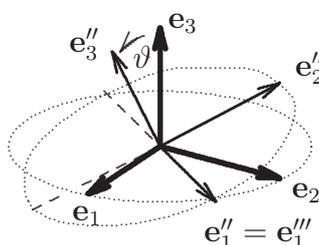
<sup>9</sup>Man sieht leicht, daß  $\omega(t)$  nicht von der speziellen Wahl des Ursprungs des körperfesten Systems abhängt.

Dementsprechend lassen sich die vorgegebenen Basen folgendermaßen durch drei Rotationen ineinander überführen:

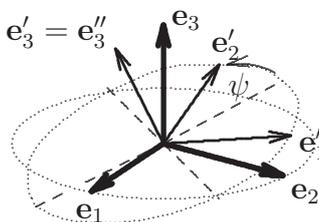
1. Rotation (um die 3-Achse):



2. Rotation (um die neue 1-Achse):



3. Rotation (um die neue 3-Achse):



Somit gilt:

$$\begin{array}{l} R(t) \text{ Drehmatrix} \\ \iff R(t) = R_{\psi(t)\mathbf{e}_3} R_{\vartheta(t)\mathbf{e}_1} R_{\phi(t)\mathbf{e}_3} \text{ für geeign. } \phi(t), \vartheta(t), \psi(t). \end{array} \quad (2.14)$$

Offensichtlich sind die sog. **EULERSchen Winkel**  $\phi(t), \vartheta(t), \psi(t)$  (lokal) gemeinsam mit den  $\mathbf{x}_0(t) \cdot \mathbf{e}_j$  als **generalisierte Koordinaten** geeignet.<sup>10</sup>

Da gemäß (2.6) und (2.11) allgemein

$$\frac{d}{dt} R_{\lambda(t)\mathbf{e}} = J_{-\dot{\lambda}(t)\mathbf{e}} R_{\lambda(t)\mathbf{e}}$$

<sup>10</sup>Bzgl. einer Verallgemeinerung der EULERSchen Winkel siehe (D'Alessandro, 2001).

gilt, folgt aus (2.14)

$$\dot{R} = J_{-\dot{\psi} \mathbf{e}_3} R + R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} R_{\vartheta \mathbf{e}_1} R_{\phi \mathbf{e}_3} + R_{\psi \mathbf{e}_3} R_{\vartheta \mathbf{e}_1} J_{-\dot{\phi} \mathbf{e}_3} R_{\phi \mathbf{e}_3}$$

und daraus wegen<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} R_{-\psi \mathbf{e}_3} &= J_{-\dot{\vartheta} \hat{D}_{-\psi \mathbf{e}_3} \mathbf{e}_1} \\ &= J_{-\dot{\vartheta} (\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2)}, \\ R_{\psi \mathbf{e}_3} R_{\vartheta \mathbf{e}_1} J_{-\dot{\phi} \mathbf{e}_3} R_{-\vartheta \mathbf{e}_1} R_{-\psi \mathbf{e}_3} &= J_{-\dot{\phi} \hat{D}_{-\psi \mathbf{e}_3} \hat{D}_{-\vartheta \mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3} \\ &= J_{-\dot{\phi} (\sin \vartheta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \vartheta \mathbf{e}_3)} \end{aligned}$$

unter Beachtung von (2.11):

(2.14)  $\implies \dot{R}(t) = J_{\boldsymbol{\omega}(t)} R(t)$   
 mit:  

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \sin \psi(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \psi(t) \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \cos \psi(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \psi(t) \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left( \dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \vartheta(t) \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

(2.15)

Es gilt also:<sup>12</sup>

(2.1) }  $\implies \dot{\mathbf{e}}'_j(t) = \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_j(t)$   
 (2.14) }  
 mit:  

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}'(t) &= \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \sin \psi(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \psi(t) \right) \mathbf{e}'_1(t) \\ &\quad + \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \cos \psi(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \psi(t) \right) \mathbf{e}'_2(t) \\ &\quad + \left( \dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \vartheta(t) \right) \mathbf{e}'_3(t). \end{aligned}$$

(2.16)

#### 2.1.1.4 CORIOLIS-Kraft<sup>13</sup>

(2.16) bestimmt den Zusammenhang zwischen tatsächlichen zeitlichen Änderungen und denjenigen, die bzgl. des körperfesten Systems in Erscheinung treten:

Mit der Definition

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}} \sum_{j=1}^3 G'^j(t) \mathbf{e}'_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d}{dt} G'^j(t) \right) \mathbf{e}'_j(t)$$

(2.17)

Version vom 26. März 2009

<sup>11</sup>Vgl. Übungsaufgabe 27 b).

<sup>12</sup>Vgl. Schluß von 2.1.1.2

<sup>13</sup>Siehe auch (Vandenbrouck et al., 2000).

folgt aus (2.16)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}} \mathbf{G}(t) + \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{G}(t) \quad (2.18)$$

und somit speziell für  $\mathbf{G}(t) = \boldsymbol{\omega}'(t)$ :

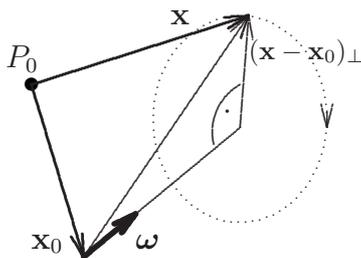
$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}'(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}} \boldsymbol{\omega}'(t). \quad (2.19)$$

Mit (2.19) folgt aus (2.18):

$$\ddot{\mathbf{G}} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}}^2 \mathbf{G} + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{G}) + 2\boldsymbol{\omega}' \times \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}} \mathbf{G} + \left( \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}' \right) \times \mathbf{G}.$$

Für  $\mathbf{G} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  ergibt sich damit als Nebenresultat die **Bewegungsgleichung eines Massenpunktes im körperfesten System:**<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}_{\text{ges}}(t) \\ \Rightarrow \begin{cases} m \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}}^2 (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \\ = (\mathbf{F}_{\text{ges}}(t) - m \ddot{\mathbf{x}}_0(t)) + \mathbf{Z}(t) + \mathbf{C}(t) + m (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \times \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}'(t) \end{cases} \\ \text{mit } \boldsymbol{\omega}'(t) &\text{ entspr. (2.16) und :} \\ \mathbf{Z}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} m |\boldsymbol{\omega}'(t)|^2 (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t))_{\perp} \quad \text{“Zentrifugalkraft” bzgl. } \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{C}(t) &= -2m \boldsymbol{\omega}'(t) \times \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{Körper}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \quad \text{CORIOLIS-Kraft.}^{15} \end{aligned} \quad (2.20)$$



Üblicherweise wird (2.20) nur für den Spezialfall  $\mathbf{x}_0(t) = 0 = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}'$  diskutiert.<sup>16</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>14</sup>Man beachte:  $\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{G}) = -|\boldsymbol{\omega}'|^2 \mathbf{G} + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{G}) \boldsymbol{\omega}'$ .

<sup>15</sup>Man beachte die Analogie von CORIOLIS- und LORENTZ-Kraft.

<sup>16</sup>Siehe z.B. (Goldstein, 1972, Abschn. 4-9).

## 2.1.2 Kinetische Energie

### 2.1.2.1 Drehimpuls

Allgemein gilt für ein System von  $N$  Massenpunkten:

Kinetische Energie  
 = Kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung  
 + Kinetische Energie der Relativbewegung bzgl. des Schwerpunktes ;

d.h.:

$$T = \frac{1}{2}M |\dot{\mathbf{X}}|^2 + \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{X}}|^2$$

wobei:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu = \text{Gesamtmasse},$$

$$\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{x}_\nu = \text{Ortsv. d. Schwerpunktes.}$$
(2.21)

**Beweis:**<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu|^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |(\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{X}}) + \dot{\mathbf{X}}|^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{X}}|^2 + \underbrace{\sum_{\nu=1}^N m_\nu (\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{X}}) \dot{\mathbf{X}}}_{=0} + \frac{1}{2}M |\dot{\mathbf{X}}|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sind die  $m_\nu$  einem starren Körper fest eingepreßt<sup>18</sup> und ist  $\mathbf{x}_0$  der Ortsvektor eines **körperfesten** Punktes  $P'_0$ , so gilt nach (2.15):<sup>19</sup>

$$\dot{\mathbf{x}}_\nu = \dot{\mathbf{x}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0). \quad (2.22)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}', t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \times (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t))) \quad \forall \boldsymbol{\omega}', t \quad (2.23)$$

<sup>17</sup>Vgl. Schluß von Abschnitt 3.4.4 der *Math. Meth. d. Phys.*

<sup>18</sup>Vgl. Modell des starren Körpers entspr. Beispiel (iii) von 1.1.1.1.

<sup>19</sup>Vgl. auch Schluß von 2.1.1.2.

gilt:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) = \begin{cases} \text{momentaner Gesamtdrehimpuls bzgl. } P'_0 \\ \text{im momentanen Ruhesystem von } P'_0, \\ \text{falls } \boldsymbol{\omega}'(t) = \begin{cases} \text{vektorielle Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{der momentanen Rotationsbewegung,} \end{cases} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$(2.22) \implies \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'(t) \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t). \quad (2.25)$$

**Beweis von (2.25):** Die Behauptung folgt direkt aus

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 &\stackrel{(2.22)}{=} \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} (\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{x}}_0) \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0)) \\ &\stackrel{\text{Zykl. d. Spatpr.}}{=} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \cdot \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0) \times m_\nu (\dot{\mathbf{x}}_\nu - \dot{\mathbf{x}}_0) \end{aligned}$$

mit (2.24). ■

Mit (2.21) folgt aus (2.25)

$$\begin{aligned} &\text{für starre Körper:} \\ T(t) &= \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 + \frac{\boldsymbol{\omega}'(t)}{2} \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t), \\ &\text{falls entweder } \mathbf{x}_0 = \mathbf{X} \text{ oder } \dot{\mathbf{x}}_0(t) = 0, \text{ wobei:} \\ &\boldsymbol{\omega}'(t) = \text{vektorielle Winkelgeschw. gem. (2.16)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.1.2.2 Trägheitstensor<sup>20</sup>

Nach (2.23) ist die  $t$ -abhängige Abbildung

$$(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \longrightarrow \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_2, t) \quad (2.27)$$

von  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^1$  bilinear, stellt also einen  $t$ -abhängigen Tensor 2. Stufe dar, den man als **Trägheitstensor** bezeichnet. Mit (2.23) folgt

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2) |\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)|^2 - \left( \boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \left( \boldsymbol{\omega}_2 \cdot (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \right) \quad (2.28)$$

und somit auch die Symmetrie des Trägheitstensors:

$$\boxed{\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \theta_t(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1)}. \quad (2.29)$$

**Beweis von (2.28):** Aufgrund der Zyklicität des Spatproduktes folgt aus (2.27) und (2.23)

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right)$$

und daraus folgt aufgrund der bekannten Formel

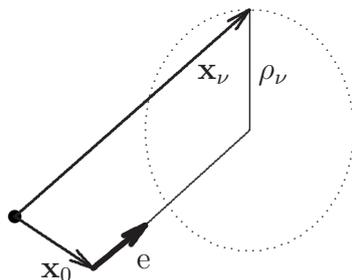
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

die Behauptung. ■

Für beliebiges  $\mathbf{e}$  mit  $|\mathbf{e}| = 1$  bezeichnet man

$$\theta_t(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \stackrel{(2.28)}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( |\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)|^2 - \left| \mathbf{e} \cdot (\mathbf{x}_\nu(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right|^2 \right)$$

als das **Trägheitsmoment** bzgl. der Achse durch  $\mathbf{x}_0(t)$  in Richtung  $\mathbf{e}$ :



$$\rho_\nu = \sqrt{|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0|^2 - |\mathbf{e} \cdot (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0)|^2}$$

Für eine beliebig vorgegebene Basis  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  bezeichnet man die  $3 \times 3$  Größen

$$\boxed{\theta_{jk}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_t(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k)} \quad (2.30)$$

als die **kovarianten Komponenten** von  $\theta_t(\cdot, \cdot)$  bzgl. dieser Basis; denn bei Basiswechsel gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_j &= \sum_{k=1}^3 M_j^k \mathbf{b}_k \\ \stackrel{(2.30)}{\implies} \theta'_{jk} &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_t(\mathbf{b}'_j, \mathbf{b}'_k) \stackrel{\text{Bilin.}}{=} \sum_{r,s=1}^3 M_j^r M_k^s \theta_{rs}(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nach (2.29) gilt grundsätzlich

$$\theta_{jk}(t) = \theta_{kj}(t). \quad (2.32)$$

Wählt man zweckmäßigerweise für  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  in (2.30) die zeitabhängige **körperfeste Basis**  $\{\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)\}$ , so sind die  $\theta_{jk}$  **zeitunabhängig** und es gilt:<sup>21</sup>

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{j,k=1}^3 \theta_{jk}(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{e}'_j(t)) (\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{e}'_k(t)). \quad (2.33)$$

Aufgrund der Symmetrie der (2.32) läßt sich zeigen, daß

$$\theta_{jk} = 0 \quad \text{für } j \neq k \\ \text{bei geeigneter Wahl der } \mathbf{e}'_j(t) \quad (2.34)$$

gilt (siehe z.B. Folgerung 7.3.19 von (Lücke, eine)). Sind die  $\mathbf{e}'_j(t)$  im Sinne von (2.34) geeignet gewählt, dann bezeichnet man die

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{jj} = \theta_t(\mathbf{e}'_j(t), \mathbf{e}'_j(t))$$

als **Hauptträgheitsmomente** bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  und die Achsen in Richtung der  $\mathbf{e}'_j(t)$  durch  $\mathbf{x}_0(t)$  als **Hauptträgheitsachsen** bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$ .

### 2.1.2.3 Abhängigkeit der kinetischen Energie von den EULERSchen Winkelfunktionen

Für ausgedehnte Körper definiert man den Trägheitstensor bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  entspr. (2.28) durch

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\text{Körper}} \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|^2 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))) (\boldsymbol{\omega}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

wobei:  $\mu(\mathbf{x}, t) = \text{Massendichte.}$

(2.35)

Entspr. (2.27) gilt dann

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}'(t)) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) \quad \text{für bel. } \boldsymbol{\omega}_1,$$

mit  $\boldsymbol{\omega}'(t), \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t)$  entspr. (2.24)

(2.36)

<sup>21</sup>Aufgrund der Orthonormalität dieser Basis.

und somit nach (2.26)

**Für starre Körper:**

$$T(t) = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 + \frac{1}{2} \theta_t (\boldsymbol{\omega}'(t), \boldsymbol{\omega}'(t)) , \quad (2.37)$$

**falls** entweder  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}$  oder  $\dot{\mathbf{x}}_0 = 0$ .

Natürlich sind auch beim starren Körper die Komponenten von  $\theta_t$  bzgl. der körperfesten Basis  $\{\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)\}$  zeitunabhängig und erfüllen (2.34). Mit (2.16), (2.33) und (2.34) folgt daraus

**Für starre Körper mit Hauptträgheitsachsen bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  in Richtung der  $\mathbf{e}'_j(t)$  :**

$$T = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \theta_j |\omega^j|^2 , \quad (2.38)$$

**falls** entweder  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}$  oder  $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = 0$ ,

mit:

$$\begin{aligned} \omega^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi , \\ \omega^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi , \\ \omega^3 &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Natürlich bezeichnen die  $\theta_j$  in (2.38) wieder die entsprechenden **zeitabhängigen** Hauptträgheitsmomente.<sup>22</sup>

Falls der Körper rotationssymmetrisch bzgl. der Achse in Richtung  $\mathbf{e}'_3(t)$  durch  $\mathbf{x}_0(t)$  ist, vereinfacht sich (2.38) wegen

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 \\ \implies T &= \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0|^2 + \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} \theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta)^2 , \end{aligned} \quad (2.40)$$

unter den Voraussetzungen von (2.38).

## 2.2 Einfache Kreiselgesetze

### 2.2.1 ‘Kräftefreier’ Kreisel

‘Kräftefreier’ Kreisel

Version vom 26. März 2009

<sup>22</sup> $T$  = kinetische Energie,  $M$  = Gesamtmasse,  $\mathbf{X}$  = Ortsvektor des Schwerpunktes,  $\mathbf{x}_0$  = Ortsvektor des Ursprungs des körperfesten Systems;  $\phi, \vartheta, \psi$  EULERSche Winkel der Hauptachsen bzgl. der raumfesten Basis.

**Verabredung:** Der Ursprung des körperfesten Systems stimme entweder mit dem Kreisel­schwerpunkt überein oder werde in Ruhe gehalten (oder beides). Die  $\mathbf{e}'_j(t)$  zeigen in Richtung der Hauptachsen.

### 2.2.1.1 EULERSche Gleichungen

Nach (2.38) gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} T - \frac{\partial}{\partial \psi} T = \theta_3 \dot{\omega}^3 - (\theta_1 - \theta_2) \omega^1 \omega^2. \quad (2.41)$$

Zunächst lassen wir noch eingeprägte Kräfte zu und berechnen die entsprechende verallgemeinerte Kraft für das Punktsystem-Modell des starren Körpers :

$$\begin{aligned} Q_\psi^e & \stackrel{(1.44)}{=} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^e \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\mathbf{x}_\nu - \underbrace{\mathbf{x}_0}_{\psi\text{-unabh.}}) \\ & \stackrel{(2.4), (2.14)}{=} \sum_{\nu=1}^N \sum_{j=1}^3 x_\nu'^j \mathbf{F}_\nu^e \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \psi} \mathbf{e}'_j(\phi, \vartheta, \psi)}_{\stackrel{(2.16)}{=} \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_j} \\ & = \left( \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_\nu^e \right) \cdot \mathbf{e}'_3 \\ & = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}'_3, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{M}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe aller durch } \mathbf{eingep\ddot{r}agte} \text{ Kräfte erzeugter} \\ \text{momentaner Drehmomente bzgl. } \mathbf{x}_0(t). \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Damit ergibt sich für die LAGRANGE-Gleichungen II. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} T - \frac{\partial}{\partial \psi} T \stackrel{(1.52)}{=} Q_\psi^e$$

gemäß (2.41):

$$\theta_3 \dot{\omega}^3 - (\theta_1 - \theta_2) \omega^1 \omega^2 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}'_3.$$

Diese Gleichung wird man natürlich auch für den kontinuierlichen starren Körper annehmen. Da die Numerierung der  $\mathbf{e}'_j(t)$  (bis auf Rechtshändigkeit) willkürlich ist, folgen die

**EULERSchen Gleichungen:**

$$\theta_j \dot{\omega}^j(t) - (\theta_k - \theta_l) \omega^k(t) \omega^l(t) = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t), \quad (2.43)$$

**falls**  $(j, k, l)$  gerade Permutation von 1, 2, 3.

**Anmerkungen:** Mithilfe von (2.18), (2.34) und (2.36) sieht man leicht,<sup>23</sup> daß die linke Seite von (2.43) mit  $\mathbf{e}'_j(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t)$  übereinstimmt.<sup>24</sup>

Für den **‘kräftefreien’ Kreis** nehmen die EULERSchen Gleichungen (2.43) die Form

$$\begin{cases} \theta_1 \dot{\omega}^1 = (\theta_2 - \theta_3) \omega^2 \omega^3, \\ \theta_2 \dot{\omega}^2 = (\theta_3 - \theta_1) \omega^3 \omega^1, \\ \theta_3 \dot{\omega}^3 = (\theta_1 - \theta_2) \omega^1 \omega^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

an.

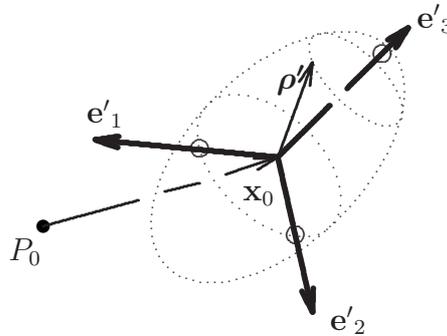
**Anmerkung:** ‘Kräftefrei’ meint hier nur, daß die Vektorsumme aller Drehmomente, die die eingepägten Kräfte bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  erzeugen, Null ist. Das ist natürlich wichtig für die Verwendbarkeit eines geeignet gelagerten Kreisels als Kompaß.

### 2.2.1.2 POINSONSche Konstruktion

Die  $t$ -abhängige Fläche<sup>25</sup>

$$\{\mathbf{x}_0(t) + \boldsymbol{\rho}' : [\theta_t(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}')] = 1\}$$

bezeichnet man als **Trägheitsellipsoid** bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$ :



Aus

$$\boldsymbol{\rho}' = \sum_{j=1}^3 \rho^j \mathbf{e}'_j \quad \xRightarrow{(2.33), (2.34)} \quad \theta_t(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}') = \sum_{j=1}^3 \theta_j |\rho^j|^2$$

Version vom 26. März 2009

<sup>23</sup>Siehe Übungsaufgabe 29.

<sup>24</sup>Die momentane vektorielle Winkelgeschwindigkeit ist nach (2.16)  $\boldsymbol{\omega}'(t) = \sum_{j=1}^3 \omega^j(t) \mathbf{e}'_j(t)$ .

<sup>25</sup>Mit  $[A]$  bezeichnen wir stets die Maßzahl einer physikalischen Größe. Das Trägheitsellipsoid hängt also von der Wahl der Einheiten ab.

folgt

$$\nabla_{\rho'} \theta_t(\rho', \rho') = \sum_{j=1}^3 2 \theta_j \rho^j \mathbf{e}'_j(t)$$

und somit<sup>26</sup> nach (2.36):

$$\mathbf{L}(t) \sim \nabla_{\rho'} \theta_t(\rho', \rho')|_{\rho'=\text{Längeneinh.}} \left[ \frac{-\boldsymbol{\omega}'(t)}{\sqrt{\theta_t(\boldsymbol{\omega}'(t), \boldsymbol{\omega}'(t))}} \right]. \quad (2.45)$$

**Geometrische Deutung:** Die Tangentialebene des Trägheitsellipsoids an den Punkt, in dem die momentane Drehachse von  $\mathbf{x}_0(t)$  aus in Richtung von  $-\boldsymbol{\omega}'(t)$  durch die Ellipsoidfläche tritt, ist senkrecht zu  $\mathbf{L}(t)$ .

**Folgerung:** Die Richtungen von  $\mathbf{L}(t)$  und  $\boldsymbol{\omega}'(t)$  stimmen genau dann überein, wenn  $\boldsymbol{\omega}'(t)$  in Richtung einer Hauptträgheitsachse zeigt (oder Null ist).

Der Abstand o.a. Tangentialebene zu  $\mathbf{x}_0(t)$  ist — von der physikalischen Dimension abgesehen — somit

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\omega}'(t)}{\sqrt{\theta_t(\boldsymbol{\omega}'(t), \boldsymbol{\omega}'(t))}} \cdot \frac{\mathbf{L}(t)}{|\mathbf{L}(t)|} &\stackrel{(2.36)}{=} \frac{\sqrt{\theta_t(\boldsymbol{\omega}'(t), \boldsymbol{\omega}'(t))}}{|\mathbf{L}(t)|} \\ &\stackrel{(2.37)}{=} \frac{\sqrt{2T(t) - M |\dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2}}{|\mathbf{L}(t)|} \end{aligned}$$

und folglich (gemäß o.a. Verabredung) für den **kräftefreien** Kreisel zeitlich konstant.<sup>27</sup> Daher bezeichnet man diese Ebene als **invariable Ebene**.

Das Trägheitsellipsoid rollt<sup>28</sup> (im Ruhesystem von  $P'_0$ ) auf der invariablen Ebene ab. Die momentane Drehachse geht also durch  $\mathbf{x}_0(t)$  und den Berührungspunkt des Ellipsoids auf der invariablen Ebene. Die Kurve, die dieser Berührungspunkt auf dem Ellipsoid beschreibt, bezeichnet man als **Polhodie** (Polkurve), diejenige, die er auf der invarianten Ebene beschreibt, als **Herpolhodie** (Spurkurve).

Eine für den **symmetrischen Kreisel** ( $\theta_1 = \theta_2$ ) äquivalente Beschreibung ist das in Abbildung 2.1 dargestellte Abrollen des **Polkegels** auf dem **Spurkegel**,

Version vom 26. März 2009

<sup>26</sup>In Erweiterung von Fußnote 25 benutzen wir die Notation  $[\mathbf{a}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a}}{\text{Einh. v. } \mathbf{a}}$  für Vektoren  $\mathbf{a} \neq 0$ .

Der Punkt mit dem Ortsvektor  $\rho' = \text{Längeneinh.} \left[ \frac{\boldsymbol{\omega}'(t)}{\sqrt{\theta_t(\boldsymbol{\omega}'(t), \boldsymbol{\omega}'(t))}} \right]$  liegt somit offensichtlich auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids.

<sup>27</sup>Man beachte die Anmerkung zu (2.43) und die Erhaltungssätze gemäß Abschnitt 1.2.2.4.

<sup>28</sup>Ein Körper **rollt** auf einer Fläche, wenn der Körperpunkt, der die Fläche berührt, jeweils die Momentangeschwindigkeit 0 hat.

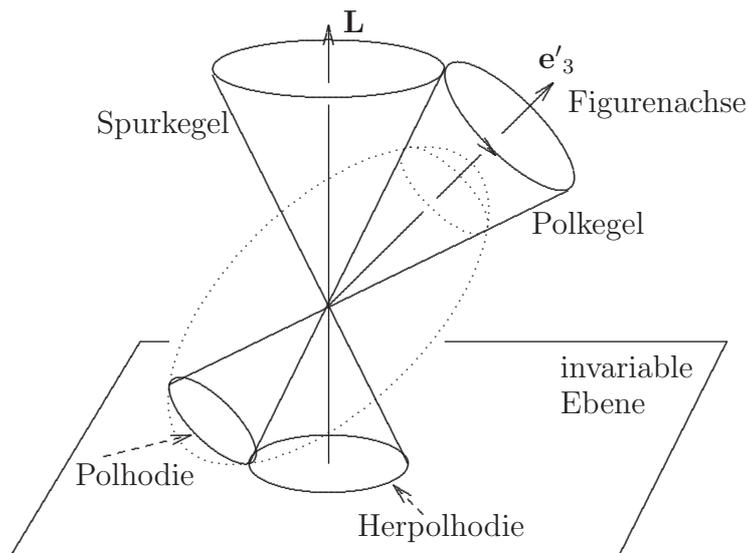


Abb. 2.1: POINSO'sche Konstruktion für kräftefreie Kreisel mit  $\theta_1 = \theta_2 > \theta_3$

wobei die Figurenachse auf dem sog. *Nutationskegel* (nicht gezeichnet) um die Drehimpulsachse präzessiert.

#### Warnungen:

- (i) Abb. 2.1 entspricht dem Falle  $\theta_1 = \theta_2 > \theta_3$  (abgeplatteter Kreisel). Im Falle  $\theta_1 = \theta_2 < \theta_3$  (gestreckter Kreisel) liegt die Polhodie so, daß der Polkegel mit seiner Innenseite auf dem Spurkegel abrollt.<sup>29</sup>
- (ii) Im Falle  $\theta_1 \neq \theta_2$  ist die Geometrie des Abrollvorganges wesentlich komplizierter.<sup>30</sup> I.a. ist die Herpolhodie dann **keine** geschlossene Kurve mehr.

Allgemein legt die POINSO'sche Konstruktion die Geometrie der Kreiselbewegung (relativ zu  $\mathbf{x}_0$ ) fest. Die Abrollgeschwindigkeit ist so einzurichten, daß  $\mathbf{L}$  stets den vorgegebenen Wert beibehält.

#### 2.2.1.3 Analytische Lösung der EULERSchen Gleichungen für den symmetrischen 'kräftefreien' Kreisel

Für einen rotationssymmetrischen Kreisel gilt

$$\theta_1 = \theta_2$$

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Siehe z.B. (Pohl, 1962, Abb. 144).

<sup>30</sup>Siehe z.B. (Landau und Lifschitz, 1964, § 37).

(bei entspr. Numerierung der  $\mathbf{e}'_l$ ). Gemäß (2.44) folgt daraus

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^1 &= \Omega \omega^2, \\ \dot{\omega}^2 &= -\Omega \omega^1, \\ \dot{\omega}^3 &= 0\end{aligned}$$

mit:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} \omega^3. \quad (2.46)$$

Somit gilt

<p><b>Für geeign. <math>A, t_0</math> :</b></p> $\begin{aligned}\omega^1(t) &= A \sin(\Omega(t - t_0)), \\ \omega^2(t) &= A \cos(\Omega(t - t_0)), \\ \omega^3(t) &= \text{const.}\end{aligned}$	(2.47)
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

Die momentane Drehachse präzessiert also **im körperfesten System** mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  um die Figurenachse,<sup>31</sup> wenn nicht ausgerechnet  $A = 0$ .

Es sei nur der nichttriviale Fall

$$A \neq 0 \quad (2.48)$$

betrachtet. Da  $\dot{\mathbf{L}} = 0$ ,<sup>32</sup> läßt sich  $\mathbf{e}_3$  parallel zu  $\mathbf{L}$  wählen:

$$\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{L}. \quad (2.49)$$

Gemäß POINSONScher Konstruktion folgt daraus

$$\vartheta = \text{const.}$$

**Abstrakter Beweis:** Bei geeigneter Wahl der Konstanten  $C$  gilt

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= C \mathbf{e}'_3(t) \cdot \mathbf{L} \\ &\stackrel{(2.36)}{=} C \theta_i (\mathbf{e}'_3(t), \boldsymbol{\omega}'(t)) \\ &\stackrel{(2.33), (2.34)}{=} C \omega^3 \theta_3 \\ &\stackrel{(2.47)}{=} \text{const.}\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

<sup>31</sup>Für **negatives**  $\Omega$  im Rechtsschraubensinn um  $\mathbf{e}'_3$ .

<sup>32</sup>Vgl. Anmerkung zu (2.43).

Mit (2.39) und (2.47) ergeben sich daraus folgende drei Gleichungen:

$$\dot{\phi}(t) \sin \vartheta \sin \psi(t) = A \sin(\Omega(t - t_0)), \quad (2.50)$$

$$\dot{\phi}(t) \sin \vartheta \cos \psi(t) = A \cos(\Omega(t - t_0)), \quad (2.51)$$

$$\dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \vartheta = \omega^3 = \text{const.} \quad (2.52)$$

Dank  $\theta_1 = \theta_2$  läßt sich o.B.d.A. annehmen, daß (bei geeigneter Wahl von  $\mathbf{e}'_1$ )

$$\psi(0) = 0 \quad (2.53)$$

und somit gemäß POINLOTScher Konstruktion sowie (2.47) die Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(t) &= \Omega t, \\ \Omega t_0 &= 0 \pmod{2\pi}. \end{aligned}} \quad (2.54)$$

gelten.

**Abstrakter Beweis für (2.54):** Aus

$$\tan \psi(t) \stackrel{(2.48),(2.50),(2.51)}{=} \tan(\Omega(t - t_0))$$

und (2.53) folgt

$$\psi(t) = \Omega t$$

und

$$\Omega t_0 = n\pi \quad \text{für geeignetes ganzes } n.$$

Ungerades  $n$  ist aber mit (2.48)/(2.50) nicht verträglich. ■

Ebenfalls o.B.d.A. läßt sich annehmen, daß (bei geeigneter Wahl von  $\mathbf{e}_1$ )

$$\phi(0) = 0 \quad (2.55)$$

gilt, woraus mit (2.52) und (2.54)

$$\boxed{\phi(t) = \frac{\omega^3 \theta_3}{\theta_1 \cos \vartheta} t} \quad (2.56)$$

folgt.<sup>33</sup> Mit (2.51) und (2.54) folgt daraus schließlich:

$$\boxed{\vartheta = \arctan \frac{A \theta_1}{\omega^3 \theta_3} = \text{const.} \in [0, \pi).} \quad (2.57)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>33</sup>Man beachte:  $\omega^3 - \Omega \stackrel{(2.46)}{=} \frac{\omega^3 \theta_3}{\theta_1}$ .

**Resultat:** Unter Voraussetzung der Konventionen (2.49), (2.53) und (2.55) sind die EULERSchen Winkelfunktionen gegeben durch (2.54), (2.56) und (2.57) mit  $\Omega$  entspr. (2.46). Die Werte für  $\omega^3$  — somit auch für  $\Omega$  — und für  $A$  sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt, sobald man sich für eine bestimmte Orientierung der 3-Achsen (raumfest/körperfest) entschieden hat. Gemäß (2.57) bestimmt dann die Orientierung von  $\mathbf{e}_3$  das Vorzeichen von  $A$ .<sup>34</sup>

## 2.2.2 Der schwere symmetrische Kreisel<sup>35</sup>

**Verabredung:** Alle Bezeichnungen von Abschn. 2.1 seien beibehalten. Die  $\mathbf{e}'_j$  zeigen in Richtung der Hauptträgheitsachsen bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$ . Der körperfeste Bezugspunkt  $P'_0$  sei (bei einem frei drehbarem Körper) am raumfesten Bezugspunkt  $\mathbf{x}_0$  fixiert:

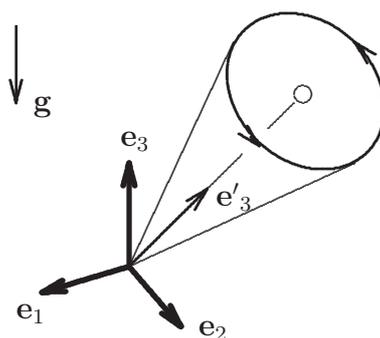
$$\mathbf{x}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Auf den betrachteten starren Körper der Masse  $M$  wirke die vom Schwerfeld  $\mathbf{g}$  hervorgerufene Schwerkraft, sonst keine weiteren eingepprägten Kräfte. Dieser *schwere Kreisel* sei symmetrisch, d.h.

$$\theta_1 = \theta_2,$$

und es gelte o.B.d.A.:

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{X}(t) = l \mathbf{e}'_3(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Version vom 26. März 2009

<sup>34</sup>Die Orientierung von  $\mathbf{e}'_3$  bestimmt das Vorzeichen von  $\omega^3$ .

<sup>35</sup>Siehe auch (Walker, 1981).

### 2.2.2.1 Anwendung der LAGRANGE-Methode

Die folgende Anwendung der LAGRANGE-Methode läßt sich wie in Abschnitt 2.2.1 über das Punktsystem-Modell des starren Körpers rechtfertigen.

Entsprechend obiger Vereinbarung ist

$$U = Mgl \cos \vartheta$$

ein geeignetes Potential und nach (2.40) gilt

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{1}{2} \theta_3 \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta \right)^2 .$$

Die entspr. LAGRANGE-Funktion

$$L \stackrel{(1.55)}{=} \frac{1}{2} \theta_1 \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{1}{2} \theta_3 \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta \right)^2 - Mgl \cos \vartheta$$

hängt also nicht von  $\phi$  und  $\psi$  ab; d.h.  $\phi$  und  $\psi$  sind zyklisch. Da die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\phi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$  durch die Nebenbedingungen in keiner Weise eingeschränkt sind, folgt daraus nach (1.60)/(1.61)

$$p_\psi = \theta_3 \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta \right) \stackrel{(2.39)}{=} \theta_3 \omega^3 \quad \text{zeitlich konstant}^{36} \quad (2.58)$$

und<sup>37</sup>

$$p_\phi = \left( \theta_1 \sin^2 \vartheta + \theta_3 \cos^2 \vartheta \right) \dot{\phi} + \theta_3 \dot{\psi} \cos \vartheta \quad \text{zeitlich konstant} . \quad (2.59)$$

Anstelle der 3. LAGRANGE-Gleichung II. Art (1.59) verwendet man hier besser den Energiesatz

$$H = \frac{\theta_1}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{\theta_3}{2} (\omega^3)^2 + Mgl \cos \vartheta \quad \text{zeitlich konstant} . \quad (2.60)$$

(Abschn. 1.2.2.4), dessen Voraussetzungen offensichtlich erfüllt sind.

Die drei Erhaltungssätze (2.58)–(2.60) stellen ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die drei EULERSchen Winkelfunktionen dar, das es zu lösen gilt.

---

Version vom 26. März 2009

<sup>36</sup>Wegen  $p_\psi \stackrel{(2.39)}{=} \theta_3 \omega^3 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}'_3$  läßt sich das mit (2.43) (für  $j = 3$ ) natürlich auch direkt aus der Tatsache schließen, daß das entsprechende Gesamtdrehmoment senkrecht zu  $\mathbf{e}'_3$  ist.

<sup>37</sup>Man beachte, daß  $p_\phi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3$  (siehe Übungsaufgabe 30).

### 2.2.2.2 Integration der Bewegungsgleichungen

Aus

$$\dot{\psi} \stackrel{(2.58)}{=} \frac{p_\psi}{\theta_3} - \dot{\phi} \cos \vartheta \quad (2.61)$$

folgt mit (2.59)

$$p_\phi = \theta_1 \sin^2 \vartheta \dot{\phi} + p_\psi \cos \vartheta$$

und somit

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta}. \quad (2.62)$$

Es ist also nur noch  $\vartheta(t)$  in Abhängigkeit von den Anfangswerten zu bestimmen:

Aus (2.60) und (2.62) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2\theta_1 \sin^2 \vartheta} + Mgl \cos \vartheta \\ &= H - \frac{\theta_3}{2} (\omega_3)^2 \stackrel{(2.58)}{=} H - \frac{(p_\psi)^2}{2\theta_3} \end{aligned}$$

und daraus nach Multiplikation mit  $\frac{2}{\theta_1} \sin^2 \vartheta$

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (2.63)$$

wobei:

$$\begin{aligned} u(t) & \stackrel{\text{def}}{=} \cos \vartheta(t), \\ \alpha & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2H}{\theta_1} - \frac{\theta_1}{\theta_3} \left( \frac{p_\psi}{\theta_1} \right)^2, \\ \beta & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2Mgl}{\theta_1}, \\ f(u) & \stackrel{\text{def}}{=} (1 - u^2) (\alpha - \beta u) - \left( \frac{p_\phi - p_\psi u}{\theta_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Falls  $\dot{u}$  nicht für alle Zeiten verschwindet, folgt aus (2.63) unmittelbar<sup>38</sup>

$$t - t_0 = \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (2.65)$$

für alle  $t \in (t_0, t'_0)$ , wenn  $u(t)$  über  $(t_0, t'_0)$  streng monoton ist. (2.65) liefert  $t$  abschnittsweise in Abhängigkeit von  $\vartheta$ . Abschnittsweise Umkehrung dieser Zuordnung liefert dann das gesuchte  $\vartheta(t)$ .

<sup>38</sup>Das Vorzeichen der Wurzel ist entsprechend anzupassen!

### 2.2.2.3 Geometrische Interpretation<sup>39</sup>

Da das Verhalten von  $f(u)$  für  $|u| \rightarrow \infty$  von  $\beta u^3$  dominiert wird, gilt

$$f(u) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } u \rightarrow +\infty, \\ -\infty & \text{für } u \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

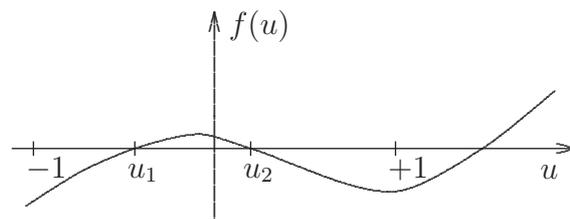
Es sei nur der Fall

$$|p_\phi| \neq p_\psi \neq 0$$

betrachtet. Dann gilt zusätzlich

$$|u| = 1 \implies f(u) < 0.$$

$f(u)$  hat als Polynom dritten Grades also qualitativ folgenden Verlauf:<sup>40</sup>



Da  $f(u)$  für die Kreisbewegung nach (2.63) nicht negativ sein kann und nach (2.64)  $u \in [-1, +1]$  sein muß, ist der Bewegungsablauf durch die Bedingung

$$u_1 \leq u \leq u_2$$

eingeschränkt. Da nach (2.63)

$$\dot{u}(t) = 0 \quad \text{nur für } t \text{ mit } f(u(t)) = 0$$

gelten kann und außerdem<sup>41</sup>

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \neq u_2, \\ f(u) = 0 \end{array} \right\} \implies 0 \neq \frac{1}{2} f'(u) \stackrel{(2.63)}{=} \ddot{u}$$

folgt, muß also  $u(t)$  im Laufe der Zeit periodisch das Zeitintervall  $[u_1, u_2]$  durchlaufen.

#### 1. Fall:

$$u_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_\phi}{p_\psi} \in (u_1, u_2).$$

Nach (2.62) ist hier

$$\dot{\phi}(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } u_0 > u, \\ < 0 & \text{für } u_0 < u. \end{cases}$$

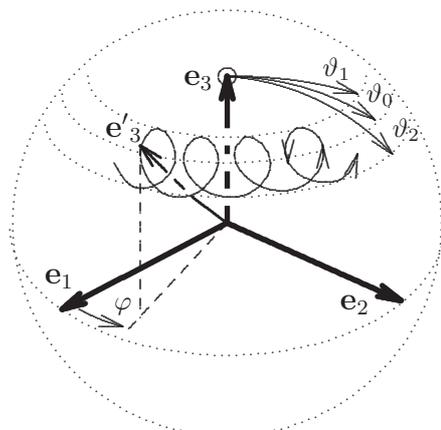
Version vom 26. März 2009

<sup>39</sup>Vgl. (Goldstein, 1972, Abschn. 5-7).

<sup>40</sup>Von  $u_1$  und  $u_2$  wissen wir allerdings nur, daß  $-1 < u_1 \leq u_2 < +1$ . Ihre Existenz folgt aus (2.63).

<sup>41</sup>Ableitung von (2.63) nach  $t$  liefert  $2\ddot{u}\dot{u} = \dot{u}f'(u)$  und somit  $\ddot{u} = \frac{1}{2}f'(u)$  zunächst für  $\dot{u} \neq 0$ .

Die Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{e}'_3(t)$  läßt sich also wie folgt skizzieren:<sup>42</sup>

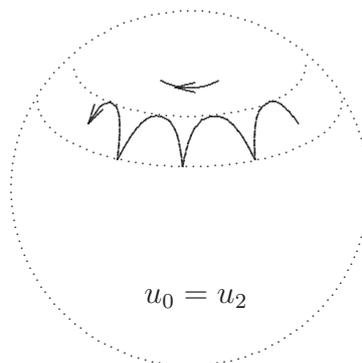
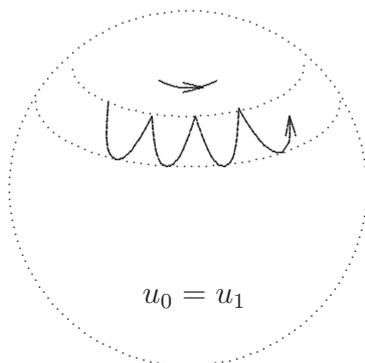


$$\vartheta_j = \arccos u_j,$$

$$\varphi = \bar{\phi} - \frac{\pi}{2},$$

$$\text{hier: } \bar{\phi} > 0.$$

In den Grenzfällen  $u_0 = u_1$  bzw.  $u_0 = u_2$  ändert  $\dot{\phi}$  nicht mehr das Vorzeichen und die Schleifen entarten zu Spitzen bei  $u = u_1$  bzw.  $u = u_2$ :



bzw.

## 2. Fall:

$$\frac{p_\phi}{p_\psi} \notin [u_1, u_2].$$

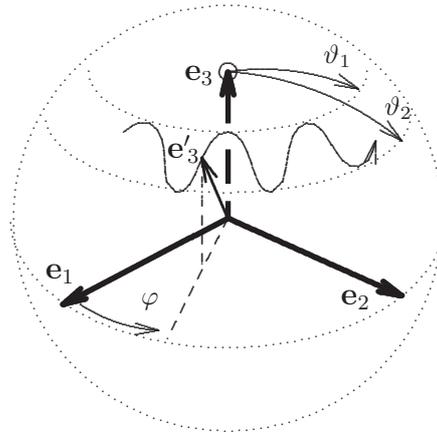
Hier folgt aus (2.62)

$$\dot{\phi}(t) \neq 0 \quad \forall t,$$

das Vorzeichen von  $\dot{\phi}$  ist also zeitlich konstant. Die Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{e}'_3(t)$  läßt

<sup>42</sup>Hier meint  $\bar{\phi}$  den zeitlichen Mittelwert von  $\dot{\phi}$ .

sich also wie folgt skizzieren:





# Kapitel 3

## Mathematische Weiterentwicklung

### Vereinbarungen:

- (i) Im folgenden seien nur noch (holonome) Systeme betrachtet, die die Voraussetzungen von Abschnitt 1.2.2.4 erfüllen. Es existieren also (jeweils lokal) **unabhängige** generalisierte Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$  ( $n = \text{Zahl der Freiheitsgrade}$ ) und die verallgemeinerten eingepprägten Kräfte  $Q_\nu^e$  ergeben sich entsprechend (1.54) aus einem verallgemeinerten Potential  $U$ .
- (ii) Im folgenden wird i.d. Regel folgende Kurzschrift verwendet:

$$\begin{aligned} x &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) & , & \quad \dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) , \\ q &\stackrel{\text{def}}{=} (q^1, \dots, q^n) & , & \quad \dot{q} \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) . \end{aligned}$$

## 3.1 HAMILTON-THEORIE

### 3.1.1 Das HAMILTON-Prinzip

#### 3.1.1.1 Das Prinzip

Um das HAMILTON-Prinzip global formulieren zu können, verwenden wir zunächst karthesische Koordinaten.

Je zwei Zeitpunkten  $t_1, t_2$  sei durch

$$W_{t_1, t_2}(x(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \tag{3.1}$$

eine Abbildung von der Menge der erlaubten Bewegungen (1.1) in den  $\mathbb{R}^1$  zugeordnet. Dieses Funktional bezeichnet man als das **Wirkungsintegral** (über dem Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ ).

Dann lautet das sog. HAMILTON-*Prinzip*:

Eine erlaubte (hinreichend gutartige) Bewegung (1.1) entspricht genau dann der durch  $L$  gegebenen Dynamik, wenn<sup>1</sup>

$$\left( \frac{d}{ds} W_{t_1, t_2} (x(\cdot, s)) \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad (3.2)$$

für alle erlaubten<sup>2</sup> (und hinreichend gutartig von  $s$  abhängigen) **Variationen**

$$\left( (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)), t_1, t_2 \right) \mapsto \left( (\mathbf{x}_1(t, s), \dots, \mathbf{x}_N(t, s)), t_1, t_2 \right) \quad (3.3)$$

der Bewegung mit

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_\nu(t_1, s) &= \mathbf{x}_\nu(t_1) \\ \mathbf{x}_\nu(t_2, s) &= \mathbf{x}_\nu(t_2) \end{aligned} \right\} \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}, s \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}_\nu(t, 0) = \mathbf{x}_\nu(t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}, t \in [t_1, t_2]$$

gilt.

#### Anmerkungen:

- (i) Im Falle (3.2) sagt man, das Wirkungsintegral sei für die Bewegung  $(x(t, 0), t_1, t_2)$  **stationär**, weil sich der Funktionalwert bei einer Variation dieser Bewegung in erster Näherung (für kleine  $s$ ) nicht ändert.
- (ii) Im allgemeinen gibt es zu vorgegebenen  $x(t_1), x(t_2)$  mehrere Bewegungen (1.1), die (3.2) für alle Variationen (3.3) mit (3.4) erfüllen.
- (iii) Sei  $f(q, t)$  hinreichend gutartig. Dann hat die Addition der — vor (1.45) definierten — **totalen zeitlichen Ableitung**  $\dot{f}(q, \dot{q}, t)$  zur LAGRANGE-Funktion offenbar keine Bedeutung für das Variationsprinzip — im Einklang mit Anmerkung (i) von 1.2.2.3.

**Beispiel:** Für ein 1-Teilchen-System, auf das keine eingepprägten Kräfte wirken, gilt

$$L = T = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 .$$

<sup>1</sup>Wir schreiben auch abkürzend  $x(t, s)$  für  $(\mathbf{x}_1(t, s), \dots, \mathbf{x}_N(t, s))$ .

<sup>2</sup>Für jedes feste  $s$  soll also auch die rechte Seite von (3.3) eine erlaubte Bewegung sein.

Für dafür tatsächlich mögliche Bewegungen (1.1) muß nach dem HAMILTON-Prinzip also

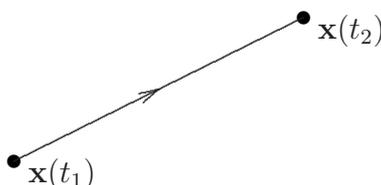
$$0 = \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2 dt \right)_{|s=0} \quad (3.5)$$

für alle erlaubten Variationen (3.3) mit (3.4) gelten.

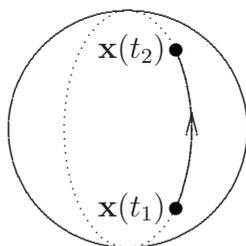
Wenn der **Konfigurationsraum**  $\mathcal{M}$ , d.h. die Menge aller momentan erlaubten Positionen, zeitunabhängig ist, folgt daraus,<sup>3</sup> daß  $|\dot{\mathbf{x}}|$  konstant sein muß (Energiesatz!). Daraus folgt weiter, daß die Bahnkurve eine **Geodäte** auf  $\mathcal{M}$  ist,<sup>4</sup> d.h. daß die kürzeste Verbindung zwischen je zwei Punkten, die durch ein hinreichend kurzes<sup>5</sup> Bahnstück verbunden sind, stets ganz auf der Bahnkurve liegt.

**Anmerkung:** Mehr über Geodäten kann man z.B. in Abschnitt 1.1.3 von (Lücke, grav) nachlesen.

Geodäte auf  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ :



Geodäte auf  $\mathcal{M} = \text{Kugeloberfläche}$ :<sup>6</sup>



Version vom 26. März 2009

<sup>3</sup>Siehe Übungsaufgabe 33.

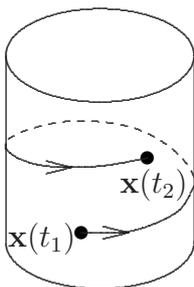
<sup>4</sup>Wenn  $|\dot{\mathbf{x}}| = v$  konstant ist, gilt nämlich

$$\begin{aligned} v \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2 dt \right)_{|s=0} &= v \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s)}{\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2} dt \right)_{|s=0} \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) dt \right)_{|s=0} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2 dt \right)_{|s=0}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Diese Einschränkung ist z.B. für die schraubenförmigen Geodäten auf der Oberfläche eines (unendlich langen) Zylinders notwendig.

<sup>6</sup>Die Bewegung von  $\mathbf{x}(t_1)$  nach  $\mathbf{x}(t_2)$  mit konstanter Geschwindigkeit auf dem **hinteren** (länge-

Geodäte auf  $\mathcal{M} = \text{Zylinderoberfläche}$ :



### 3.1.1.2 Äquivalenz zum D'ALEMBERTSchen Prinzip

Es genügt,<sup>7</sup> das HAMILTON-Prinzip **lokal** auszuwerten, insbesondere also für die zu ermittelnden  $x(\cdot)$  jeweils nur solche  $t_1, t_2$  zu betrachten, die hinreichend nahe beieinander liegen. Das so eingeschränkte HAMILTON-Prinzip läßt sich in generalisierten Koordinaten formulieren.

Mit

$$L(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t),$$

$$W_{t_1, t_2}(q(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = W_{t_1, t_2}(x(\cdot))$$

und der formalen Schreibweise<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \delta W_{t_1, t_2}(q(\cdot)) &\stackrel{\text{def}}{=} W_{t_1, t_2}(q(\cdot, ds)) - W_{t_1, t_2}(q(\cdot, 0)) \\ &= \left( \frac{d}{ds} W_{t_1, t_2}(q(\cdot, s)) \Big|_{s=0} \right) ds, \\ \delta L(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial s} L(q(t, s), \frac{\partial}{\partial t} q(t, s), t) \Big|_{s=0} \right) ds, \\ \delta \dot{q}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} q(t, s) \Big|_{s=0} \right) ds \end{aligned}$$

usw.

Version vom 26. März 2009

ren) Großkreisstück stellt einen **Sattelpunkt** des Wirkungsintegrals  $W = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t) \right|^2 dt$  dar, d.h. es gilt zwar (3.5), aber es gibt Bewegungen von  $\mathbf{x}(t_1)$  nach  $\mathbf{x}(t_2)$ , für die  $W$  größer ist **und** auch solche, für die  $W$  kleiner ist.

<sup>7</sup>Siehe Beweisskizze zu Lemma 3.1.1.

<sup>8</sup>Wir schreiben auch abkürzend  $q(t, s)$  für  $q(x(t, s), t)$ .

wird (3.2)/(3.4) äquivalent zu

$$\boxed{\begin{aligned} \delta W_{t_1, t_2}(q(\cdot)) = 0 \quad &\text{für alle erlaubten Variationen mit:} \\ \left. \begin{aligned} q(t_1, s) &= q(t_1) \\ q(t_2, s) &= q(t_2) \end{aligned} \right\} \quad &\forall s \in \mathbb{R}, \\ q(t, 0) &= q(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}} \quad (3.6)$$

Dabei gilt nach den Regeln der Differentiation impliziter Funktionen<sup>9</sup>

$$\delta W_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^n \left( \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} L \right) \delta q^\nu + \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L \right) \underbrace{\delta \dot{q}^\nu}_{= \frac{d}{dt} \delta q^\nu} \right) dt,$$

sowie nach den Regeln für partielle Integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L \right) \frac{d}{dt} \delta q^\nu dt = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L \right) \delta q^\nu \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}}_{=0 \text{ n. Vorauss. an } q(t, s)} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L \right) \delta q^\nu dt.$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\delta W_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} L - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L \right) \delta q^\nu dt.} \quad (3.7)$$

Genauere Bedeutung von (3.7):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} W_{t_1, t_2}(q(\cdot, s)) \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} L(q, \dot{q}, t) \Big|_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) \Big|_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)} \right) \right) \frac{\partial}{\partial s} q(t, s) \Big|_{s=0} dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da die  $\frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) \Big|_{s=0}$  bis auf die Einschränkung

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t_j, s) \Big|_{s=0}$$

völlig beliebig sind,<sup>10</sup> ist also (3.6) äquivalent zur (lokalen) Gültigkeit der LAGRANGE-Gleichungen II. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L - \frac{\partial}{\partial q^\nu} L = 0. \quad (3.9)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Vgl. Erinnerung zu (1.4).

<sup>10</sup>Man setze (für hinreichend kleine  $s$ ) z.B.  $q^\nu(t, s) = q^\nu(t) + s g_\nu(t)$  zu vorgegebenen  $\frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) \Big|_{s=0} = g_\nu(t)$ .

Es gilt nämlich der

**Fundamentalsatz der Variationsrechnung:** Sei  $f(t)$  eine stetige Funktion über dem offenen Intervall  $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^1$ . Falls  $\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t) dt = 0$  für alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $g(t) \geq 0$  gilt, die außerhalb eines kompakten Teilintervalls von  $(t_1, t_2)$  verschwinden, dann ist  $f(t) = 0 \forall t \in (t_1, t_2)$ .

**Beweisskizze:** Angenommen, es sei  $f(t_0) \neq 0$ ,  $t_0 \in (t_1, t_2)$ . O.B.d.A.:  $f(t_0) > 0$ . Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit ist dann  $f(t)$  innerhalb einer hinreichend kleinen, abgeschlossenen  $\epsilon$ -Umgebung  $\overline{U_\epsilon(t_0)} \subset (t_1, t_2)$  von  $t_0$  strikt positiv. Mit der Definition

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - (t - t_0)^2}\right) & \text{für } t \in U_\epsilon(t_0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt somit

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t) dt > 0$$

und daraus ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. ■

Da die Gültigkeit der LAGRANGE-Gleichungen II. Art für den tatsächlichen Bewegungsablauf äquivalent zum D'ALEMBERTSchen Prinzip ist,<sup>11</sup> folgt somit:

Das eingeschränkte (lokale) HAMILTONSche Prinzip ist äquivalent zum D'ALEMBERTSchen Prinzip (1.14).

Die LAGRANGE-Gleichungen (3.9) bezeichnet man auch als EULER-LAGRANGE-Gleichungen des Variationsprinzips (3.6).

**Lemma 3.1.1** *Das in Abschnitt 3.1.1.1 formulierte (globale) HAMILTONSche Prinzip ist äquivalent zur Gültigkeit des D'ALEMBERTSchen Prinzips.*

**Beweisskizze:** Wir müssen nur noch zeigen, daß das globale HAMILTONSche Prinzip aus dem lokalen folgt. Um dafür den Fall großer Zeitintervalle  $[t_1, t_2]$  auf den hinreichend kleiner Zeitintervalle  $J_j = [t_{j,1}, t_{j,2}]$ ,  $j = 1, \dots, l$ , zurückzuführen, wählen wir letztere so, daß

$$[t_1, t_2] \subset \bigcup_{j=1}^l J_j$$

gilt, und zu jedem  $J_j$  eine glatte Funktion  $h_j(t)$  mit

$$h_j(t) = 0 \quad \text{falls } t \notin J_j$$

so, daß

$$\sum_{j=1}^l h_j(t) = 1 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

und mit

$$x_j(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} h_j(t) (x(t, s) - x(t))$$

daher

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{ds} W_{t_1, t_2} (x(\cdot, s)) \right) \Big|_{s=0} &= \left( \frac{d}{ds} W_{t_1, t_2} \left( x(\cdot) + \sum_{j=1}^l x_j(\cdot, s) \right) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{j=1}^l \left( \frac{d}{ds} W_{t_1, t_2} (x(\cdot) + x_j(\cdot, s)) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{j=1}^l \left( \frac{d}{ds} W_{t_{j,1}, t_{j,2}} (x(\cdot) + x_j(\cdot, s)) \right) \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

gilt. ■

### 3.1.1.3 Plausibilität des HAMILTONSchen Prinzips für konservative, skleronome Systeme

Für **uneingeschränkte** Systeme stimmen die EULER-LAGRANGE-Gleichungen des HAMILTON-Prinzips offensichtlich mit den NEWTONSchen Gleichungen (1.11) für  $\mathbf{K}_\nu^Z = 0$  überein.<sup>12</sup>

Es mag zunächst verblüffen, daß man die Dynamik der entsprechend **eingeschränkten** Systeme (zu denen zusätzlich zu den bisherigen eingepägten Kräften noch die Zwangskräfte hinzutreten) dadurch voll erfaßt, daß man beim HAMILTON-Prinzip lediglich die Variation auf Bewegungsabläufe beschränkt, die mit den Nebenbedingungen verträglich sind.<sup>13</sup>

Für **konservative, skleronome** Systeme wird das plausibel, wenn man sich das eingeschränkte System mit dem (zeitunabhängigen) Konfigurationsraum  $K$  folgendermaßen durch uneingeschränkte Systeme mit zusätzlichen eingepägten Kräften vorstellt, die vom Zusatzpotential  $U^Z(x)$  herrühren:<sup>14</sup>

$U^Z$  ist (entspr. dem D'ALEMBERTSchen Prinzip) auf  $K$  konstant und wächst außerhalb  $K$  'gleichmäßig' rasch an. Aufgrund des Energiesatzes (Abschnitt 1.2.2.4)

Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>Denn:

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\nu^j} - \frac{\partial}{\partial x_\nu^j} \right) \underbrace{\left( \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu|^2 - U \right)}_{\stackrel{L}{(1.55)}} = m_\nu \ddot{x}_\nu^j - \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\nu^j} - \frac{\partial}{\partial x_\nu^j} \right) U}_{\stackrel{\mathbf{K}_\nu^e \cdot \mathbf{e}_j}{(1.57)}}.$$

<sup>13</sup>Die LAGRANGE-Funktion wird dagegen nicht geändert.

<sup>14</sup>Vgl. (Arnol'd, 1988, Abschn. 4.1.1).

kann sich dann eine dynamisch erlaubte Bahnkurve nur wenig von  $K$  entfernen. Die Einhaltung der idealisierten Nebenbedingungen entspricht dem Grenzfall **unendlich** raschen Anwachsens von  $U^Z$  außerhalb  $K$ .

Die dynamisch erlaubten Bewegungsabläufe, die ja den Extremwerten der  $W_{t_1, t_2}$  hinsichtlich sämtlicher denkbarer Bewegungsabläufe entsprechen, gehen dann in die Extremwertstellen hinsichtlich der mit den idealisierten Nebenbedingungen verträglichen Bewegungsabläufe über. Für letztere ist aber  $U^Z$  ohne Belang.

Somit ergibt sich das HAMILTONSche Prinzip für eingeschränkte Systeme.

## 3.1.2 Die kanonischen Gleichungen

### 3.1.2.1 LEGENDRE-Transformation

Eine (hinreichend gutartige) Funktion  $f(\mathbf{v})$  über  $\mathbb{R}^n$  heißt **streng konvex**,<sup>15</sup> wenn die zweite Richtungsableitung für jede Richtung über dem gesamten  $\mathbb{R}^n$  positiv ist; d.h. wenn<sup>16</sup>

$$0 \neq \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \implies (\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{v}})^2 f(\mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Man macht sich leicht klar, daß

$$\begin{aligned} &\text{für streng konvexes } f(\mathbf{x}) : \\ &\text{grad } f(\mathbf{v}_1) = \text{grad } f(\mathbf{v}_2) \iff \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

**Beweis** für „ $\implies$ “: Aus der Implikations-Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\text{grad } f(\mathbf{v}_2) - \text{grad } f(\mathbf{v}_1)) \\ &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \text{grad } f(\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^1 \underbrace{((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}})^2 f(\mathbf{v})}_{>0 \text{ für } \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

und daraus  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . ■

Falls also  $\text{grad } f$  für fest vorgegebenes streng konvexes  $f$  überhaupt einen betrachteten Wert  $\mathbf{p}$  annimmt, dann an einer eindeutig durch  $\mathbf{p}$  bestimmten Stelle. Mit anderen Worten:

Version vom 26. März 2009

<sup>15</sup>Die Funktion heißt **konvex**, wenn ihre zweite Richtungsableitung für jede Richtung über dem gesamten  $\mathbb{R}^n$  nicht negativ ist.

<sup>16</sup>Äquivalente Definition für  $n = 1$ :  $\underbrace{\frac{f(v_1) + f(v_2)}{2}}_{f_{\text{mitt}}} > f\left(\underbrace{\frac{v_1 + v_2}{2}}_{v_{\text{mitt}}}\right)$ .

Zu jedem streng konvexen  $f(\mathbf{v})$  existiert somit eine eindeutige Abbildung  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  von

$$G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{grad } f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

auf den  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\mathbf{p} = \text{grad } f(\mathbf{v}(\mathbf{p})) \quad \forall \mathbf{p} \in G_f. \quad (3.11)$$

Umgekehrt ergibt sich  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  (im Falle hinreichender Gutartigkeit) gemäß

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \text{grad } l(\mathbf{p})$$

aus der sog. **LEGENDRE-Transformation**

$$l(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p}) - f(\mathbf{v}(\mathbf{p})) \quad \forall \mathbf{p} \in G_f \quad (3.12)$$

von  $f$ ; denn:

$$\frac{\partial}{\partial p^j} l(\mathbf{p}) = v^j(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p^j} \mathbf{v}(\mathbf{p}) - \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial p^j} \mathbf{v}(\mathbf{p}) \right) \cdot \text{grad } f(\mathbf{v}(\mathbf{p}))}_{\stackrel{\text{3.11}}{=} \mathbf{p}}.$$

**Anmerkungen:**

1. Man kann zeigen, daß die LEGENDRE-Transformierte von  $f$  durch

$$l(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - f(\mathbf{v}))$$

gegeben ist.

2. Die LEGENDRE-Transformation spielt insbesondere in der Thermodynamik eine wichtige Rolle; siehe z.B. Abschnitt 1.2.3 von (Lücke, tdst).

Verallgemeinerung dieser Überlegungen führt auf folgenden

**Satz 3.1.2** Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n'}$  und sei  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  eine (hinreichend gutartige) Funktion über  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$ , die für beliebiges festes  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$  eine **streng konvexe** Funktion von  $\mathbf{v}$  ist. Dabei sei

$$\{\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}.$$

Dann existiert eine eindeutige (und hinreichend gutartige) Abbildung  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  von  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$  auf den  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

und

$$\nabla_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})},$$

wobei

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$$

**LEGENDRE-Transformation** von  $f$  hinsichtlich  $\mathbf{v}$  ist.

**Beweis von Satz 3.1.2:** Anwendung der bisherigen Überlegungen für jeweils festes  $\mathbf{x}$  liefert alle Aussagen außer

$$\nabla_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}.$$

Letzteres folgt gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \right) \\ &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \frac{\partial}{\partial x^j} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})} - \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right) \cdot \underbrace{\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}}_{=\mathbf{p}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^j} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.1.2.2 Bewegungsgleichungen 1. Ordnung für generalisierte Koordinaten und Impulse

Normalerweise<sup>17</sup> ist die LAGRANGE-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  für jeweils festes  $(q, t) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine **streng konvexe** Funktion von  $\dot{q}$  über  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\left\{ \begin{aligned} p = (p^1, \dots, p^n) : \exists \dot{q} \in \mathbb{R}^n : p^\nu &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} \\ &= \mathbb{R}^n \quad \forall (q, t) \in \mathcal{O}. \end{aligned} \right\}$$

Dann<sup>18</sup> existieren nach Satz 3.1.2 eindeutige Funktionen  $\dot{q}^\nu(q, p, t)$  mit

$$p^\nu = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t)|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)} \quad \forall (q, t) \in \mathcal{O}, p \in \mathbb{R}^n.$$

Damit gilt natürlich

$$\frac{d}{dt} q^\nu(t) = \dot{q}^\nu(q(t), p(t), t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}, t \in [t_1, t_2] \quad (3.13)$$

für jede (lokale) Bewegung  $(q(t), t_1, t_2)$ , wobei

$$p^\nu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\dot{q}^\nu} L(q(t), \dot{q}, t)|_{\dot{q}=\frac{d}{dt}q(t)} \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}, t \in [t_1, t_2].$$

Für dynamisch erlaubte Bewegungen besagen die LAGRANGE-Gleichungen (1.59) für das so definierte  $p(t)$  andererseits:

$$\frac{d}{dt} p_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial q^\nu} L(q, \dot{q}, t)|_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(q(t), p(t), t)} \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}, t \in [t_1, t_2]. \quad (3.14)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>17</sup>Siehe Übungsaufgabe 34.

<sup>18</sup>Man identifiziere in Satz 3.1.2:

$$f \hat{=} L, \quad \mathbf{x} \hat{=} (q, t), \quad \mathbf{v} \hat{=} \dot{q}, \quad \mathbf{p} \hat{=} p.$$

Das Differentialgleichungssystem (3.13)/(3.14) für  $(q(t), p(t))$  ist gemäß Kapitel 5 von (Lücke, ein) für vorgegebene (erlaubte) Anfangswerte  $(q(0), p(0))$  lokal eindeutig lösbar.

Nach Satz 3.1.2 gilt (mit  $l \hat{=} H$ ) außerdem

$$\dot{q}^\nu(q, p, t) = \frac{\partial}{\partial p_\nu} H(q, p, t) \quad \forall (q, t) \in \mathcal{O}, p \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\frac{\partial}{\partial q^\nu} L(q, \dot{q}, t)|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)} = -\frac{\partial}{\partial q^\nu} H(q, p, t) \quad \forall (q, t) \in \mathcal{O}, p \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

mit der sog. HAMILTON-**Funktion**<sup>19</sup>

$$H(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n p_\nu \dot{q}^\nu(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad \forall (q, t) \in \mathcal{O}, p \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

Die Gleichungen (3.13)/(3.14) sind also äquivalent zu den sog. HAMILTONschen **kanonischen Gleichungen**:

$$\boxed{\dot{q}^\nu(t) = +\frac{\partial}{\partial p_\nu} H(q(t), p, t)|_{p=p(t)}}, \quad (3.17)$$

$$\boxed{\dot{p}_\nu(t) = -\frac{\partial}{\partial q^\nu} H(q, p(t), t)|_{q=q(t)}}. \quad (3.18)$$

Zusätzlich ergibt sich aus Satz 3.1.2:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} H(q, p, t) = -\frac{\partial}{\partial t} L(q, \dot{q}, t)|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}}. \quad (3.19)$$

### Anmerkungen:

- (i) Bei der Lösung von (3.17)/(3.18) werden die  $q^\nu$  und  $p_\nu$  formal als unabhängig voneinander behandelt. Die Gültigkeit von (3.17) garantiert dann (nach Satz 3.1.2) den physikalisch richtigen Zusammenhang (1.60) zwischen  $p(t)$  und  $(q(t), \dot{q}(t), t)$ .
- (ii) Aus (3.15) erkennt man, daß  $q^\nu$  genau dann zyklisch ist, wenn  $\frac{\partial}{\partial q^\nu} H = 0$ , d.h. wenn  $H$  nicht von  $q^\nu$  abhängt.

Version vom 26. März 2009

<sup>19</sup>Die HAMILTON-Funktion  $H(q, p, t)$  ist also die LEGENDRE-Transformierte der LAGRANGE-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  hinsichtlich  $\dot{q}$ .

Aus (3.19) und (1.62) erkennt man<sup>20</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} H = 0 \quad \implies \quad \dot{H} = 0 \quad \text{für Lösungen von (3.17)/(3.18),}$$

was sich natürlich auch direkt nachrechnen läßt. Es sei daran erinnert, daß im  $(q, \dot{q})$ -Formalismus

$$H = T + U, \quad \text{falls } U = U(q, t) \text{ und } \frac{\partial}{\partial t} x(q, t) = 0,$$

gilt (Gleichungen (1.65) und (1.63)), was sich natürlich auch unter Koordinatentransformationen

$$\underbrace{q, \dot{q}}_{\text{in (1.63) benutzt}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{q, p}_{\text{in (3.16) benutzt}}$$

nicht ändert.

### 3.1.2.3 POISSON-Klammer-Formulierung

Sei nun eine (hinreichend gutartige) Funktion  $f(q, p, t)$  gegeben. Für

$$f(t) = f(q(t), p(t), t)$$

folgt dann

$$\dot{f}(t) = \dot{f}(q(t), p(t), \dot{q}(t), \dot{p}(t), t)$$

mit<sup>21</sup>

$$\dot{f}(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \left( \dot{q}^{\nu} \frac{\partial}{\partial q^{\nu}} + \dot{p}_{\nu} \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} \right) f(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(q, p, t).$$

Daher:

$$\left. \begin{array}{l} (3.17) \\ (3.18) \end{array} \right\} \implies \dot{f} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^{\nu}} \frac{\partial H}{\partial p_{\nu}} - \frac{\partial H}{\partial q^{\nu}} \frac{\partial f}{\partial p_{\nu}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} f.$$

Mit der sog.

**POISSON-Klammer:**<sup>22</sup>

$$\{f, g\}_{q,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^{\nu}} \frac{\partial g}{\partial p_{\nu}} - \frac{\partial g}{\partial q^{\nu}} \frac{\partial f}{\partial p_{\nu}} \right) \quad (3.20)$$

ergibt sich somit

**für die tatsächliche Bewegung:**

$$\dot{f} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial}{\partial t} f. \quad (3.21)$$

<sup>20</sup>Man beachte, daß sogar (3.22) gilt.

<sup>21</sup>Vgl. Erläuterung der Schreibweise zu (1.45).

<sup>22</sup>Mitunter wird die sog. POISSON-Klammer  $\{.,.\}$  mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert.

Umgekehrt folgen natürlich die kanonischen Gleichungen (3.17) bzw. (3.18) als Spezialfälle  $f = q^\nu$  bzw.  $f = p_\nu$ .

Einsetzen von  $f = H$  in (3.21) liefert

für tatsächliche Bewegung:

$$\dot{H} = \frac{\partial}{\partial t} H, \quad (3.22)$$

denn die POISSON-Klammer ist offensichtlich antisymmetrisch.<sup>23</sup>

$$\{f, g\}_{q,p} = -\{g, f\}_{q,p}. \quad (3.23)$$

Mit der sog. JACOBI-*Identität*<sup>24</sup>

$$\left\{ f, \left\{ g, h \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ g, \left\{ h, f \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ h, \left\{ f, g \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} = 0 \quad (3.24)$$

folgt daraus z.B. der sog. **Satz von POISSON**:

$$\{f, H\}_{q,p} = \{g, H\}_{q,p} = 0 \implies \left\{ \left\{ f, g \right\}_{q,p}, H \right\}_{q,p} = 0, \quad (3.25)$$

so daß nach (3.21) die POISSON-Klammer u.U. aus bekannten Erhaltungsgrößen neue bildet.

Schließlich seien noch die Relationen

$$\{q^\nu, q^\mu\}_{q,p} = \{p_\nu, p_\mu\}_{q,p} = 0, \quad \{q^\nu, p_\mu\}_{q,p} = \delta_{\nu\mu} \quad (3.26)$$

erwähnt, die zusammen mit (3.21) in der Quantenmechanik eine entscheidende Rolle spielen.

## 3.2 HAMILTON-JACOBI-Theorie

### 3.2.1 Kanonische Transformationen

#### 3.2.1.1 Variationsprinzip für die kanonischen Gleichungen

Man sieht unmittelbar, daß die kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18) äquivalent sind zu folgendem Variationsprinzip:

Version vom 26. März 2009

<sup>23</sup>Insbesondere gilt also  $\{H, H\}_{q,p} = 0$ .

<sup>24</sup>Siehe Übungsaufgabe 35 c) und (Malik, 2003).

Eine erlaubte Bewegung  $(q(t), t_1, t_2)$  entspricht genau dann der durch  $H$  (bzw.  $L$ ) gegebenen Dynamik, wenn (hinreichend gutartige) Funktionen  $p^1(t), \dots, p^n(t)$  über  $[t_1, t_2]$  existieren, die der Bedingung<sup>25</sup>

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}(t, s) \frac{\partial}{\partial t} q^{\nu}(t, s) - H(q(t, s), p(t, s), t) \right) dt \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad (3.27)$$

für alle (hinz. gutart.)  $s$ -abhängige Variationen  $q(t, s), p(t, s)$  der  $q(t), p(t)$  mit

$$\left. \begin{aligned} q(t_j, s) &= q(t_j) \\ p(t_j, s) &= p(t_j) \end{aligned} \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2\}$$

$$q(t, 0) = q(t), \quad p(t, 0) = p(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

genügen.

**Abkürzende Schreibweise** für (3.27):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu} p_{\nu} \dot{q}^{\nu} - H \right) dt = 0 \quad \text{bei unabh. Variation von } q(t) \text{ und } p(t). \quad (3.28)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>25</sup>Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu (3.28) sind nämlich:

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial q^{\nu}} \right) \left( \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}^{\mu} - H \right) = \dot{p}_{\nu} + \frac{\partial}{\partial q^{\nu}} H$$

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{\nu}} - \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} \right) \left( \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}^{\mu} - H \right) = -\dot{q}^{\nu} + \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} H$$

**Anmerkungen:**

- (i) Man kann zeigen (Übungsaufgabe 37), daß (3.28) auch dann noch für alle Lösungen der kanonischen Gleichungen gilt, wenn man auf die Einschränkung

$$p(t_j, s) = p(t_j) \quad \forall s \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2\}$$

der Variationen verzichtet.

- (ii) Indem man  $\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n p_\nu \dot{q}^\nu$  vom Integranden in (3.28) subtrahiert, sieht

man, daß die Verwendung von  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu} \dot{p}_\nu \dot{q}^\nu + H \right) dt$  anstelle von  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu} p_\nu \dot{q}^\nu - H \right) dt$  auf ein äquivalentes Variationsprinzip führen würde.

**3.2.1.2 Invarianzeigenschaften der kanonischen Gleichungen**

Im LAGRANGE-Formalismus sind die  $q^\nu$  und  $\dot{q}^\nu$  nur bei Auswertung der partiellen Differentiationen formal als unabhängig zu betrachten. Nach Auswertung der partiellen Differentiationen sind sie mit den zeitabhängigen generalisierten Koordinaten der (nicht unbedingt dynamisch erlaubten, lokalen) Bewegung resp. ihren zeitlichen Ableitungen zu identifizieren. Entsprechend sind auch die zeitabhängigen kanonisch konjugierten Impulse  $p_\nu(t)$  zu identifizieren:

$$p_\nu(t) \stackrel{(1.60)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q(t), \dot{q}, t) \Big|_{\dot{q} = \frac{\partial}{\partial t} q(t)} \quad \text{im LAGRANGE-Formalismus.}$$

Im HAMILTON-Formalismus werden die  $q^\nu(t)$  und  $p_\nu(t)$  dagegen grundsätzlich als unabhängig voneinander betrachtet und erst durch die kanonischen Gleichungen (3.17) in die physikalisch richtige Beziehung zueinander gesetzt.<sup>26</sup> Daher liegt der Versuch nahe, die kanonischen Gleichungen durch geschickte (lokale,  $t$ -abhängige) Transformation

$$(q(t), p(t)) \longmapsto (Q(t) = Q(q(t), p(t), t), P(t) = P(q(t), p(t), t)) \quad (3.29)$$

in eine leichter lösbare Form zu bringen. Natürlich soll die Transformation (3.29) ‘hinreichend gutartig’ sein und eine ‘hinreichend gutartige’ Umkehrung

$$(Q(t), P(t)) \longmapsto (q(t) = q(Q(t), P(t), t), p(t) = p(Q(t), P(t), t)) \quad (3.30)$$

<sup>26</sup>Im übrigen sei daran erinnert, daß kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18) zusammen die gleichen Einschränkungen an  $q(t)$  liefern wie die LAGRANGE-Gleichungen (3.9).

besitzen. Um sicherzustellen, daß die Gleichungen für die  $Q(t), P(t)$  die gleiche Form haben wie die kanonischen Gleichungen für die  $q(t), p(t)$ , verlangt man zusätzlich die Existenz (hinr. gutart.) Funktionen  $K(Q, P, t)$  und  $F(Q, P, T)$  mit

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}(t) \frac{d}{dt} q^{\nu}(t) - H(q(t), p(t), t) \\ &= \sum_{\nu=1}^n P_{\nu}(t) \frac{d}{dt} Q^{\nu}(t) - K(Q(t), P(t), t) + \frac{d}{dt} F(Q(t), P(t), t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Transformationen (3.29) dieser Art bezeichnet man als (lokale, passive) **kanonische Transformationen**. Für kanonischen Transformationen gilt also<sup>27</sup>

$$\left. \begin{array}{l} (3.17) \\ (3.18) \end{array} \right\} \iff \begin{cases} \dot{Q}^{\nu}(t) = \frac{\partial}{\partial P_{\nu}} K(Q(t), P(t), t) \Big|_{P=P(t)}, \\ \dot{P}_{\nu}(t) = -\frac{\partial}{\partial Q^{\nu}} K(Q(t), P(t), t) \Big|_{Q=Q(t)}, \end{cases} \quad (3.32)$$

wie man aus 3.2.1.1 unter Beachtung der Anmerkung (iii) zu (3.2) leicht erkennt.

Zu den einfachsten kanonischen Transformationen gehören diejenigen vom Typ

$$\begin{aligned} Q^{\nu}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mp p_{\pi(\nu)}(t) \text{ falls } 1 \leq \nu < n' \\ q^{\pi(\nu)}(t) \text{ falls } n' \leq \nu \leq n \end{cases} \\ P_{\nu}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \pm q^{\pi(\nu)}(t) \text{ falls } 1 \leq \nu < n' \\ p_{\pi(\nu)}(t) \text{ falls } n' \leq \nu \leq n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

( $\pi$  Permutation von  $(1, \dots, n)$ ,  $n' \in \{1, \dots, n\}$ ). Hier gilt (3.31) mit

$$K(Q(t), P(t), t) = H(q(t), p(t), t)$$

und

$$F(Q, P, t) = -\sum_{\nu=1}^{n'-1} P_{\nu} Q^{\nu}.$$

In der Forminvarianz von (3.17)/(3.18) unter diesen Transformationen kommt die Gleichberechtigung der  $q$  und  $p$  im kanonischen Formalismus besonders deutlich zum Ausdruck.

Version vom 26. März 2009

<sup>27</sup>Der Begriff ‘kanonische Transformation’ wird in der Literatur nicht einheitlich benutzt. Für die Transformation

$$(q(t), p(t)) \mapsto (Q(t) = 2q(t), P(t) = p(t))$$

gilt zwar auch (3.32), mit  $K(Q, P) = 2H(Q/2, P)$ , sie ist aber **nicht** kanonisch im Sinne unserer Definition, da keine Funktion  $F$  existiert, für die (3.31) gilt.

Auch die umkehrbaren sog. **Punkttransformationen**

$$q(t) \longmapsto Q(t) = q'(t) = q'(q(t), t), \quad (3.34)$$

$$p_\nu(t) \longmapsto P_\nu(t) = p'_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial q^\mu(q', t)}{\partial q'^\nu} \Big|_{q'=q'(t)} p_\mu(t) \quad (3.35)$$

sind kanonische Transformationen, mit  $F = 0$  und

$$K(Q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} H\left(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t\right) + \sum_{\nu=1}^n P_\nu \frac{\partial}{\partial t} Q^\nu(q, t) \Big|_{q=q(Q, t)}.$$

**Beweis:** Aus

$$\dot{Q}^\nu(t) = \frac{d}{dt} q'^\nu(q(t), t) = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}^\alpha(t) \frac{\partial q'^\nu(q, t)}{\partial q^\alpha} \Big|_{q=q(t)} + \frac{\partial}{\partial t} q'^\nu(q, t) \Big|_{q=q(t)}$$

und (3.35) folgt

$$\sum_{\nu=1}^n P_\nu \dot{Q}^\nu - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \frac{\partial}{\partial t} q'^\nu(q, t) \Big|_{q=q(Q, t)} = \sum_{\mu, \alpha} p_\alpha \underbrace{\sum_{\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial q'^\nu} \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\alpha}}_{\delta_{\mu\alpha}} \dot{q}^\beta = \sum_{\mu=1}^n p_\mu \dot{q}^\mu$$

und damit die Behauptung. ■

Bei (hinreichend gutartigem) Koordinatenwechsel (3.34) transformieren sich die  $p_\nu(t)$  im LAGRANGE-Formalismus stets gemäß (3.35), also **kovariant**,<sup>28</sup> d.h. wie die  $\frac{\partial}{\partial q^\nu}$ .

**Beweis:** Mit

$$L'(q', \dot{q}', t) \stackrel{\text{def}}{=} L\left(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t\right),$$

gilt

$$p'_\nu(q', \dot{q}', t) \stackrel{(1.60)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'^\nu} L'(q', \dot{q}', t) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \dot{q}^\mu(q', \dot{q}', t)}{\partial \dot{q}'^\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} L(q, \dot{q}, t) \Big|_{q=q(q', t), \dot{q}=\dot{q}(q', \dot{q}', t)}.$$

Mit

$$\dot{q}^\mu(q', \dot{q}', t) = \sum_{\nu=1}^n \dot{q}'^\nu \frac{\partial q^\mu(q', t)}{\partial q'^\nu} + \frac{\partial}{\partial t} q^\mu(q', t)$$

und somit

$$\frac{\partial \dot{q}^\mu(q', \dot{q}', t)}{\partial \dot{q}'^\nu} = \frac{\partial q^\mu(q', t)}{\partial q'^\nu}$$

(vgl. (1.45)) folgt daraus gemäß (1.60) die Behauptung. ■

<sup>28</sup>Daher kann man den physikalischen Momentan-Zustand als Punkt des **Kotangentialbündels**  $T^*\mathcal{M}_t$  über  $\mathcal{M}_t$  mit den (lokalen) Koordinaten  $(q^1(t), \dots, p_n(t))$  auffassen (siehe Anhang), das man in diesem Zusammenhang auch als **Phasenraum** bezeichnet. Den  $q, p, t$ -Raum bezeichnet man mitunter als **erweiterten Phasenraum**.

### 3.2.1.3 Erzeugende Funktionen kanonischer Transformationen

Sei (3.29) eine (lokale) kanonische Transformation. Es existieren also  $K$  und  $F$  mit (3.31). Zusätzlich sei nun angenommen, daß auch

$$(q(t), p(t)) \longmapsto (q(t), P(t))$$

eine hinreichend gutartige umkehrbare Transformation ist. **Dann** ist die Definition

$$F_2(q(t), P(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} F(Q(t), P(t), t) + \sum_{\nu=1}^n P_\nu(t) Q^\nu(t) \quad (3.36)$$

erlaubt,<sup>29</sup> aus der mit (3.31)

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n p_\nu(t) \frac{d}{dt} q^\nu(t) - H(q(t), p(t), t) \\ &= - \sum_{\nu=1}^n Q^\nu(t) \frac{d}{dt} P_\nu(t) - K(Q(t), P(t), t) + \frac{d}{dt} F_2(q(t), P(t), t) \end{aligned}$$

und somit nach Auswertung von  $\dot{F}_2$

$$p_\nu(t) = \left. \frac{\partial}{\partial q^\nu} F_2(q, P(t), t) \right|_{q=q(t)}, \quad (3.37)$$

$$Q^\nu(t) = \left. \frac{\partial}{\partial P_\nu} F_2(q(t), P, t) \right|_{P=P(t)}, \quad (3.38)$$

$$K(Q(t), P(t), t) = H(q(t), p(t), t) + \left. \frac{\partial}{\partial t} F_2(q, P, t) \right|_{q=q(t), P=P(t)} \quad (3.39)$$

folgt.<sup>30</sup> Nach Voraussetzung sind die Gleichungen (3.37) eindeutig nach den  $P_\nu(t)$  auflösbar. Also ist die Transformation (3.29) entsprechend (3.37), (3.38) durch  $F_2$  bereits eindeutig festgelegt. Daher bezeichnet man  $F_2$  als die **Erzeugende** der kanonischen Transformation (3.29).

**Beispiel:** Die Punkttransformationen (3.34)/(3.35) sind offensichtlich vom Typ (3.37)/(3.38) und ihre erzeugende Funktion (3.36) ist

$$F_2(q(t), P(t), t) = \sum_{\nu=1}^n Q^\nu(q(t), t) P_\nu(t).$$

Version vom 26. März 2009

<sup>29</sup>Denn  $Q^\nu(t) = Q^\nu(q(t), p(q(t), P(t), t), t)$ .

<sup>30</sup>Da die  $\dot{q}(t), \dot{P}(t)$  zu jedem festen Zeitpunkt unabhängig von den Momentanwerten  $q(t), P(t)$  beliebige Werte annehmen können.

Umgekehrt legen offenbar (3.37)/(3.38) bei beliebig vorgegebenem (hinr. gutart.)  $F_2$ , für das die Gleichungen (3.37) nach den  $P_\nu$  eindeutig auflösbar sind,<sup>31</sup> eine Transformation fest, die für **jede** (hinreichend gutartige) HAMILTON-Funktion  $H(q, p, t)$  kanonisch ist.

Es ist klar, daß die **JACOBI-Determinante**

$$\frac{\partial(Q^1(t), \dots, P_n(t))}{\partial(q^1(t), \dots, p_n(t))} \stackrel{\text{def}}{=} \det \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q^1(q, p, t)}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1(q, p, t)}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n(q, p, t)}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P_n(q, p, t)}{\partial p_n} \end{array} \right) \Big|_{q=q(t), p=p(t)} \quad (3.40)$$

einer kanonischen Transformation an keiner Stelle, für die sie definiert ist, Null sein kann.<sup>32</sup> Für einen hinreichend kleinen  $q, p$ -Bereich lassen sich die  $q^\nu, p_\nu$  deshalb stets rückerdeutig auf die  $q^\nu$  und eine geeignete Auswahl von  $n$ -Stück der Koordinaten  $Q^1, \dots, P_n$  abbilden.

**Beweisskizze:** Wir betrachten zunächst eine feste Stelle des Phasenraumes. Da die JACOBI-Determinante (3.40) nicht verschwindet, bilden die entsprechenden Vektoren

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q^1}{\partial p_n} \end{array} \right) \cdots, \left( \begin{array}{c} \frac{\partial P_n}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{array} \right)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>31</sup>Nach einem bekannten Satz über implizite Funktionen (siehe z.B. (v. Mangoldt und Knopp, 1962, Nr. 134, Satz 2) oder (Abraham und Marsden, 1978, Theorem 1.3.16)) gilt:

Auflösbarkeit von (3.37) nach den  $P_\nu \iff (3.43) \iff$  Auflösbarkeit von (3.38) nach den  $q^\nu$ .

<sup>32</sup>Gemäß verallgemeinerter Kettenregel gilt nämlich

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q^n} \\ \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccc} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^1} & \frac{\partial P_1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^n} & \frac{\partial P_1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q^n} \\ \frac{\partial Q^1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial Q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial Q^n} \\ \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_n} \end{array} \right)$$

und eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist.

eine Basis des  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nach dem Austauschsatz von STEINITZ<sup>33</sup> existieren also ein  $n' \in \{0, 1, \dots, n\}$  und Permutationen  $\pi, \hat{\pi}$  von  $(1, \dots, n)$ , für die auch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^{\pi(1)}}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial Q^{\pi(1)}}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^{\pi(n')}}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial Q^{\pi(n')}}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial P^{\hat{\pi}(1)}}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial P^{\hat{\pi}(1)}}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial P^{\hat{\pi}(n-n')}}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial P^{\hat{\pi}(n-n')}}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

eine Basis des  $\mathbb{R}^{2n}$  bilden. Somit ist

$$\mathbb{M} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^{\pi(1)}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q^{\pi(n')}}{\partial p_1} & \frac{\partial P^{\hat{\pi}(1)}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P^{\hat{\pi}(n-n')}}{\partial p_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^{\pi(1)}}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial Q^{\pi(n')}}{\partial p_n} & \frac{\partial P^{\hat{\pi}(1)}}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial P^{\hat{\pi}(n-n')}}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

an der betrachteten Stelle des Phasenraumes — und damit aus Stetigkeitsgründen auch in einer Umgebung desselben — invertierbar. Mit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Q^{\pi(1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial Q^{\pi(n')}} \\ \frac{\partial}{\partial P^{\hat{\pi}(1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P^{\hat{\pi}(n-n')}} \end{pmatrix}$$

folgt daraus die Behauptung. ■

Jede kanonische Transformation läßt sich also **lokal** als Kombination einer Transformation vom Typ (3.33) mit einer anschließenden kanonischen Transformation vom Typ (3.37)/(3.38) darstellen. Daraus können wir schließen:

Ob eine (lokale) Transformation (3.29) kanonisch ist, hängt nicht von der HAMILTON-Funktion  $H$  ab!

(3.41)

Für kanonische Transformationen ist die JACOBI-Determinante nicht nur von Null verschieden, sondern es gilt sogar

$$\frac{\partial(Q^1(t), \dots, P_n(t))}{\partial(q^1(t), \dots, p_n(t))} = 1. \quad (3.42)$$

**Beweisskizze:** Für Transformation vom Typ (3.33) ist (3.42) leicht einzusehen. Es genügt also der Nachweis für Transformationen vom Typ (3.37)/(3.38), für die gemäß Fußnote 31

$$0 \neq \frac{\partial(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

gilt. Solche Transformationen lassen sich folgendermaßen in zwei Schritten ausführen:

$$(q, p) \mapsto (q, P) \mapsto (Q, P).$$

Daraus folgt<sup>34</sup>

$$\frac{\partial(Q^1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(q^1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, p_n)} \frac{\partial(Q^1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, P_n)}.$$

Mit<sup>35</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q^1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, P_n)} &\stackrel{(3.38)}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial P_1} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^n} \frac{\partial}{\partial P_1} F_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial P_n} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^n} \frac{\partial}{\partial P_n} F_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{M} \\ \\ \mathbb{1}_n \end{matrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial P_1} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^n} \frac{\partial}{\partial P_1} F_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial P_n} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^n} \frac{\partial}{\partial P_n} F_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & & 0_n \\ \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^1} F_2 \\ \mathbb{M}' & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial P_n} \frac{\partial}{\partial q^n} F_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.37)}{=} \frac{\partial(q^1, \dots, p_n)}{\partial(q^1, \dots, P_n)} \\ &= \left( \frac{\partial(q^1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, p_n)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

ergibt sich daraus die Behauptung. ■

<sup>34</sup>Man beachte Fußnote 33 und  $\det(\mathbb{M}_1 \mathbb{M}_2) = \det(\mathbb{M}_1) \det(\mathbb{M}_2)$ .

<sup>35</sup>Die genaue Angabe der  $n \times n$ -Matrizen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}'$  ist hier unnötig.

### 3.2.1.4 Invarianz der POISSON-Klammern unter kanonischen Transformationen

Nachdem klar ist, daß die Kanonizität einer (lokalen) Transformation nicht von der HAMILTON-Funktion abhängt, läßt sich leicht zeigen, daß (lokal) für beliebige (hinreichend gutartige) Funktionen  $f, g$  gilt:<sup>36</sup>

$$\left( (q(t), p(t)) \mapsto (Q(t), P(t)) \text{ kanonisch} \right) \implies \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}. \quad (3.44)$$

**Beweisskizze:** Für Transformation vom Typ (3.33) gilt (3.44) offensichtlich. Sei andererseits  $(q(t), p(t)) \mapsto (Q(t), P(t))$  eine kanonische Transformation mit der erzeugenden Funktion  $F_2$  und sei  $\hat{t}$  ein beliebig vorgegebener Zeitpunkt. Dann ist

$$\left. \begin{array}{l} q(t) \\ p(t) \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q(q(t), p(t), \hat{t}) \\ \hat{P}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(q(t), p(t), \hat{t}) \end{array} \right.$$

nach 3.2.1.3 eine kanonische Transformation mit

$$(\hat{Q}(\hat{t}), \hat{P}(\hat{t})) = (Q(\hat{t}), P(\hat{t}))$$

und der erzeugenden Funktion  $\hat{F}_2(q(t), \hat{P}(t), t) = F_2(q(t), \hat{P}(t), \hat{t})$ . Zum Beweis von

$$\{f, g\}_{q,p}(q, p, \hat{t}) = \{f, g\}_{Q,P}(Q(q, p, \hat{t}), P(q, p, \hat{t}), \hat{t})$$

kann man also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die kanonische Transformation  $(q(t), p(t)) \mapsto (Q(t), P(t))$  nicht explizit von der Zeit abhängt ( $\frac{\partial}{\partial t} F_2 = 0$ ). Offensichtlich ist außerdem, daß man  $f$  und  $g$  als nicht explizit zeitabhängig voraussetzen kann. Sei unter diesen Voraussetzungen  $q(t), p(t)$  eine (lokale) Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{q}^\nu = + \frac{\partial}{\partial p_\nu} g, \quad \dot{p}_\nu = - \frac{\partial}{\partial q^\nu} g$$

zu den Anfangsbedingungen

$$q(\hat{t}) = \hat{q}, \quad p(\hat{t}) = \hat{p}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>36</sup>Genaue Bedeutung von (3.44):

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial F(Q, P, t)}{\partial Q^\nu} \frac{\partial G(Q, P, t)}{\partial P_\nu} - \frac{\partial G(Q, P, t)}{\partial Q^\nu} \frac{\partial F(Q, P, t)}{\partial P_\nu} \right) \Big|_{Q=Q(q,p,t), P=P(q,p,t)}$$

mit

$$F(Q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t), \quad G(Q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} g(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t).$$

Da  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  kanonisch ist, gilt für  $Q(t) = Q(q(t), p(t))$ ,  $P(t) = P(q(t), p(t))$  entsprechend

$$\begin{aligned}\dot{Q}^\nu &= +\frac{\partial}{\partial P_\nu}G, \\ \dot{P}_\nu &= -\frac{\partial}{\partial Q^\nu}G, \quad G(Q, P) \stackrel{\text{def}}{=} g(q(Q, P), p(Q, P)),\end{aligned}$$

und somit entsprechend (3.21)

$$\{f, g\}_{q,p}(q(t), p(t)) = \dot{f}(t) = \{f, g\}_{Q,P}\left(Q(q(t), p(t)), P(q(t), p(t))\right)$$

für die betrachtete (lokale) Bewegung  $q(t), p(t)$ , insbesondere also

$$\{f, g\}_{q,p}(\hat{q}, \hat{p}) = \{f, g\}_{Q,P}(Q(\hat{q}, \hat{p}), P(\hat{q}, \hat{p})).$$

Da  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  (im lokalen Koordinatenbereich) beliebig vorgebar sind, ist damit die Behauptung bewiesen. ■

**Anmerkung:** Umgekehrt läßt sich zeigen, daß die Abbildung  $(q(t), p(t)) \mapsto (Q(t), P(t))$  kanonisch ist, falls  $\{f, g\}_{Q,P} = \{f, g\}_{q,p}$  für alle (hinreichend gutartigen)  $f, g$  gilt.

## 3.2.2 HAMILTON-JACOBI-Gleichung

### 3.2.2.1 Bedeutung der Gleichung

Die kanonischen Gleichungen sind offenbar gelöst, wenn es gelingt, eine kanonische Transformation (3.29) zu finden, für die (3.31) mit  $K = 0$  gilt; denn dann sind die  $Q^\nu(t)$  und  $P_\nu(t)$  nach (3.32) konstant<sup>37</sup> und die Lösungen von (3.17)/(3.18) somit entsprechend (3.30) durch

$$q(t) = q(Q(t_0), P(t_0), t), \quad p(t) = p(Q(t_0), P(t_0), t)$$

gegeben, wobei  $Q(t_0)$  und  $P(t_0)$  gemäß (3.29) durch die Anfangswerte  $q(t_0), p(t_0)$  gegeben sind.

Eine Transformation der Form (3.37)/(3.38) ist nach (3.39) offensichtlich von der gewünschten Art, wenn<sup>38</sup> die Erzeugende  $F_2$  die sogenannte

**HAMILTON-JACOBI-Gleichung :**

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2(q, P, t) + H\left(q, \nabla_q F_2(q, P, t), t\right) = 0$$

(3.45)

Version vom 26. März 2009

<sup>37</sup>Naheliegende Verallgemeinerung:  $K = K(P) \rightsquigarrow \dot{P} = \ddot{Q} = 0$

<sup>38</sup>Addition einer Funktion zu  $F_2$ , die nur von  $t$  abhängt, würde die kanonische Transformation nicht ändern.

erfüllt und die Gleichungen (3.37) eindeutig nach den  $P_\nu$  auflösbar sind; d.h. es gilt **lokal** (3.43). Eine  $P$ -abhängige Schar von Funktionen  $F_2(q, P, t)$  der  $(q, t)$ , die den Bedingungen (3.45) und (3.43) genügt, bezeichnet man als ein **vollständiges Integral** der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) + H\left(q, \nabla_q f(q, t), t\right) = 0$$

(die von  $f$  selbst frei<sup>39</sup> ist). In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung wird gezeigt,<sup>40</sup> daß für ‘vernünftige’  $H$  stets (lokal) ein vollständiges Integral existiert; d.h.:

Es existiert (lokal) stets eine Erzeugende  $F_2$ , die (3.45)/(3.43) erfüllt. Für jede kanonische Transformation (3.29) vom Typ (3.37)/(3.38), deren Erzeugende  $F_2$  (3.45)/(3.43) erfüllt, gilt<sup>41</sup>

$$\left. \begin{array}{l} (3.17) \\ (3.18) \end{array} \right\} \iff \dot{Q}(t) = \dot{P}(t) = 0$$

Daraus folgt der sog.

**Satz von LIOUVILLE:** Für Lösungen  $(q(t), p(t))$  der kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18) gilt

$$1 = \frac{\partial\left(q^1(t_2), \dots, p_n(t_2)\right)}{\partial\left(q^1(t_1), \dots, p_n(t_1)\right)}$$

für beliebige Zeitpunkte  $t_1, t_2$  (im Definitionsbereich der  $q, p$ ).

**Beweisskizze:** Es genügt, den Satz lokal für hinreichend kleine  $|t_1 - t_2|$  zu beweisen. Dann existiert jeweils eine kanonische Transformation, für die aus den kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18)

$$Q(t_1) = Q(t_2), \quad P(t_1) = P(t_2)$$

folgt. Für diese gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(q^1(t_2), \dots, p_n(t_2)\right)}{\partial\left(q^1(t_1), \dots, p_n(t_1)\right)} &= \frac{\partial\left(q^1(t_2), \dots, p_n(t_2)\right)}{\partial\left(Q^1(t_2), \dots, P_n(t_2)\right)} \cdot \frac{\partial\left(Q^1(t_1), \dots, P_n(t_1)\right)}{\partial\left(q^1(t_1), \dots, p_n(t_1)\right)} \\ &= \left( \frac{\partial\left(Q^1(t_2), \dots, P_n(t_2)\right)}{\partial\left(q^1(t_2), \dots, p_n(t_2)\right)} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial\left(Q^1(t_1), \dots, P_n(t_1)\right)}{\partial\left(q^1(t_1), \dots, p_n(t_1)\right)}. \end{aligned}$$

Mit (3.42) folgt daraus die Behauptung. ■

<sup>39</sup>In die Differentialgleichung gehen nur partielle Ableitungen von  $f$  ein, nicht  $f$  selbst.

<sup>40</sup>Siehe z.B. (Kamke, 1965, Abschnitt 12.9).

<sup>41</sup>**Lokal** sind also alle mechanischen Systeme gleicher Anzahl der Freiheitsgrade äquivalent!

**Anmerkungen:**

- (i) Der Satz von LIOUVILLE besagt, daß Phasenraumvolumina bei der kanonischen Zeitentwicklung erhalten bleiben, **wenn** man den Phasenraum als euklidischen  $\mathbb{R}^{2n}$  auffassen kann.
- (ii) Dann folgt, daß für eine statistische Gesamtheit gleichartiger Systeme, die sich unabhängig voneinander entspr. (3.17)/(3.18) bewegen, die Systemzahldichte in der Umgebung jedes Einzelsystems im Phasenraum zeitlich konstant bleibt.

Im Zusammenhang mit Anmerkung (i) von Interesse ist der folgende Satz:

**POINCARÉSCHES WIEDERKEHRTHEOREM:** Sei  $F$  eine umkehrbare, stetige Abbildung eines beschränkten Gebietes  $\mathcal{G}$  des  $\mathbb{R}^{2n}$  in sich, die volumenerhaltend ist:

$$|F(\mathcal{G}')| = |\mathcal{G}'| \quad \text{für alle einfachen Teilgebiete } \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}.$$

Dann existieren zu jedem einfachen Teilgebiet  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  ein  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}'$  und eine natürliche Zahl  $N$  mit  $F^N(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}'$ .

**Beweis:** Sei ein einfaches Teilgebiet  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  beliebig vorgegeben. Dann können die Mengen  $F^j(\mathcal{G}') \subset \mathcal{G}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , nicht alle paarweise disjunkt sein, da  $\mathcal{G}$  endliches Volumen hat. Es existieren also natürliche Zahlen  $k, l$  mit

$$F^l(F^{k-l}(\mathcal{G}') \cap \mathcal{G}') = F^k(\mathcal{G}') \cap F^l(\mathcal{G}') \neq \emptyset, \quad l \leq k,$$

und somit

$$F^{k-l}(\mathcal{G}') \cap \mathcal{G}' \neq \emptyset.$$

Es existiert also ein  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}'$  mit  $F^N(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}'$  für  $N = k - l$ . ■

Für ein uneingeschränktes System von  $n$  Massenpunkten mit der HAMILTON-Funktion

$$H(x, p) = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2m} |\mathbf{p}_\nu|^2 + U(x)$$

läßt der Fluß des zugehörigen HAMILTONSchen Vektorfeldes für jeden Energiewert  $E$  das Gebiet

$$\{(x, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : H(x, p) \leq E\}$$

des Phasenraumes invariant. Im Falle

$$\sum_{\nu=1}^n |\mathbf{x}_\nu|^2 \text{ hinreichend groß} \implies V(x) > E$$

ist dieses Gebiet beschränkt und der POINCARÉsche Wiederkehrsatz läßt sich anwenden. Demnach ließe es sich durch beliebig geringfügige Änderung der Anfangsbedingungen beim JOULEschen Expansionsexperiment einrichten, daß ein Zeitpunkt existiert, zu dem die Gasmoleküle von selbst alle in die Ausgangskammer zurückgekehrt sind – in scheinbarem Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.<sup>42</sup>

### 3.2.2.2 Beispiel: Lösung durch Separationsansatz in Kugelkoordinaten

Betrachtet sei ein Massenpunkt  $m$  ohne Nebenbedingungen, auf den nur die (nicht explizit zeitabhängige) Potentialkraft  $-\text{grad}U$  wirkt, in Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ . Die LAGRANGE-Funktion ist

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r, \vartheta, \varphi),$$

Die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\begin{aligned} p_r &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} L = m \dot{r}, \\ p_{\vartheta} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} L = m r^2 \dot{\vartheta}, \\ p_{\varphi} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

die HAMILTON-Funktion ist also

$$H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_{\vartheta}, p_{\varphi}) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_{\vartheta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + U(r, \vartheta, \varphi).$$

Für  $U$  der Form

$$U(r, \vartheta, \varphi) = a(r) + \frac{b(\vartheta)}{r^2}$$

ergibt sich mit dem **Separationsansatz**

$$\begin{aligned} F_2(r, \vartheta, \varphi, P_r, P_{\vartheta}, P_{\varphi}, t) \\ = S_1(r; P_r, P_{\vartheta}, P_{\varphi}) + S_2(\vartheta; P_r, P_{\vartheta}, P_{\varphi}) + S_3(\varphi; P_r, P_{\vartheta}, P_{\varphi}) - E(P_r, P_{\vartheta}, P_{\varphi}) t \end{aligned}$$

für die HAMILTON-JACOBI-Gleichung:

$$\left( \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r} S_1 \right)^2 + a \right) + \frac{1}{2m r^2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_2 \right)^2 + 2m b \right) + \frac{1}{2m r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} S_3 \right)^2 = E.$$

Daraus folgt zunächst, daß

$$p_{\varphi} \stackrel{\text{(3.37)}}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi} S_3$$

<sup>42</sup>Bzgl. weiterer Konsequenzen des POINCARÉschen Wiederkehrtheorems siehe (Arnol'd, 1988, Abschnitt 3.5.5).

nur von  $(P_r, P_\vartheta, P_\varphi)$  abhängt; d.h. wir können  $S_3$  in der Form

$$S_3(\varphi; P_r, P_\vartheta, P_\varphi) = p_\varphi(P_r, P_\vartheta, P_\varphi) \varphi$$

ansetzen.<sup>43</sup> Dann muß aber auch eine Funktion  $\beta(P_r, P_\vartheta, P_\varphi)$  existieren mit

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_2(\vartheta; P_r, P_\vartheta, P_\varphi) \right)^2 + 2m b(\vartheta) + \frac{p_\varphi^2(P_r, P_\vartheta, P_\varphi)}{\sin^2 \vartheta} &= \beta(P_r, P_\vartheta, P_\varphi), \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r} S_1(r; P_r, P_\vartheta, P_\varphi) \right)^2 + a(r) + \frac{\beta(P_r, P_\vartheta, P_\varphi)}{2m r^2} &= E(P_r, P_\vartheta, P_\varphi). \end{aligned}$$

Indem wir

$$P_r = E, \quad P_\vartheta = \beta, \quad P_\varphi = p_\varphi$$

wählen,<sup>44</sup> führt Integration schließlich lokal auf das vollständige Integral

$$\begin{aligned} F_2(r, \vartheta, \varphi, P_r, P_\vartheta, P_\varphi, t) &= -P_r t + P_\varphi \varphi + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{P_\vartheta - 2m b(\vartheta') - \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta'}} d\vartheta' \\ &\quad + \int_{r_0}^r \sqrt{2m(P_r - a(r')) - \frac{P_\vartheta}{(r')^2}} dr' + \underbrace{f(P_r, P_\vartheta, P_\varphi)}_{\text{irrelevant}} \end{aligned}$$

der HAMILTON-JACOBI-Gleichung.<sup>45</sup>

Gemäß (3.38) sind damit die dynamisch erlaubte Bewegungen (lokal) implizit durch

$$\begin{aligned} -t + \int_{r_0}^{r(t)} \frac{m dr'}{\sqrt{2m(P_r - a(r')) - \frac{P_\vartheta}{(r')^2}}} &= Q_r = \text{const.}, \\ \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{P_\vartheta - 2m b(\vartheta') - \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta'}}} - \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{2m(P_r - a(r')) - \frac{P_\vartheta}{(r')^2}}} &= Q_\vartheta = \text{const.}, \\ \varphi(t) - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} \frac{P_\varphi d\vartheta'}{\sin^2 \vartheta' \sqrt{P_\vartheta - 2m b(\vartheta') - \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta'}}} &= Q_\varphi = \text{const.} \end{aligned}$$

gegeben. Die erste dieser Gleichungen entspricht Gleichung (3.95) d. *Math. Meth. d. Phys.* (für  $U(r) = a(r)$ ).

Version vom 26. März 2009

<sup>43</sup>Addition einer Funktion von  $P_r, P_\vartheta, P_\varphi$  würde keine Vorteile bringen.

<sup>44</sup>Welche unabhängigen Parameter wir mit den  $P$ 's identifizieren, spielt ja keine Rolle.

<sup>45</sup>Daß die Vollständigkeitsbedingung

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_r} \frac{\partial}{\partial r} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\vartheta} \frac{\partial}{\partial r} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\varphi} \frac{\partial}{\partial r} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial P_r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial P_r} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_2 & \frac{\partial}{\partial P_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_2 \end{pmatrix} \stackrel{(3.38)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} Q_r & \frac{\partial}{\partial r} Q_\vartheta & \frac{\partial}{\partial r} Q_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} Q_r & \frac{\partial}{\partial \vartheta} Q_\vartheta & \frac{\partial}{\partial \vartheta} Q_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} Q_r & \frac{\partial}{\partial \varphi} Q_\vartheta & \frac{\partial}{\partial \varphi} Q_\varphi \end{pmatrix}$$

für einen geeigneten (vom betrachteten  $r, \vartheta, \varphi$ -Bereich abhängigen)  $P$ -Bereich erfüllt ist, erkennt man sofort aus der nachfolgenden Angabe der  $Q$ -Funktionen.

### 3.2.3 Übergang zur Quantenmechanik

#### 3.2.3.1 Analogie zur Optik

Im folgenden sei nur ein konservatives 1-Teilchen-System ohne Nebenbedingungen in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}$  betrachtet. Die HAMILTONSche Funktion ist also

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

und der (wegen  $\frac{\partial}{\partial t}H = 0$  mögliche) Ansatz

$$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t) = S(\mathbf{x}, \mathbf{P}) - Et, \quad E \stackrel{\text{def}}{=} P_1, \quad (3.46)$$

für eine Lösung von (3.45)/(3.43) führt (lokal!) auf die partielle Differentialgleichung

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}S(\mathbf{x}, \mathbf{P})\right)^2 = 2m\left(E - V(\mathbf{x})\right). \quad (3.47)$$

Nach (3.37) folgt daraus

$$|\mathbf{p}|^2 = 2m\left(E - V(\mathbf{x})\right) \quad (3.48)$$

und somit  $E = H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  (im Einklang mit (3.22)); d.h. für dynamisch erlaubte Bewegungen ist  $E$  als Energie zu interpretieren.

Von nun ab sei  $\mathbf{P}$  fest gewählt und im Variablensatz von  $S$  nicht mehr explizit angegeben. Dann hat Gleichung (3.47) die gleiche Form wie die sog. **Eikonal-Gleichung**:

$$\left(\text{grad } L(\mathbf{x})\right)^2 = \left(n(\mathbf{x})\right)^2 \quad (3.49)$$

Der Zusammenhang von (3.49) mit der skalaren Wellengleichung der Optik **inhomogener** (isotroper, dispersionsfreier) Medien

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{n(\mathbf{x})}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.50)$$

in der  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $n(\mathbf{x})$  den Brechungsindex des optischen Mediums bezeichnet, ist folgender:

Man macht für die Welle  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  den Ansatz

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \exp\left(A(\mathbf{x}) + ik_0(L(\mathbf{x}) - ct)\right) \quad (3.51)$$

mit reellen  $A, L$ . Dabei ist  $A(\mathbf{x})$  der ln der Amplitude und  $L(\mathbf{x})$ , die sog. **optische Weglänge** (auch **Eikonal** genannt), beschreibt die Flächen räumlich und zeitlich konstanter Phase

$$k_0\left(L(\mathbf{x}) - ct\right) = \varphi = \text{konst.},$$

auch **Wellenfronten** genannt. Wegen

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= (\Delta(A + ik_0L) + (\nabla(A + ik_0L))^2) \Phi \\ &= (\Delta A + (\nabla A)^2 - (k_0\nabla L)^2 + ik_0(\Delta L + 2(\nabla A) \cdot \nabla L)) \Phi\end{aligned}$$

ist (3.50) äquivalent zur Gültigkeit von

$$\Delta L + 2(\nabla A) \cdot \nabla L = 0$$

und

$$\Delta A + (\nabla A)^2 + k_0^2 (n^2 - (\nabla L)^2) = 0.$$

Daraus ergibt sich im geometrisch optischen Bereich

$$k_0 \gg |\text{grad } n(\mathbf{x})|, |\text{grad } A(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

(3.49) als konsistente **Näherungsgleichung** für  $L$ .

Die Lichtstrahlen, nach der Korpuskulartheorie des Lichtes die Bahnkurven der Lichtteilchen, sind die Orthogonaltrajektorien der Wellenfronten. Auch das steht in Analogie zur Mechanik, wo die Teilchenbahnen gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \nabla_{\mathbf{x}} F_2(\mathbf{x}, t) \\ (3.37) & \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x}) \\ (3.46) &\end{aligned}$$

die durch

$$S(\mathbf{x}) - Et = \text{konst.}$$

charakterisierten Wellenfronten senkrecht schneiden.<sup>46</sup>

**Warnung:** Die Teilchengeschwindigkeit stimmt i.a. nicht mit der **Phasengeschwindigkeit**, d.h. der Ausbreitungsgeschwindigkeit<sup>47</sup>  $E/|\mathbf{p}|$  der entsprechenden Wellenfront überein!

Version vom 26. März 2009

<sup>46</sup>Allerdings schränkt die Wahl von  $\mathbf{P}$  die Menge der tatsächlich möglichen Teilchenbahnen i.a. stark ein! Z.B. muß  $E - V(\mathbf{x}) > 0$  für dynamisch erlaubte Bewegungen gelten.

<sup>47</sup>Für einen gedachten Punkt mit Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$ , der sich mit Wellenfrontgeschwindigkeit senkrecht zur entsprechenden Wellenfront bewegt, gilt nämlich:

$$0 = \frac{d}{dt} F_2 \stackrel{(3.46)}{=} \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} S - E = |\dot{\mathbf{x}}| |\nabla_{\mathbf{x}} S| - E \stackrel{(3.37)}{=} |\dot{\mathbf{x}}| |\mathbf{p}| - E.$$

### 3.2.3.2 Die SCHRÖDINGER-Gleichung

Aufgrund o.a. Analogie lag es — für SCHRÖDINGER<sup>48</sup> — **nach** experimenteller Entdeckung der Wellennatur der Materie nahe, eine Wellentheorie aufzustellen, deren geometrisch-optische Näherung die klassische Mechanik ist:

Dabei sollte

$$\hbar^{-1} \left( S(\mathbf{x}) - Et \right),$$

wobei der Faktor  $\hbar$  aus Dimensionsgründen notwendig ist, die Rolle der zeitabhängigen Wellenphase

$$k_0 \left( L(\mathbf{x}) - ct \right)$$

von (3.51) übernehmen. Entsprechend ist  $k_0 c$  durch  $\frac{E}{\hbar}$  sowie  $k_0 L(\mathbf{x})$  durch  $\frac{S(\mathbf{x})}{\hbar}$  und somit nach (3.47)/(3.49)  $\left( k_0 n(\mathbf{x}) \right)^2$  durch  $\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - V(\mathbf{x}) \right)$  zu ersetzen. Dann gehen die zu (3.51)/(3.50) äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= e^{-ik_0 ct} \Phi(\mathbf{x}), \\ \Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) + \left( k_0 n(\mathbf{x}) \right)^2 \Phi(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

über in die Gleichungen<sup>49</sup>

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \Psi(\mathbf{x}), \quad (3.52)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}) \right) \Psi(\mathbf{x}) = E \Psi(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

für die gesuchte Materiewelle  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ .

Gleichung (3.53) ist die sog. *zeitunabhängige* SCHRÖDINGER-**Gleichung**, die sich auch in der Form

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) \Psi(\mathbf{x}) = E \Psi(\mathbf{x})$$

schreiben läßt, wobei die durch

$$\hat{\mathbf{p}} \Psi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} \Psi(\mathbf{x})$$

für hinreichend gutartige  $\Psi(\mathbf{x})$  definierten Operatoren  $\hat{p}_j, \hat{x}^j$  den (3.26) entsprechenden Vertauschungsrelationen

$$(\hat{p}_j \hat{p}_k - \hat{p}_k \hat{p}_j) = (\hat{x}^j \hat{x}^k - \hat{x}^k \hat{x}^j) = 0, \quad i\hbar (\hat{x}^j \hat{p}_k - \hat{p}_k \hat{x}^j) = \delta_k^j$$

genügen.

<sup>48</sup>Siehe (Straumann, 2001).

<sup>49</sup>Dem geometrisch-optischen Bereich entspricht  $\hbar \ll 1$ .

Anstelle der (3.50) entspr.  $E$ -abhängigen Wellengleichung benutzt man nun besser die für (3.52) zu (3.53) äquivalente

**zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung:**

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.54)$$

die nun wieder die Superposition von Lösungen unterschiedlicher Frequenzen erlaubt.

**Anmerkung:** Wenn man die Wellenfunktionen in der Form

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{x}, t)}$$

mit reellen  $A, S$  schreibt, dann ist die komplexe Gleichung (3.54) (für hinreichend gutartige  $A, S$ ) äquivalent zu den beiden reellen Gleichungen<sup>50</sup>

$$A \frac{\partial}{\partial t} S + A \frac{(\nabla S)^2}{2m} + AV = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta A \quad (3.55)$$

und

$$m \frac{\partial}{\partial t} A + (\nabla A) \cdot (\nabla S) + \frac{A}{2} \Delta S = 0. \quad (3.56)$$

Mit

$$\mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \Re \left( \overline{\Psi} \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \Psi \right) = \frac{1}{m} A^2 \nabla S, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} |\Psi|^2 = A^2$$

wird (3.56), nach Multiplikation mit  $\frac{2}{m} A$ , zur Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

und (3.55) geht für  $\hbar \rightarrow 0$  über in die HAMILTON-JACOBI-Gleichung für  $S$ :

$$\underbrace{\frac{(\nabla S)^2}{2m}}_{=H(\mathbf{x}, \text{grad } S)} + V + \frac{\partial}{\partial t} S = 0$$

(WKB-Näherung). Die naive Interpretation der Lösungen von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t) / \rho(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{m} \nabla S(\mathbf{x}(t), t)$$

als Teilchentrajektorien ist heute noch als BOHMSche Mechanik populär.<sup>51</sup>

Die gesamte physikalische Standard-Interpretation von (3.54) läßt sich aus der Annahme ableiten, daß  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  die Ortswahrscheinlichkeitsdichte zum Zeitpunkt  $t$  ist; d.h. daß für einfache Gebiete  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathcal{G}} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 dV_{\mathbf{x}} = \text{Wahrscheinlichkeit für Position innerhalb } \mathcal{G} \text{ zur Zeit } t$$

gilt.<sup>52</sup>

Version vom 26. März 2009

<sup>50</sup>Man multipliziere (3.54) mit  $e^{-\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{x}, t)}$ .

<sup>51</sup>Siehe z.B. (Dürr, 2001)

<sup>52</sup>Siehe z.B. (Mielnik, 1974) und (Lücke, 1995, Abschnitt 5).

### 3.3 Periodische und bedingt Periodische Bewegungen

Im folgenden verwenden wir wieder lokale Koordinaten  $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$ ,  $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$ , ohne jeweils auf die nur lokale Gültigkeit der entsprechenden Beziehungen hinzuweisen.<sup>53</sup> Der Einfachheit halber setzen wir auch voraus, daß die  $\mathbf{x}_\nu(q, t)$  nicht explizit von der Zeit abhängen. Dementsprechend fassen wir den **Phasenraum**<sup>54</sup>  $\mathcal{M}$  einfach als  $2n$ -dimensionalen  $(q, p)$ -Raum auf.

#### 3.3.1 Invariante Untermannigfaltigkeiten des Phasenraumes

Seien  $S_1(q, p), \dots, S_l(q, p)$  (hinreichend gutartige) Funktionen auf dem Phasenraum  $\mathcal{M}$  und sei  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge von  $\mathcal{M}$ . Dann nennt man die  $S_j$  **unabhängig** voneinander auf  $\mathcal{T}$ , wenn die

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_1}{\partial q^n} \\ \frac{\partial S_1}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_1}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial S_2}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_2}{\partial q^n} \\ \frac{\partial S_2}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_2}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial S_l}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_l}{\partial q^n} \\ \frac{\partial S_l}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S_l}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

für alle  $(q, p) \in \mathcal{T}$  einen linear unabhängigen Satz von Spalten-Vektoren darstellen. Das ist offensichtlich äquivalent dazu, daß die

$$X_{S_j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial S_j}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} - \frac{\partial S_j}{\partial q^\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right), \quad j \in \{1, \dots, l\}, \quad (3.57)$$

an jeder Stelle  $(q, p) \in \mathcal{T}$  linear unabhängig voneinander sind.

**Lemma 3.3.1** Seien  $S_1(q, p), \dots, S_l(q, p)$  (hinreichend gutartige) Funktionen auf  $\mathcal{M}$ , sei

$$\mathcal{T}_s \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, p) \in \mathcal{M} : S_j(q, p) = s^j \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}\} \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^l.$$

und seien  $s_{\text{spez}}^1, \dots, s_{\text{spez}}^l$  vorgegebene Werte. Wenn die  $S_j$  **unabhängig** voneinander auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\mathbf{s}_{\text{spez}}}$  sind, dann existieren zu jedem Punkt von  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  eine in  $\mathcal{M}$

<sup>53</sup>Diesbezüglich sei an die Vorbemerkung zu 1.2.1 erinnert.

<sup>54</sup>Siehe Fußnote 28.

offene Umgebung mit (hinreichend gutartigen) Koordinaten  $\xi^1, \dots, \xi^{2n-l}, s^1, \dots, s^l$ , in denen

$$\begin{aligned} & \left( q(\xi^1, \dots, \xi^{2n-l}, s^1, \dots, s^l), p(\xi^1, \dots, \xi^{2n-l}, s^1, \dots, s^l) \right) \in \mathcal{T}_{\text{spez}} \\ \iff & s^1 - s^1_{\text{spez}} = \dots = s^l - s^l_{\text{spez}} = 0 \end{aligned}$$

gilt.<sup>55</sup>

**Beweisskizze:** Sei  $(\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}$  und seien die  $S_j$  **unabhängig** voneinander auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$ . Dann existiert eine offene Umgebung von  $(\hat{q}, \hat{p})$  mit Koordinaten  $\xi^1, \dots, \xi^{2n-l}, \eta^1, \dots, \eta^l$ , in denen

$$\frac{\partial(S_1, \dots, S_l)}{\partial(\eta^1, \dots, \eta^l)} \neq 0$$

gilt. Gemäß Fußnote 31 ist also das Gleichungssystem

$$S_j(\xi^1, \dots, \xi^{2n-l}, \eta^1, \dots, \eta^l) = s^j \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}$$

(lokal) nach den  $\eta^1, \dots, \eta^l$  auflösbar. Daraus folgt die Behauptung. ■

**Anmerkung:** Wir verzichten darauf, neue Symbole für Funktionen zu verwenden, wenn wir sie in anderen Variablen ausdrücken; vgl. Abschnitt 1.2.3 von (Lücke, tdst).

Man nennt  $X_{S_j}$  **tangential** auf  $\mathcal{T}$ , wenn zu jedem  $(\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}$  jeweils eine (hinreichend gutartige) Kurve  $\left\{ (q(t), p(t)) : t \in [t_1, t_2] \right\} \subset \mathcal{T}$  mit

$$(q(t_1), p(t_1)) = (\hat{q}, \hat{p}),$$

existiert, die der Bedingung

$$\frac{d}{dt} g(q(t), p(t)) = (X_{S_j} g)(q(t), p(t)) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

für alle (hinreichend gutartigen) Funktionen  $g(q, p)$  auf  $\mathcal{M}$  genügt.

Man nennt  $S_j, S_{j'}$  **in Involution** zueinander, falls

$$\{S_j, S_{j'}\}_{q,p} = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathcal{M}$$

gilt.

**Lemma 3.3.2** Seien  $S_1(q, p), \dots, S_l(q, p)$  sowie  $s^1_{\text{spez}}, \dots, s^l_{\text{spez}}$  und  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  wie in Lemma 3.3.1 vorgegeben. Wenn die  $S_j$  paarweise in Involution sind, dann folgt daraus, daß sie tangential auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sind.

---

Version vom 26. März 2009

<sup>55</sup>Das bedeutet nichts anderes als daß  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  als  $2n - l$ -dimensionale (nicht notwendig zusammenhängende) Untermannigfaltigkeit (siehe Definition A.1.2) von  $\mathcal{M}$  aufgefaßt werden kann.

**Beweisskizze:** Zu beliebig vorgegebenen  $j \in \{1, \dots, l\}$  und  $(\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}$  lösen wir das Anfangswertproblem

$$(q(t_1), p(t_1)) = (\hat{q}, \hat{p}) \quad (3.58)$$

für das kanonische Differentialgleichungssystem

$$\dot{q}^\nu = \frac{\partial}{\partial p_\nu} S_j, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial}{\partial q^\nu} S_j.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(q, p) &= \sum_{\nu=1}^n \left( \dot{q}^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} + \dot{p}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) g \\ &\stackrel{(3.57)}{=} (X_{S_j} g)(q, p) \end{aligned} \quad (3.59)$$

für jede (hinreichend gutartige) Funktion  $g$  auf  $\mathcal{M}$ . Hieraus folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{j'} &= X_{S_j} S_{j'} \\ &\stackrel{(3.20)}{=} \{S_j, S_{j'}\}_{q,p} \\ &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} 0 \end{aligned}$$

für alle  $j' \in \{1, \dots, l\}$  und somit  $(q(t), p(t)) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}$ . Mit (3.58) und (3.59) folgt daraus, daß das betrachtete  $X_{S_j}$  tangential auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  ist. ■

**Lemma 3.3.3** Sei  $\Gamma$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die folgenden Bedingungen genügt:

1.  $\Gamma$  ist eine **Vektorgruppe**, d.h. es gilt

$$\mathbf{t} \in \Gamma \implies -\mathbf{t} \in \Gamma$$

und

$$\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \Gamma \implies \mathbf{t} + \mathbf{t}' \in \Gamma.$$

2. Diese Vektorgruppe ist **diskret**, d.h. es existiert ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\|\mathbf{t}\| > \epsilon \quad \forall \mathbf{t} \in \Gamma \setminus \{0\}.$$

Dann ist entweder  $\Gamma = \{0\}$  oder existieren ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  und linear unabhängige Vektoren  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k \in \Gamma$  mit<sup>56</sup>

$$\Gamma = \left\{ \sum_{r=1}^k j^r \mathbf{t}_r : j^1, \dots, j^k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>56</sup>Der Fall  $k = n = 3$  ist für die Kristallphysik wichtig; siehe dazu (Ljubarski, 1962, § 11, Satz 1).

**Beweis:** Siehe (Arnol'd, 1988, Abschnitt 10.1.4, Lemma 3). ■

**Lemma 3.3.4** Seien  $S_1(q, p), \dots, S_n(q, p)$  sowie  $s_{\text{spez}}^1, \dots, s_{\text{spez}}^n$  und  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  wie in Lemma 3.3.1 (für  $l = n$ ) vorgegeben und sei  $\{\hat{F}_t^j\}_{t \in \mathbb{R}}$  jeweils der, auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  eingeschränkte,  $X_{S_j}$  entsprechende Fluß. Die  $S_j$  seien paarweise in Involution und unabhängig auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  und  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sei zusammenhängend. Dann genügen die durch  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  parametrisierten Abbildungen

$$\hat{F}_{\mathbf{t}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_{t^1}^1 \cdots \hat{F}_{t^n}^n \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$$

folgenden drei Bedingungen:

1.

$$\hat{F}_{\mathbf{t}} \hat{F}_{\mathbf{t}'} = \hat{F}_{\mathbf{t}+\mathbf{t}'} \quad \forall \mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^n.$$

2.

$$\mathcal{T}_{\text{spez}} = \left\{ \hat{F}_{\mathbf{t}}(\hat{q}, \hat{p}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \forall (\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}.$$

3.

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : \hat{F}_{\mathbf{t}} = \hat{F}_0 \right\} \quad \text{ist eine diskrete Vektorgruppe.}$$

**Anmerkung:** Der  $X_{S_j}$  entsprechende, auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  eingeschränkte, **Fluß** ist die durch

$$\hat{F}_t^j(\hat{q}, \hat{p}) \stackrel{\text{def}}{=} (q(t_1 + t), p(t_1 + t)) \quad \text{gemäß (3.58)/(3.59)}$$

charakterisierte Schar von Abbildungen  $\hat{F}_t^j$ ; vgl. Abschnitt 5.1.1 von (Lücke, ein).

**Beweisskizze zu Lemma 3.3.4:** Da gemäß Übungsaufgabe 35 b)

$$X_{\{S_{j_1}, S_{j_2}\}_{q,p}} = [X_{S_{j_1}}, X_{S_{j_2}}]_-,$$

gilt und die  $S_j$  in Involution auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sind, vertauschen die  $X_{S_j}$  miteinander auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  und somit<sup>57</sup> auch die  $\hat{F}_t^j$ . Mit der Flußeigenschaft

$$\hat{F}_t^j \hat{F}_{t'}^j = \hat{F}_{t+t'}^j \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, l\}$$

folgt daraus, daß die erste Bedingung für die  $\hat{F}_{\mathbf{t}}$  erfüllt ist.

Sei nun  $(\hat{q}, \hat{p})$  ein beliebiger Punkt in  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  und seien  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  (hinreichend gutartige) Koordinaten einer offenen Teilmenge von  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$ , die  $(\hat{q}, \hat{p})$  enthält. Mit  $(\hat{\xi}^1(\mathbf{t}), \dots, \hat{\xi}^n(\mathbf{t}))$  seien jeweils die entsprechenden Koordinaten von  $\hat{F}_{\mathbf{t}}(\hat{q}, \hat{p})$  bezeichnet. Da die  $X_{S_j}$  auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  linear unabhängig sind, gilt dann

$$\frac{\partial(\hat{\xi}^1, \dots, \hat{\xi}^n)}{\partial(t^1, \dots, t^n)} \neq 0.$$

<sup>57</sup>Siehe (Arnol'd, 1988, Abschnitt 8.3.5).

Das Gleichungssystem

$$\hat{\xi}^j(\mathbf{t}) = \xi^j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

ist also (lokal) nach den  $t^1, \dots, t^n$  auflösbar,<sup>58</sup> d.h. alle Punkte einer (hinreichend kleinen) offenen Umgebung von  $(\hat{q}, \hat{p})$  in  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  ergeben sich durch Anwendung von  $\hat{F}_{\mathbf{t}}$  mit geeignetem  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$  auf  $(\hat{q}, \hat{p})$ . Da  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  voraussetzungsgemäß zusammenhängend ist,<sup>59</sup> folgt daraus mit der Gültigkeit der ersten Bedingung auch die Gültigkeit der zweiten Bedingung.

Die obigen Betrachtungen zeigen auch, daß für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$

$$0 \neq \|\mathbf{t}\| < \epsilon \implies \hat{F}_{\mathbf{t}} \neq \hat{F}_0$$

gilt. Mit der ersten Bedingung muß deshalb auch dritte Bedingung erfüllt sein. ■

**Folgerung 3.3.5** Seien  $S_1(q, p), \dots, S_n(q, p)$  sowie  $s_{\text{spez}}^1, \dots, s_{\text{spez}}^n$  und  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  wie in Lemma 3.3.4 vorgegeben und sei  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  außerdem kompakt. Dann ist  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  ein  $n$ -**Torus**, d.h. es existieren hinreichend gutartige Funktionen  $q^\nu(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  und  $p^\nu(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  über  $\mathbb{R}^n$ , für die folgendes gilt:

1.

$$\mathcal{T}_{\text{spez}} = \left\{ \left( q(\varphi), p(\varphi) \right) : \varphi \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

2.

$$\begin{aligned} \left( q(\varphi_1), p(\varphi_1) \right) &= \left( q(\varphi_2), p(\varphi_2) \right) \\ \iff \left( \varphi_1^j = \varphi_2^j \bmod 2\pi \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \right). \end{aligned}$$

3. Zu jedem  $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert eine offene Umgebung, über der die Abbildung

$$\varphi \longmapsto \left( q(\varphi), p(\varphi) \right)$$

eine (hinreichend gutartige) Inverse hat.

Falls  $S_1(q, p)$  mit der HAMILTON-Funktion  $H(q, p)$  übereinstimmt, dann läßt die Dynamik  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  invariant und es existiert ein konstanter Vektor  $\omega_{\text{spez}}$ , mit dem die kanonischen Gleichungen für Bewegungen auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = \omega_{\text{spez}}$$

sind.<sup>60</sup>

<sup>58</sup>Hier ist die Anzahl der  $S_j$  wichtig.

<sup>59</sup>Je zwei Punkte in  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  lassen sich also durch einen stetigen Weg verbinden, der ganz in  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  verläuft. Ein solcher Weg läßt sich nach obigem Ergebnis stets durch offene Intervalle überdecken, deren Punkte sich alle durch geeignete  $\hat{F}_{\mathbf{t}}$  ineinander transformieren lassen.

<sup>60</sup>Solche Bewegungen bezeichnet man als **periodisch**, wenn die  $\omega_{\text{spez}}^\nu$  rationale Vielfache voneinander sind, sonst als bedingt periodisch.

**Beweisskizze:** Da  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  kompakt ist, kommt der Fall  $\Gamma = \{0\}$  für die in Lemma 3.3.4 definierte Vektorgruppe nicht in Frage. Nach Lemma 3.3.3 existieren deshalb ein  $k \in \{1, \dots, k\}$  und eine rückeindeutige lineare Abbildung

$$\varphi \longmapsto \mathbf{t}(\varphi)$$

von  $\mathbb{R}^n$  auf sich, für die

$$\{\hat{F}_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n\} = \{\hat{F}_{\mathbf{t}(\varphi)} : \varphi \in \mathbb{R}^n\}$$

und

$$\hat{F}_{\mathbf{t}(\varphi_1)} = \hat{F}_{\mathbf{t}(\varphi_2)} \iff (\varphi_1^j = \varphi_2^j \bmod 2\pi \quad \forall j \in \{1, \dots, k\})$$

gilt. Da  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  kompakt ist und aus den ersten beiden Bedingungen von Lemma 3.3.4

$$(\mathbf{F}_{\mathbf{t}}(\hat{q}, \hat{p}) = (\hat{q}, \hat{p}) \iff \mathbf{t} \in \Gamma) \quad \forall (\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}$$

folgt, muß  $k = n$  sein. Nach Lemma 3.3.4 ist deshalb

$$\mathbb{R}^n \nu \varphi \longmapsto (q(\varphi), p(\varphi)) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_{\mathbf{t}(\varphi)}(\hat{q}, \hat{p})$$

für beliebig vorgegebenes  $(\hat{q}, \hat{p}) \in \mathcal{T}_{\text{spez}}$  eine Abbildung der gesuchten Art. Daß die Dynamik  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  im Falle  $S_1 = H$  invariant läßt, ist aufgrund der zweiten Bedingung von Lemma 3.3.4 klar und entsprechende Bewegungen auf  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sind durch

$$(q(t), p(t)) = \hat{F}_{\mathbf{t}(\varphi(t))}(\hat{q}, \hat{p})$$

mit

$$\mathbf{t}(\varphi(t)) = \mathbf{t}(\varphi(0)) + (t, 0, \dots, 0)$$

gegeben. Aus letzterem folgt

$$\mathbf{t}(\dot{\varphi}(t)) = \frac{d}{dt} \mathbf{t}(\varphi(t)) = (1, 0, \dots, 0)$$

und damit aufgrund der Rückeindeutigkeit der Abbildung  $\varphi \mapsto \mathbf{t}(\varphi)$  die  $t$ -Unabhängigkeit von  $\dot{\varphi}(t)$ . ■

### 3.3.2 Winkel- und Wirkungsvariable

Wie die Darlegungen in 3.3.1 zeigen, existiert unter den Voraussetzungen von Folgerung 3.3.5 also eine Umgebung von  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$ , für die die in Folgerung 3.3.5 aufgewiesenen  $\varphi^\nu$  zusammen mit den Werten  $s^\nu$  der Funktionen  $S_\nu$  lokale Koordinaten sind, in denen die kanonischen Gleichungen —  $S_j = H$  vorausgesetzt — äquivalent zu

$$\dot{\varphi}^\nu = \omega^\nu(\mathbf{s}), \quad \dot{s}^\nu = 0$$

sind, wenn man die Funktionen  $\omega^\nu(\mathbf{s})$  richtig wählt. Das führt auf folgende

**Vermutung:** Die  $s^\nu$  lassen sich durch Koordinaten  $I_\nu$  ersetzen, für die

$$(q, p) \longmapsto \left( \underbrace{\varphi}_{\cong Q}, \underbrace{I}_{\cong P} \right)$$

eine (lokale) kanonische Transformation vom Typ (3.37)–(3.39) ist:<sup>61</sup>

$$p_\nu = \frac{\partial}{\partial q^\nu} \underbrace{S}_{\cong F_2}(q, I), \quad (3.60)$$

$$\varphi^\nu = \frac{\partial}{\partial I_\nu} S(q, I), \quad (3.61)$$

$$K(I) = H\left(q, \nabla_q S(q, I)\right). \quad (3.62)$$

**Falls** diese Vermutung richtig ist, dann gilt (lokal)

$$S(q, I) - S(q_0, I) = \int_{q_0}^q p(q, I) dq \quad (3.63)$$

und die kanonischen Gleichungen sind (lokal) äquivalent zu

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial I_\nu} K(I), \quad \dot{I}_\nu = 0. \quad (3.64)$$

**Anmerkung:** Da die  $S_j$  in Involution sind, läßt sich — mithilfe einer entsprechenden Verallgemeinerung des Satzes von STOKES — zeigen, daß die rechte Seite von (3.63) nicht von der genauen Wahl des Integrationswegs zu festem  $I$  abhängt. Von diesem Sachverhalt werden wir im folgenden wiederholt stillschweigend Gebrauch machen.

Der Einfachheit halber sei zusätzlich angenommen, daß die  $q_\nu$  und  $I_\nu$  Koordinaten für eine Umgebung von ganz  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sind. Dann erkennt man besonders leicht,<sup>62</sup> daß für jede der geschlossenen Kurven

$$\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\varphi, I) : \varphi^\nu \in [0, 2\pi), \varphi^\mu = \varphi_0^\mu \text{ for } \mu \neq \nu \right\} \quad (3.65)$$

(mit  $\mathbf{s}(I)$  nahe genug bei  $\mathbf{s}_{\text{spez}}$ )

$$\frac{\partial}{\partial I_\mu} \int_{\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0}(I)} dS \stackrel{(3.61)}{=} \int_{\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0}(I)} d\varphi^\mu = 2\pi \delta_{\nu\mu}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>61</sup>Daß die rechte Seite von (3.62) nur von  $I$  abhängt, folgt daraus, daß  $H = S_1$  auf  $\mathcal{T}_{\mathbf{s}(I)}$  konstant ist.

<sup>62</sup>Durch Verwendung eben dieser Koordinaten bei der Wegintegration.

und somit

$$\begin{aligned}
 I_\nu - \underbrace{\text{const.}}_{\text{irrelevant}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0(I)}} dS \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0(I)}} \sum_{\nu=1}^2 \frac{\partial}{\partial q^\nu} S(q, I) dq^\nu \\
 &\stackrel{(3.60)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\nu^{\varphi_0(I)}} \sum_{\nu=1}^2 p_\nu(q, I) dq^\nu
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

gilt. Somit führt o.a. Vermutung auf folgendes

**Lösungsverfahren:**<sup>63</sup> Man wähle zu jedem  $\nu \in \{1, \dots, n\}$  eine stetig von  $\mathbf{s}$  abhängige Schar geschlossener Wege  $\mathcal{C}_\nu(\mathbf{s})$  auf  $\mathcal{T}_\mathbf{s}$  so, daß die Wege  $\mathcal{C}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathcal{C}_n(\mathbf{s})$  für jeweils gleiches  $\mathbf{s}$  auf  $\mathcal{T}_\mathbf{s}$  nicht zueinander homotop<sup>64</sup> sind. Damit definiert man entsprechend (3.66)

$$I_\nu(\mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\nu(\mathbf{s})} \sum_{\nu=1}^2 p_\nu(q, I) dq^\nu,$$

Wenn für die so definierten  $I_\nu(\mathbf{s})$  die Bedingung

$$\frac{\partial(I_1, \dots, I_n)}{\partial(s^1, \dots, s^n)} \neq 0$$

erfüllt ist, dann ist die (3.63) entsprechende Definition

$$S(q, I) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{q_0}^q p(q, I) dq,$$

von der genauen Wahl des lokalen<sup>65</sup> Weges auf  $\mathcal{T}_{\mathbf{s}(I)}$  unabhängig und wir können entsprechend (3.61) (lokal)

$$\varphi^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial I_\nu} S(q, I)$$

definieren. Mit den so definierten **Winkelvariablen**  $\varphi^\nu$  und **Wirkungsvariablen**  $I_\nu$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 \left( q(\varphi_1, I), p(\varphi_1, I) \right) &= \left( q(\varphi_2, I), p(\varphi_2, I) \right) \\
 \iff \varphi_1^\nu &= \varphi_2^\nu \text{ mod } 2\pi \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

Version vom 26. März 2009

<sup>63</sup>Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, daß die  $q_\nu$  und  $I_\nu$  Koordinaten für eine Umgebung von ganz  $\mathcal{T}_{\text{spez}}$  sind.

<sup>64</sup>Zwei Wege auf einer Mannigfaltigkeit heißen zueinander **homotop**, wenn sie sich auf dieser Mannigfaltigkeit stetig ineinander deformieren lassen.

<sup>65</sup>Wenn man die Weglänge nicht beschränkt, wird  $S$  mehrwertig, was sich aber auf die Transformationsformeln nicht auswirkt.

und

$$(q, p) \longmapsto (\varphi, I)$$

ist tatsächlich eine kanonische Transformation vom Typ (3.37)–(3.39) mit der (lokalen) Erzeugenden  $S(q, I)$  (statt  $F_2(q, P)$ ), wobei

$$K(q, I) \stackrel{\text{def}}{=} H\left(q, \nabla_q S(q, I)\right)$$

nur von  $I$  abhängt, sodaß die kanonischen Gleichungen wirklich äquivalent zu (3.64) und somit trivial lösbar sind.

In der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung der frühen Quantenmechanik wurden die erlaubten Zustände durch die Bedingung

$$\frac{I_\nu}{2\pi\hbar} \in \mathbb{Z}_+$$

ausgewählt. Heute noch sind die Winkel- und Wirkungsvariablen für die störungstheoretische Behandlung mechanischer Systeme von Bedeutung.<sup>66</sup>

# Anhang A

## Symplektische Mechanik

### A.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Bereits zu Beginn von Abschnitt 1.2.1 wurde darauf hingewiesen, daß generalisierte Koordinaten i.a. nur lokal existieren. Dieser Problematik trägt die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Rechnung. Grob gesagt, ist eine **Mannigfaltigkeit**  $\mathcal{M}$  eine geeignet kartierte Menge  $M$ . Unter einer  $n$ -dimensionalen **Karte** einer Menge  $M$  versteht man ein lokales System von generalisierten Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$ , d.h. ein Tupel  $(\mathcal{O}, \varphi)$  bestehend aus einer offenen<sup>1</sup> Teilmenge  $\mathcal{O}$  des  $\mathbb{R}^n$  und einer eindeutigen Abbildung  $\varphi$  der Punkte  $(q^1, \dots, q^n)$  von  $\mathcal{O}$  in  $M$ . Unter einem  $n$ -dimensionalen  $C^\infty$ -**Atlas** von  $M$  versteht man eine Menge  $\mathcal{A}$   $n$ -dimensionaler Karten (von  $M$ ), die

1. ganz  $M$  erfassen, d.h. zu jedem  $m \in M$  existiert eine Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}$  mit  $m \in \varphi(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(q^1, \dots, q^n) : (q^1, \dots, q^n) \in \mathcal{O}\}$ , und
2. miteinander **verträglich** sind in folgendem Sinne:

Falls einunddasselbe  $m \in M$  von zwei Karten  $(\mathcal{O}_1, \varphi_1), (\mathcal{O}_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$  erfaßt wird, dann gilt für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$

$$\varphi_1\left(U_\epsilon(\varphi_1^{-1}(m))\right) \subset \varphi_2(\mathcal{O}_2)$$

und  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  ist eine beliebig oft differenzierbare ( $\mathbb{R}^n$ -wertige) Funktion<sup>2</sup> auf  $U_\epsilon(\varphi_1^{-1}(m)) \subset \mathbb{R}^n$ .

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Eine Teilmenge  $\mathcal{O}$  des  $\mathbb{R}^n$  nennt man **offen**, falls:

$$(q^1, \dots, q^n) \in \mathcal{O} \implies \left( U_\epsilon(q^1, \dots, q^n) \subset \mathcal{O} \text{ für hinreichend kleines } \epsilon > 0 \right).$$

<sup>2</sup>Mit  $f \circ g$  bezeichnen wir, wie allgemein üblich, die Nacheinanderausführung zweier Abbildungen  $f, g$ . Für Teilmengen  $T$  des Definitionsbereichs von  $g$  schreibt man üblicherweise  $g(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{g(q) : q \in T\}$ .

Unter einer (beliebig oft) **differenzierbaren**  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  versteht man eine Menge  $M$  mit einem  $n$ -dimensionalen  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}$ .

Die einfachste differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist  $\mathbb{R}^n$  mit dem Atlas, der nur die Karte  $(\mathbb{R}^n, \text{id})$  enthält. Dank der Verträglichkeit der Karten eines  $C^\infty$ -Atlases kann man aber das Bild unter  $\varphi$  des in  $\mathcal{O}$  enthaltenen Teils einer ‘glatten Untermannigfaltigkeit’ von  $\mathbb{R}^n$  stets konsistent als Teil einer ‘glatten Untermannigfaltigkeit’ von  $\mathcal{M}$  auffassen, denn:

Was bezüglich einer Karte  $(\mathcal{O}_1, \varphi_1)$  glatt erscheint und auch von der Karte  $(\mathcal{O}_2, \varphi_2)$  erfaßt wird, erscheint auch bezüglich  $(\mathcal{O}_2, \varphi_2)$  glatt.

Dementsprechend versteht man z.B. unter einer (beliebig oft) **differenzierbaren Kurve** in einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$  eine Teilmenge  $\mathcal{C}$  von  $M$ , für die  $\varphi^{-1}(\mathcal{C} \cap \varphi(\mathcal{O}))$  für jede Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}$  ein (beliebig oft) differenzierbares Kurvenstück im gewöhnlichen Sinne (oder die leere Menge) ist.

**Definition A.1.1** Eine Abbildung  $f$  einer  $n_1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_1$  in eine  $n_2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_2$  heißt (unendlich oft) **differenzierbar**, falls  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  für jede Karte  $(\mathcal{O}_1, \varphi_1)$  von  $\mathcal{M}_1$  und jede Karte  $(\mathcal{O}_2, \varphi_2)$  von  $\mathcal{M}_2$  mit  $\varphi_1(\mathcal{O}_1) \cap \varphi_2^{-1}(\mathcal{O}_2) \neq \emptyset$  eine (beliebig oft) differenzierbare  $\mathbb{R}^{n_2}$ -wertige Funktion auf  $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(\mathcal{O}_1) \cap \varphi_2^{-1}(\mathcal{O}_2))$  ist.

Zwei  $C^\infty$ -Atlanten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  von  $M$  heißen **äquivalent**, mitgeteilt durch die Schreibweise  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ , wenn ihre Vereinigung ebenfalls ein  $C^\infty$ -Atlas ist. Für die Definition A.1.1 spielt es offensichtlich keine Rolle, ob man einen Atlas durch einen äquivalenten ersetzt. Man überzeugt sich auch leicht davon, daß  $\sim$  tatsächlich eine **Äquivalenzrelation** ist, d.h. folgende drei Eigenschaften besitzt:

$$\begin{array}{ll} \text{Reflexivität:} & \mathcal{A} \sim \mathcal{A}, \\ \text{Transitivität:} & \left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2, \\ \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3 \end{array} \right\} \implies \mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_3. \\ \text{Symmetrie:} & \mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \iff \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_1, \end{array}$$

Deshalb ist jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$  eindeutig ein maximaler  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ , nämlich die Vereinigung aller zu  $\mathcal{A}$  äquivalenten  $C^\infty$ -Atlanten, zugeordnet.

**Definition A.1.2** Als (reguläre) **differenzierbare Untermannigfaltigkeit** einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$  bezeichnet man eine  $\check{n}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\check{\mathcal{M}} = (\check{M}, \check{\mathcal{A}})$  ( $\check{n} \leq n$ ) mit

$$\check{M} \subset M \quad \text{und} \quad \check{\mathcal{A}} \sim \mathcal{U}_{\check{M}},$$

wobei  $\mathcal{U}_{\check{M}}$  folgenden  $C^\infty$ -Atlas von  $\check{M}$  bezeichnet:  $(\check{\mathcal{O}}, \check{\varphi})$  gehört genau dann zu  $\mathcal{U}_{\check{M}}$ , wenn eine Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  existiert mit

$$\check{\mathcal{O}} = \{(q^1, \dots, q^{\check{n}}) \in \mathbb{R}^{\check{n}} : (q^1, \dots, q^{\check{n}}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}\},$$

und

$$\check{\varphi}(q^1, \dots, q^{\check{n}}) = \varphi(q^1, \dots, q^{\check{n}}, 0, \dots, 0) \in \check{M} \quad \forall (q^1, \dots, q^{\check{n}}) \in \check{\mathcal{O}}.$$

**Warnung:** Wenn zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$  und  $\check{\mathcal{M}} = (\check{M}, \check{\mathcal{A}})$  gegeben sind mit  $\check{M} \subset M$  so folgt daraus i.a. nicht, daß  $\check{\mathcal{M}}$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{M}$  ist. Es ist noch nicht einmal gesagt, daß überhaupt ein Atlas existiert mit dem  $\check{M}$  zu einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{M}$  wird: Z.B. läßt sich für einen Polygonzug  $P$  im  $\mathbb{R}^3$  leicht ein Atlas finden, der  $P$  zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit macht.<sup>3</sup>

Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$ ,  $\mathcal{M}_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$  nennt man **diffeomorph** zueinander, wenn ein **Diffeomorphismus** von  $\mathcal{M}_1$  auf  $\mathcal{M}_2$  existiert, d.h. eine (beliebig oft) differenzierbare, rückeindeutige Abbildung  $f$  von  $\mathcal{M}_1$  auf  $\mathcal{M}_2$ , deren Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ebenfalls (beliebig oft) differenzierbar ist.<sup>4</sup> Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  sind aus differentialgeometrischer Sicht genau dann als gleich zu betrachten, wenn sie diffeomorph (zueinander) sind.

Wir interessieren uns nur für solche Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$ , die einen (äquivalenten) abzählbaren Atlas besitzen und **HAUSDORFFsch** sind, d.h. folgender Bedingung genügen:

Zu je zwei unterschiedlichen Punkten  $m_1, m_2 \in M$  existieren stets zwei Karten  $(\mathcal{O}_1, \varphi_1)$ ,  $(\mathcal{O}_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$  und ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\varphi_1\left(U_\epsilon(\varphi_1^{-1}(m_1))\right) \cap \varphi_2\left(U_\epsilon(\varphi_2^{-1}(m_2))\right) = \emptyset.$$

Solche Mannigfaltigkeiten kann man sich stets als Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $n$ =Dimension von  $\mathcal{M}$ ) vorstellen ([Whitney, 1936](#); [Whitney, 1944](#)), ([Brickel und Clark, 1970](#), Sec. 5.6).

Version vom 26. März 2009

<sup>3</sup>Man wähle irgendeine Parametrisierung  $P = \{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  und den Atlas, der  $(\mathbb{R}, \mathbf{x})$  als einzige Karte enthält.

<sup>4</sup>Dann ist  $\{(f(\mathcal{O}), f \circ \varphi) : (\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_1\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $\mathcal{M}_2$ , der zu  $\mathcal{A}_2$  äquivalent ist.

## A.2 Tensorfelder über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Ein Tangentenvektor

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{\mathbf{x}(\Delta t) - \mathbf{x}(0)}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

(einer Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$ ) im  $\mathbb{R}^n$  läßt sich äquivalent durch die Wirkung seiner LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_{\dot{\mathbf{x}}(0)}$  auf der Menge der Skalarfelder  $\Phi$  an der Stelle  $\mathbf{x}(0)$  charakterisieren:

$$(\mathcal{L}_{\dot{\mathbf{x}}(0)}\Phi)(\mathbf{x}(0)) = \left. \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0}. \quad (\text{A.2})$$

Wenn  $\mathbf{x}(t)$  nur innerhalb einer Untermannigfaltigkeit  $\check{\mathcal{M}}$  verläuft, ist  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  *tangential* an diese und (A.2) hängt nur von den Werten der Funktion  $\Phi$  auf  $\check{\mathcal{M}}$  ab. Während (A.1) i.a. nicht auf  $\check{\mathcal{M}}$  einschränkbar ist, ist das für (A.2) stets der Fall:

**Definition A.2.1** *Unter einem **Tangentenvektor** der (unendlich oft) differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\check{\mathcal{M}}$  an der Stelle<sup>5</sup>  $m \in \check{\mathcal{M}}$  versteht man eine Abbildung  $X_m$  der (hinreichend gutartigen, reell-wertigen) Skalarfelder über  $\check{\mathcal{M}}$  in die reellen Zahlen, die folgender Bedingung genügt:*

*Es existiert eine (beliebig oft) differenzierbare Bahnkurve  $m(t)$  auf  $\check{\mathcal{M}}$  mit  $m(0) = m$  und*

$$X_m(\Phi) = \left. \frac{d}{dt}\Phi(m(t)) \right|_{t=0} \quad \text{für alle differenzierbaren Skalarfelder } \Phi.$$

**Lemma A.2.2** *Eine Abbildung  $X_m$  von*

$$\Lambda^0(\check{\mathcal{M}}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f \text{ (beliebig oft) differenzierbare Abbildung von } \check{\mathcal{M}} \text{ in } \mathbb{R}\} \quad (\text{A.3})$$

*in  $\mathbb{R}$  ist genau dann ein Tangentenvektor der (unendlich oft) differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\check{\mathcal{M}}$  an der Stelle  $m \in \check{\mathcal{M}}$ , wenn sie linear ist und der **LEIBNIZ-Bedingung***

$$X_m(\Phi\Psi) = \Phi(m) X_m(\Psi) + \Psi(m) X_m(\Phi)$$

*genügt.*<sup>6</sup>

Nach Definition A.2.1 bilden die Tangentenvektoren an der Stelle  $m$  jeweils einen Vektorraum  $T_m\check{\mathcal{M}}$ , wobei für jede lokale Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_{\check{\mathcal{M}}}$  mit  $\varphi(q) = m$  die

$$(\mathbf{t}_\nu)_m(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q^1, \dots, q^{\check{n}}) \quad \forall f \in \Lambda^0(\check{\mathcal{M}})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Es ist üblich,  $M$  mit  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$  zu identifizieren, solange dadurch keine Verwechslungen zu befürchten sind.

<sup>6</sup>Die LEIBNIZ-Bedingung garantiert u.a.  $X_m(\Phi) = 0$ , falls  $\Phi$  in einer Umgebung von  $m$  Null ist.

mit  $\nu = 1, \dots, \tilde{n} \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\check{\mathcal{M}})$  eine Basis bilden (vgl. Lemma 4.1.3 von (Lücke, ein)). Üblicherweise schreibt man lokal auch direkt  $\frac{\partial}{\partial q^\nu}$  für  $(\mathbf{t}_\nu)_{\varphi(q)}$ .

**Definition A.2.3** *Unter einem **Vektorfeld** über einer (differenzierbaren)  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $X : m \mapsto X_m$  von  $\mathcal{M}$  in  $\bigcup_{m \in \mathcal{M}} T_m \mathcal{M}$  mit*

$$X_m \in T_m \mathcal{M} \quad \forall m \in \mathcal{M}.$$

Mit  $T\mathcal{M}$  bezeichnet man die Gesamtheit aller Tupel

$$(m, A), \quad m \in \mathcal{M}, \quad A \in T_m \mathcal{M},$$

mit dem  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ , der aus folgenden Karten besteht:  $(\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varphi})$  gehört genau dann zu  $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ , wenn eine Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_\mathcal{M}$  existiert mit

$$\hat{\mathcal{O}} = \bigcup_{m \in \mathcal{O}} \{(m, A) : A \in T_m \mathcal{M}\}$$

und

$$\hat{\varphi}(q, v) = \left( \varphi(q), \sum_{\nu=1}^n v^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \quad \forall q \in \varphi^{-1}(\mathcal{O}), v \in \mathbb{R}^n.$$

Ein Vektorfeld  $X$  über  $\mathcal{M}$  heißt (beliebig oft) **differenzierbar**, wenn die Abbildung  $m \mapsto (m, X_m)$  von  $\mathcal{M}$  in  $T\mathcal{M}$  stetig ist.<sup>7</sup> Gewöhnlich identifiziert man ein Vektorfeld  $X$  über  $\mathcal{M}$  mit seinem Graphen<sup>8</sup>  $\{(m, X_m) : m \in \mathcal{M}\}$ .

**Lemma A.2.4** *Seien  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $X$  ein  $C^\infty$ -Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$ . Dann existieren zu jedem  $m \in \mathcal{M}$  ein maximales offenes (‘Zeit’) Intervall  $I_m^X \neq \emptyset$  und eine Abbildungen  $t \mapsto \alpha_t^X(m)$  von  $I_m^X$  in  $\mathcal{M}$  mit*

$$\frac{d}{dt} f(\alpha_t^X(m)) = X_{\alpha_t^X(m)}(f) \quad \forall t \in I_m^X. \quad (\text{A.4})$$

Die Gesamtheit dieser — durch (A.4) eindeutig festgelegten — Abbildungen bezeichnet man als den **Fluß** des Vektorfeldes  $X$ . Dafür gilt

$$(\alpha_{t_2}^X \circ \alpha_{t_1}^X)(m) = \alpha_{t_1+t_2}^X(m) \quad \forall m \in \mathcal{M}, t_1 \in I_m^X, t_2 \in I_{\alpha_{t_1}^X(m)}^X. \quad (\text{A.5})$$

**Definition A.2.5** ——— *Version vom 26. März 2009* ———

<sup>7</sup>In lokalen Koordinaten  $q$  mit  $X_{\varphi(q)} = \sum_{\nu=1}^n v^\nu(q) \frac{\partial}{\partial q^\nu}$  bedeutet das, daß die  $v^\nu(q)$  (beliebig oft) stetig differenzierbare Funktionen von  $q = (q^1, \dots, q^n)$  sind.

<sup>8</sup>Man bezeichnet einen solchen ‘Graphen’ als **Schnitt** (englisch: **section**) im *Tangentialbündel*  $T\mathcal{M}$ .

Es ist offensichtlich, wie (beliebig oft differenzierbare) Vektorfelder beliebiger Stufe (siehe Def. A.2.2 von (Lücke, ein)) über  $\mathcal{M}$  zu definieren sind. Wir wollen uns aber auf die Definition der sog.  $N$ -Formen beschränken.

Sei  $N \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{M}$  eine (beliebig oft differenzierbaren)  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Jedem  $m \in \mathcal{M}$  ist dann der lineare Raum  $\Lambda_m^N$  der total antisymmetrischen kovarianten Tensoren  $N$ -ter Stufe über  $T_m\mathcal{M}$  zugeordnet. Unter einer (beliebig oft differenzierbaren)  $N$ -**Form** über  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $\omega : m \mapsto \omega_m$  von  $\mathcal{M}$  in  $\bigcup_{m \in \mathcal{M}} \Lambda_m^N$  mit

$$\omega_m \in \Lambda_m^N \quad \forall m \in \mathcal{M},$$

die (beliebig oft) differenzierbar in folgendem Sinne ist:

Für jede Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  sind die durch<sup>9</sup>

$$\omega_{\varphi(q)} = \frac{1}{N!} \omega_{\nu_1 \dots \nu_N}(q) (\theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_N})_{\varphi(q)} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\omega_{\nu_{\pi(1)} \dots \nu_{\pi(N)}}(q) = \text{sign}(\pi) \omega_{\nu_1 \dots \nu_N}(q) \quad \forall \pi \in S_N \quad (\text{A.7})$$

eindeutig festgelegten  $\omega_{\nu_1 \dots \nu_N}(q)$  (beliebig oft) stetig differenzierbare Funktionen der lokalen Koordinaten  $q = (q^1, \dots, q^n)$ . Dabei ist<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} & (\theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_N})_{\varphi(q)}(A_1, \dots, A_N) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\pi \in S_N} \text{sign}(\pi) \prod_{j=1}^N \theta_{\varphi(q)}^{\nu_{\pi(j)}}(A_j) \quad \forall A_1, \dots, A_N \in T_{\varphi(q)}\mathcal{M} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

und die  $\theta_{\varphi(q)}^{\nu}$  bilden die zu  $\left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \right\}$  gehörige reziproke Basis<sup>11</sup> im Dualraum  $T_{\varphi(q)}^*\mathcal{M}$  von  $T_{\varphi(q)}\mathcal{M}$ :

$$\theta_{\varphi(q)}^{\nu} \left( \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \right) = \delta_{\mu}^{\nu} \quad \forall \nu, \mu \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.9})$$

Die Menge aller  $N$ -Formen über  $\mathcal{M}$  bezeichnet man mit  $\Lambda^N(\mathcal{M})$ , die Elemente von  $\Lambda^0(\mathcal{M})$  (siehe (A.3)) als **0-Formen** über  $\mathcal{M}$ . Unter einer **Differentialform** über  $\mathcal{M}$  versteht man ein Element von  $\bigcup_{N=0}^n \Lambda^N(\mathcal{M})$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>9</sup>Wir verwenden die EINSTEINSche Summationskonvention.

<sup>10</sup>Für  $N = 1$ :

$$(\theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_N})_{\varphi(q)} = \theta_{\varphi(q)}^{\nu_1}.$$

<sup>11</sup>Die Definition (A.8) wendet man natürlich auch auf andere Kovektoren  $\theta_{\varphi(q)}^{\nu}$  an.

## A.3 Differentiation

Sei  $\mathcal{M}$  wieder eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist jedem  $f \in \Lambda^0(\mathcal{M})$  gemäß

$$(df)_m(X_m) \stackrel{\text{def}}{=} X_m(f) \quad \forall m \in \mathcal{M}, X_m \in T_m\mathcal{M} \quad (\text{A.10})$$

eine 1-Form  $df$ , das sog. **Differential** von  $f$  zugeordnet. Man bezeichnet  $df$  auch als die **äußere Ableitung** von  $f$ . In lokalen Koordinaten  $q$  schreibt man dementsprechend auch  $dq^\nu$  für die  $\theta_{\varphi(q)}^\nu$  in (A.9).

**Definition A.3.1** Sei  $N \in \mathbb{N}$  und sei  $\omega \in \Lambda^N(\mathcal{M})$ . Dann ist die **äußere Ableitung**  $d\omega$  von  $\omega$  die in lokalen Koordinaten  $q$  mit (A.6)/(A.7) durch

$$(d\omega)_{\varphi(q)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N!} \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} \omega_{\nu_1 \dots \nu_N}(q) \right) dq^\mu \wedge dq^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\nu_N}$$

gegebene  $(N+1)$ -Form.

Aus Definition A.3.1 und (A.8) ist offensichtlich, daß

$$d(d\omega) = 0 \quad \text{für jede Differentialform } \omega \quad (\text{A.11})$$

und

$$d\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Lambda^n(\mathcal{M})$$

gilt.

Ohne Verwendung der Einbettung von  $\mathcal{M}$  in den  $\mathbb{R}^n$  ist der Vergleich der Werte eines Vektorfeldes  $X$  über  $\mathcal{M}$  an verschiedenen Stellen  $m_1, m_2$  von  $\mathcal{M}$  nicht ohne weiteres möglich. Dazu wählt man eine geeignete Abbildung  $\sigma$  von  $\mathcal{M}$  in sich mit  $\sigma(m_1) = m_2$  und bildet  $X_{m_1}$  mithilfe des sog. **push forward**  $\sigma_*$  von  $\sigma$ , der durch<sup>12</sup>

$$\alpha_t^{\sigma_* X}(\sigma(m)) \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma \circ \alpha_t^X)(m) \quad \forall m \in \mathcal{M}, t \in I_m^X$$

charakterisiert ist, auf den Tangentenvektor  $(\sigma_* X)_{m_2}$  an der Stelle  $m_2$  ab.  $(\sigma_* X)_{m_2}$  und  $X_{m_2}$  lassen sich nun voneinander subtrahieren. Auf diese Weise läßt sich die

Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>Die Feldlinien von  $\sigma_* X$  gehen also aus denen von  $X$  durch die Abbildung  $\sigma$  hervor. Eine äquivalente Charakterisierung ist:

$$(\sigma_* X_m)_{\sigma(m)}(f) = X_m(f \circ \sigma).$$

Wenn  $\sigma$  nicht surjektiv ist, liefert der push forward natürlich kein Vektorfeld.

Wirkung der einem Vektorfeld  $X$  zugeordneten **LIE-Ableitung**  $\mathcal{L}_X$  auf ein anderes Vektorfeld  $Y$  definieren:<sup>13</sup>

$$(\mathcal{L}_X Y)_m \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left( (\alpha_{-t}^X)_* Y_{\alpha_{+t}^X(m)} - Y_m \right). \quad (\text{A.12})$$

Nach Lemma A.2.2 ist mit  $Y$  und  $X$  auch  $\mathcal{L}_X Y$  ein (Tangenten-) Vektorfeld. Außerdem gilt

$$\mathcal{L}_X(\Phi Y) = (\mathcal{L}_X \Phi) Y + \Phi \mathcal{L}_X Y. \quad (\text{A.13})$$

und

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]_- \quad (\text{A.14})$$

**Beweis von (A.14):** Für  $m \in \mathcal{M}$  und hinreichend gutartige Funktionen  $\Phi$  über  $\mathcal{M}$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_m(\Phi) &= \frac{d}{dt} \left( (\alpha_{-t}^X)_* Y \right)_m(\Phi)|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Phi \left( \alpha_{-t}^X \circ \alpha_s^Y \circ \alpha_{+t}^X(m) \right) \Big|_{t=s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Phi \left( \alpha_s^Y \circ \alpha_{+t}^X(m) \right) \Big|_{t=s=0} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Phi \left( \alpha_t^X \circ \alpha_s^Y(m) \right) \Big|_{t=s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} Y_{\alpha_t^X(m)}(\Phi)|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial s} X_{\alpha_s^Y(m)}(\Phi)|_{s=0} \\ &= X_m \left( Y_m(\Phi) \right) - Y_m \left( X_m(\Phi) \right) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. ■

Für die Definition der **LIE-Ableitung**  $\mathcal{L}_X$  von Kovektorfeldern  $\theta$  benötigt man den sog. **pull back**  $\sigma^*$  der entspr. Abbildung  $\sigma$ , der durch

$$(\sigma^* \theta)_{\sigma(m)}(X_m) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{\sigma(m)}(\sigma_* X_m) \quad \forall X_m \in T_m \mathcal{M} \quad (\text{A.15})$$

definiert ist.<sup>14</sup> Damit definiert man analog:

$$(\mathcal{L}_X \theta)_m \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left( ((\alpha_t^X)^* \theta)_{\alpha_t^X(m)} - \theta_m \right). \quad (\text{A.16})$$

Mit der Definition

$$(\sigma^* \Phi)(m) \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi \circ \sigma)(m), \quad (\text{A.17})$$

für die Wirkung des **pull backs** auf 0-Formen  $\Phi$  gilt

$$\sigma^*(\Phi \theta) = (\sigma^* \Phi)(\sigma^* \theta) \quad \forall \theta \in \Lambda^1(\mathcal{M}).$$

Version vom 26. März 2009

<sup>13</sup>Für ein konstantes Vektorfeld  $X$  über dem  $\mathbb{R}^n$  ergibt sich  $(\alpha_{-t}^X)_* Y_{\alpha_{+t}^X(m)}$  durch natürliche (schreibtechnisch üblicherweise unterdrückte) Parallelverschiebung des Vektors  $Y_{\alpha_{+t}^X(m)}$  (auf kürzestem Wege) von der Stelle  $\alpha_{+t}^X(m)$  an die Stelle  $m$ .

<sup>14</sup>Der pull back führt Kovektorfelder stets wieder in solche über.

Für beliebige Differentialformen definiert man die LIE-Ableitung entsprechend so, daß

$$\mathcal{L}_X(\omega_1 + \omega_2) = \mathcal{L}_X\omega_1 + \mathcal{L}_X\omega_2 \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^N(\mathcal{M})$$

(für  $N \in \{0, \dots, n\}$ ) und die **LEIBNIZ-Regel**

$$\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X(\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \bigcup_{N=0}^n \Lambda^N(\mathcal{M})$$

erfüllt sind. Damit gilt allgemein<sup>15</sup>

$$\mathcal{L}_X = \text{di}_X + i_X d \quad (\text{A.18})$$

mit

$$(i_X\omega)_m(A_2, \dots, A_N) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m(X_m, A_2, \dots, A_N) \quad \forall A_2, \dots, A_N \in T_m\mathcal{M}$$

(für  $\omega \in \Lambda^N(\mathcal{M})$ ).

Eine  $N$ -Form nennt man **invariant** unter dem Fluß eines Vektorfeldes  $X$ , wenn der pull back aller  $\alpha_t^X$  darauf trivial wirkt. Wenn  $X$  höchstens isolierte Nullstellen hat, ist äquivalent dazu, daß die LIE-Ableitung der  $n$ -Form nach  $X$  Null ist.<sup>16</sup>

## A.4 Symplektischer Formalismus

Es ist klar, daß auch das **Kotangentenbündel**

$$T^*\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m \in \mathcal{M}} T_m^*\mathcal{M}$$

einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  einen natürlichen  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^*$  besitzt:

$(\check{\mathcal{O}}, \check{\varphi})$  gehört genau dann zu  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^*$ , wenn eine Karte  $(\mathcal{O}, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  existiert mit

$$\check{\mathcal{O}} = \bigcup_{m \in \mathcal{O}} \{(m, \theta_m) : \theta_m \in T_m^*\mathcal{M}\}$$

und

$$\check{\varphi}(q, p) = \left( \varphi(q), \sum_{\nu=1}^n p_\nu dq^\nu \right) \quad \forall q \in \varphi^{-1}(\mathcal{O}), p \in \mathbb{R}^n.$$

<sup>15</sup>Siehe (Choquet-Bruhat et al., 1978, S.148).

<sup>16</sup>Siehe (Choquet-Bruhat et al., 1978, S. 198).

Wenn  $\mathcal{M}$  der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems ist, dann nennt man  $T^*\mathcal{M}$  den **Phasenraum** dieses Systems.

Sei nun ein mechanisches System mit dem Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$  und der HAMILTON-Funktion  $H \in \Lambda^0(T_m^*\mathcal{M})$  betrachtet. Dann definiert man dazu das sog. HAMILTONsche Vektorfeld  $X_H$  über  $T_m^*\mathcal{M}$  in lokalen Koordinaten  $(q, p)$  durch

$$(X_H)_{(q,p)} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} - \frac{\partial H}{\partial q^\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) \quad (\text{A.19})$$

Damit läßt sich die Zeitentwicklung (3.21) für nicht explizit zeitabhängiges  $f$  in der Form

$$\dot{f}(m) = (X_H)_m(f) \quad \forall m \in T^*\mathcal{M} \quad (\text{A.20})$$

schreiben.

Der pull back<sup>17</sup>  $\pi^* \in \Lambda^1(T^*\mathcal{M})$  der Projektion

$$\pi(m, A) \stackrel{\text{def}}{=} m \quad \forall m \in \mathcal{M}, A \in T_m\mathcal{M}$$

des Tangentialbündels  $T\mathcal{M}$  auf seine (Bündel-) Basis  $\mathcal{M}$  ist in lokalen Koordinaten  $(q, p)$  durch

$$\pi^*_{(q,p)} = p_\nu dq^\nu$$

gegeben und wird als **kanonische 1-Form** über  $T^*\mathcal{M}$  bezeichnet. Mit der zugehörigen **kanonischen 2-Form**

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} -d\pi^* \quad (\text{A.21})$$

ist das Differential von  $H$  durch

$$(dH)_{\hat{m}}(X'_{\hat{m}}) = (\omega_0)_{\hat{m}}\left((X_H)_{\hat{m}}, X'_{\hat{m}}\right) \quad \forall \hat{m} \in T_m^*\mathcal{M}, X' \in T(T_m^*\mathcal{M})$$

gegeben, wofür man üblicherweise abkürzend

$$dH(\cdot) = \omega_0(X_H, \cdot) \quad (\text{A.22})$$

schreibt. Offensichtlich ist  $\omega_0$  nicht entartet, d.h. das sog. HAMILTONsche **Vektorfeld**  $X_H$  ist das einzige Vektorfeld über  $T^*\mathcal{M}$ , für das (A.22) gilt.

Man sieht leicht, daß die LIE-Ableitung von  $\omega_0$  nach  $X_H$  verschwindet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H}\omega_0 & \stackrel{(\text{A.18})}{=} d \underbrace{i_{X_H}\omega_0}_{\stackrel{(\text{A.22})}{=} dH} + i_{X_H} \underbrace{d\omega_0}_{\stackrel{(\text{A.21}), (\text{A.11})}{=} 0} . \\ & \stackrel{(\text{A.11})}{=} 0 \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Wir hatten den pull back nur für Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in sich definiert. Wie sich diese Definition für Abbildungen von einer Mannigfaltigkeit in eine andere verallgemeinern läßt, ist aber offensichtlich.

Die HAMILTONSchen Vektorfelder sind die einzigen (über  $T^*\mathcal{M}$ ), die  $\omega_0$  invariant lassen und für sie gilt

$$\omega_0(X_{H_1}, X_{H_2}) = \{H_1, H_2\}_{q,p} . \quad (\text{A.23})$$

Damit ist klar, daß die HAMILTONSchen Vektorfelder mit  $\omega_0$  als (nicht assoziativem) Produkt eine LIE-Algebra bilden, die (evtl. bis auf additive Konstanten) isomorph ist zur LIE-Algebra der Observablen (Funktionen auf dem Phasenraum) mit der POISSON-Klammer als LIE-Produkt.

Dieser Formalismus läßt sich ohne weiteres auf allgemeinere Phasenräume  $\mathcal{P}$  (statt  $T^*\mathcal{M}$ ) anwenden. Die HAMILTONSche Dynamik (A.20) (mit  $\mathcal{P}$  statt  $T^*\mathcal{M}$ ) ergibt sich dann durch Wahl einer **symplektischen Form**, d.h. einer nichtentarteten 2-Form  $\omega_0$ , und einer HAMILTON-Funktion  $H$ . Das HAMILTONSche Vektorfeld  $X_H$  ist dann durch (A.22) festgelegt ((A.19) gilt i.a. nicht mehr).



# Anhang B

## Relativistische Mechanik uneingeschränkter Massenpunkte

### B.1 Relativistische Kinematik

Sei  $L$  ein vorgegebenes Inertialsystem (Labor). Dann ist klar, wie sich die Länge einer im  $L$  ruhenden geraden Strecke bestimmen läßt:

Man sieht z.B. nach, wieviele Meterstäbe sich auf dem Streckenstück aneinanderreihen lassen. Diese Anzahl multipliziert mit der Längeneinheit „Meter“ ist dann die  **$L$ -Länge** dieses Streckenstücks.[B

Die  $L$ -Länge eines bewegten ‘starren’ Stabes läßt sich folgendermaßen ausmessen:

Zu einem festgelegten Zeitpunkt markiert man die Positionen  $A$  resp.  $B$  des Stabes am Labor, an denen sich der vordere resp. hintere Ende des Stabes gerade befindet. Die  **$L$ -Länge** des Stabes identifiziert man dann mit der  $L$ -Länge der im Labor ruhenden Strecke  $\overline{AB}$  von  $A$  nach  $B$ .

Dieses Verfahren setzt aber voraus, daß festgelegt ist, wann Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden „gleichzeitig“ stattfinden. Da merkwürdigerweise experimentell keine (evtl. vom Bewegungszustand des Labors oder der Lichtquelle abhängige) Anisotropie der Lichtausbreitung im Vakuum festgestellt werden konnte, legt man das nach EINSTEIN folgendermaßen fest (bzgl. der Konsistenz dieses Synchronisierungsverfahrens siehe Abschnitt 2.2.1 von (Lücke, rel)):

Wenn man vom Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  einen Lichtblitz aussendet, dann trifft er bei  $A$  und  $B$   **$L$ -gleichzeitig** ein.

Damit ist auch klar, wie der Zeitabstand zweier Ereignisse  $E_A, E_B$ , die an verschiedenen Orten  $A, B$  stattfinden, zu definieren ist:

Man stellt eine bei  $A$  in  $L$  ruhende Standarduhr  $L$ -gleichzeitig mit einer bei  $B$  in  $L$  ruhenden Standarduhr auf 12 Uhr und liest an der Uhr bei

$A$  resp.  $B$  die Zeit  $t_A$  resp.  $t_B$  ab, zu der das Ereignis  $E_A$  resp.  $E_B$  stattfindet.  $|t_A - t_B|$  ist dann der  **$L$ -Zeitabstand** beider Ereignisse.

Entsprechend legt man die Geschwindigkeit z.B. eines gleichförmig bewegten Massenpunktes  $m$  fest:

Bezeichne  $E_A$  resp.  $E_B$  die Ankunft von  $m$  bei dem in  $L$  ruhenden Punkt  $A$  resp.  $B$ . Wenn beide Ereignisse tatsächlich stattfinden, dann definiert man:<sup>1</sup>

$$\text{\textit{L-Geschwindigkeit}} \text{ von } m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L\text{-Länge von } \overline{AB}}{L\text{-Zeitabstand von } E_A \text{ und } E_B}.$$

Die Gesetzmässigkeiten der Speziellen Relativitätstheorie resultieren aus folgenden beiden Effekten:<sup>2</sup>

1. **LORENTZ-Kontraktion**:<sup>3</sup>

Die  $L$ -Länge eines mit der gleichförmigen  $L$ -Geschwindigkeit  $v$  in seiner Längsrichtung bewegten ‘Meterstabs’ beträgt nur das  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ -fache der  $L$ -Länge eines in  $L$  ruhenden ‘Meterstabs’.

2. **Zeitdilatation**:<sup>4</sup>

Der Zeitabstand, den eine mit der gleichförmigen  $L$ -Geschwindigkeit  $v$  bewegte ‘Standarduhr’ für zwei an ihrem jeweiligen Aufenthaltsort stattfindende Ereignisse anzeigt, beträgt stets nur das  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ -fache des  $L$ -Zeitabstands dieser Ereignisse.

Mit Abbildung **B.1** erkennt man daraus sofort, daß

$$L'\text{-Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} = L\text{-Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}$$

gilt<sup>5</sup> und daß mit der Definition

$$\boxed{\gamma_v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \forall v \in (-c, +c)} \quad (\text{B.1})$$

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Eigentlich betrachten wir hier nur den Betrag der Geschwindigkeit.

<sup>2</sup>Scheinbare Paradoxien treten i.w. nur dann auf, wenn man die  $L$ -Abhängigkeit der Begriffsbildung außer Acht läßt.

<sup>3</sup>Mit  $c$  bezeichnen wir stets die (eigenartigerweise von  $L$  unabhängige)  $L$ -Geschwindigkeit des Lichtes.

<sup>4</sup>Man beachte in diesem Zusammenhang Aufgabe 7 der *Math. Meth. d. Phys.*

<sup>5</sup>Denn:

$$\left(x - \frac{1}{\gamma_v}\right) \frac{c}{v} = \frac{v}{c} x \implies x = \gamma_v.$$

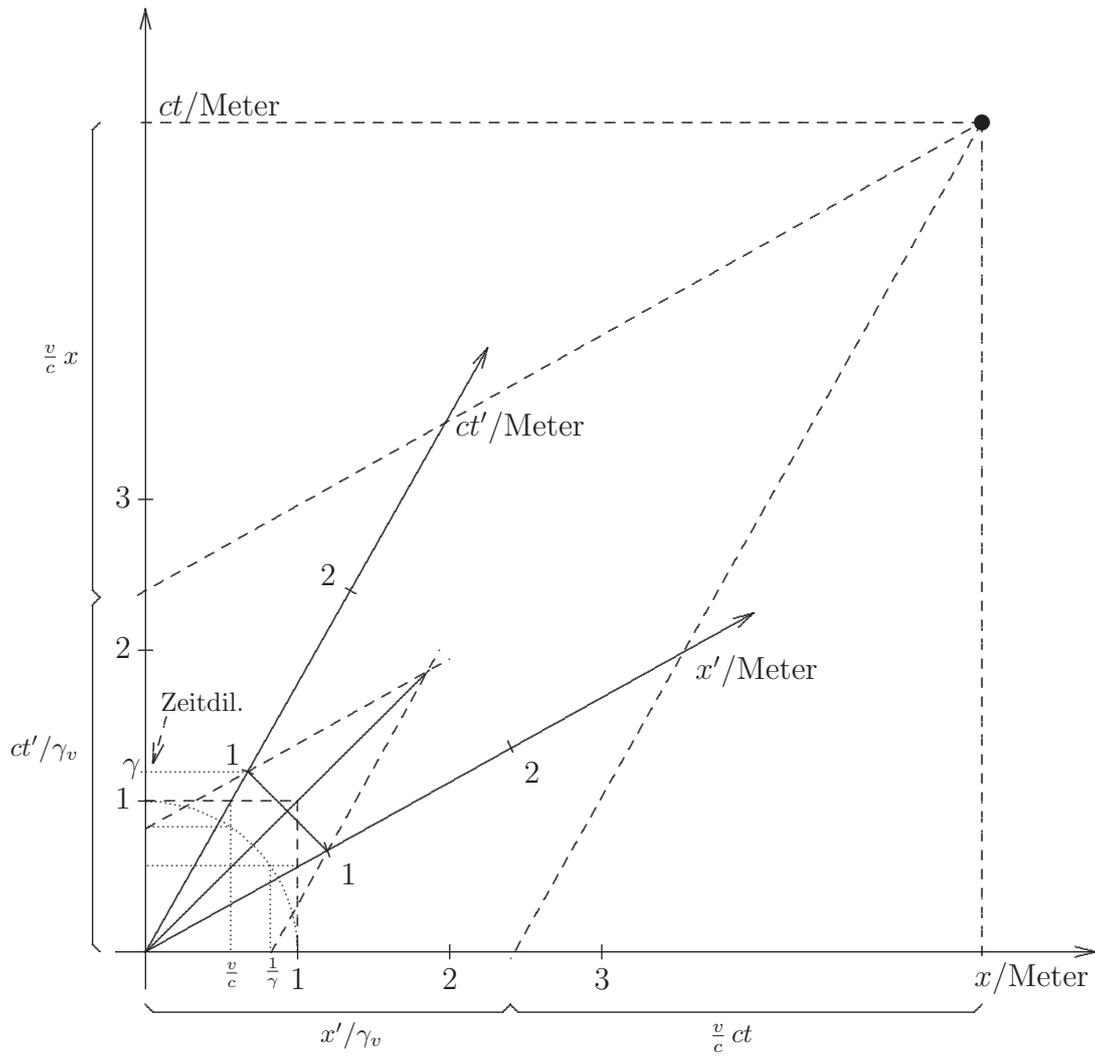


Abb. B.1: Vergleich zweier Laborsysteme  $L$  und  $L'$ .

die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma_v \left( x - \frac{v}{c} ct \right), \\ ct' &= \gamma_v \left( ct - \frac{v}{c} x \right) \end{aligned}} \quad (\text{B.2})$$

folgen für die **spezielle** LORENTZ-**Transformation** der Raum-Zeit-Koordinaten  $(ct, x, y, z)$  eines Ereignisses bzgl.  $L$  in die Raum-Zeit-Koordinaten  $(ct', x', y', z') = (ct', x', y, z)$  desselben Ereignisses bzgl. eines Laborsystems  $L'$ , das sich dadurch ergibt, daß man  $L$  drehungsfrei in gleichförmige Bewegung mit der  $L$ -Geschwindigkeit  $v \mathbf{e}_x$  versetzt (**boostet**). Die Umkehrung von (B.2) ist durch die gleichstrukturierten Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma_v \left( x' + \frac{v}{c} ct' \right), \\ ct &= \gamma_v \left( ct' + \frac{v}{c} x' \right) \end{aligned}} \quad (\text{B.3})$$

gegeben, wie man leicht nachrechnet. Aus (B.2)/(B.3) folgt z.B.:

- $L'$ -Geschwindigkeit von  $L = -L$ -Geschwindigkeit von  $L'$ .
- Wenn  $S$  resp.  $S'$  einen in  $L$  längs der  $x$ -Achse resp. in  $L'$  längs der  $x'$ -Achse ruhenden ‘Meterstab’ bezeichnet und  $v \neq 0$  ist, dann gilt:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} L\text{-Länge von } S &= L'\text{-Länge von } S', \\ L\text{-Länge von } S &> L'\text{-Länge von } S', \\ L'\text{-Länge von } S &< L'\text{-Länge von } S'. \end{aligned}$$

- Wenn  $Z$  resp.  $Z'$  eine in  $L$  resp. in  $L'$  ruhenden ‘Standarduhr’ bezeichnet und  $v \neq 0$  ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} L\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z &= L'\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z', \\ L\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z &> L'\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z', \\ L'\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z &< L'\text{-Ganggeschwindigkeit von } Z'. \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Aus den Ungleichungen ergibt sich das sog. **Zwillings-‘Paradoxon’**; siehe z.B. Abschnitt 2.2.3 von (Lücke, rel).

Diese Aussagen sind nur spezielle Aspekte des speziellen Relativitätsprinzips (siehe Abschnitt 2.2.1 von (Lücke, rel)):

Naturgesetze lassen sich in allen Inertialsystemen auf einunddieselbe Weise raumzeitlich homogen und räumlich isotrop formulieren.

<sup>6</sup>Nur wenn man die  $L$ - und  $L'$ -Spezifizierung wegläßt stehen die beiden Ungleichung im Widerspruch zueinander.

Die Formeln (B.2)/(B.3) wurden zunächst nur für die Koordinaten von Ereignissen abgeleitet, die auf der  $x$ -Achse von  $L$  bzw., was dasselbe ist, auf der  $x'$ -Achse von  $L'$  stattfinden. Da die LORENTZ-Kontraktion nur die Abstände in  $x$ -Richtung betrifft und da Ereignisse, die an Orten mit gleicher  $x$  Koordinate stattfinden, genau dann  $L$ -gleichzeitig stattfinden, wenn sie  $L'$ -gleichzeitig stattfinden, sind (B.2)/(B.3) für den allgemeinen Fall durch

$$x^2 = x^{2'} \quad , \quad x^3 = x^{3'}$$

zu ergänzen, wobei wir von nun ab

$$(x^1, x^2, x^3) \quad \text{statt} \quad (x, y, z)$$

und

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad \text{statt} \quad (x', y', z')$$

schreiben. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \Lambda_v^{\text{spez.}} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\Lambda_v^{\text{spez.}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma_v \frac{v}{c} & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

wenn  $v \mathbf{e}_1$  die (vektorielle)  $L$ -Geschwindigkeit von  $L'$  ist. Wenn  $L'$  durch boosten in eine andere Richtung aus  $L$  hervorgeht und<sup>7</sup>

$$\mathbf{v} = \underbrace{\hat{R}}_{\text{Drehm.}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl.} \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

die  $L$ -Geschwindigkeit von  $L'$  ist, dann gilt natürlich

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{spez.}} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

mit

$$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{spez.}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R} \end{pmatrix} \Lambda_v^{\text{spez.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

<sup>7</sup>Im folgenden ist mit  $v$  stets  $|\mathbf{v}|$  gemeint.

Dann sind allerdings — aufgrund der LORENTZ-Kontraktion — die Linien, die sich ergeben, wenn man alle Punkte der räumlichen Koordinatenachsen von  $L'$   $L$ -gleichzeitig in  $L$  markiert, in  $L$  nicht mehr zueinander orthogonal.

**Anmerkung:** Die Notwendigkeit einer so umständlichen Formulierung wird anhand der in Abschnitt 2.4.2 von (Lücke, rel) beschriebenen „Superschnappschüsse“ klar.

Man kann zeigen (siehe z.B. Abschnitt 2.4.4 von (Lücke, rel)), daß die Gesamtheit aller Matrizen  $\Lambda$  der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R} \end{pmatrix} \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{spez.}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}, \quad \hat{R} \text{ Drehmatrix},$$

eine Gruppe bildet. Insbesondere gilt

$$\Lambda_{\mathbf{u}}^{\text{spez.}} \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{spez.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}_{\mathbf{v},\mathbf{u}} \end{pmatrix} \Lambda_{\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}}^{\text{spez.}}, \quad (\text{B.7})$$

(siehe Abschnitt 2.4.3 von (Lücke, rel)) mit einer geeigneten Drehmatrix  $\hat{R}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}$  (THOMAS-Drehung), wobei

$$\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u} + (\gamma_v - 1) \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{v^2}\right) \mathbf{v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)} \quad (\text{B.8})$$

das relativistische Überlagerungsgesetz für Geschwindigkeiten<sup>8</sup> ist (siehe Abschnitt 2.4.1 von (Lücke, rel)). Letzteres ist äquivalent dazu, daß sich die Komponenten der sog. **Vierer-Geschwindigkeit**

$$\underline{\dot{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{|\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)|} \left( c, \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \right) \quad (\text{B.9})$$

(siehe Abschnitt 3.1.2 von (Lücke, rel)) genau so transformieren wie die Raum-Zeit-Koordinaten  $(ct, x, y, z)$ :

$$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{spez.}} \gamma_{|\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}|} \begin{pmatrix} c \\ (\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u})^1 \\ (\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u})^2 \\ (\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u})^3 \end{pmatrix} = \gamma_{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} c \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Besonders leicht einzusehen sind folgende beiden Spezialfälle von (B.8):

### 1. Fall:<sup>9</sup>

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{u} \stackrel{(\text{B.8})}{\implies} \mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u} + (\gamma_v - 1)(\mathbf{v} + \mathbf{u})}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}}{1 + \frac{v^1 u^1}{c^2}}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>Man sollte **nicht** von relativistischer ‘Geschwindigkeitsaddition’ reden.

<sup>9</sup>Man beachte (B.7) und:  $\mathbf{v} \sim \mathbf{u} \implies \left(1 + \frac{v^1 u^1}{c^2}\right) \gamma_v \gamma_u = \gamma_{|\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}|}$ .

**2. Fall:**<sup>10</sup>

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \xRightarrow{\text{(B.8)}} \quad \mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma_v}.$$

Die Zuordnung  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}$  ist i.a. also offensichtlich **nicht kommutativ!**

Gegeben seien ein Inertialsystem  $L$  und folgende drei Inertialsysteme, die durch Boosts aus  $L$  hervorgehen:

Inertialsystem	$L$ -Geschwindigkeit	Koordinaten
$L'$	$\mathbf{v}$	$(ct', x^1, x^2, x^3)$
$\hat{L}$	$\mathbf{u}$	$(c\hat{t}, x^{\hat{1}}, x^{\hat{2}}, x^{\hat{3}})$
$\hat{L}'$	$\mathbf{w} = \mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}$	$(c\hat{t}', x^{\hat{1}'}, x^{\hat{2}'}, x^{\hat{3}'})$

Dann besagt (B.7), daß sich die  $\hat{L}'$ -Koordinaten aus den  $L'$ -Koordinaten — von einer zusätzlichen Drehung abgesehen — nach den gleichen Regeln ergeben, wie die  $\hat{L}$ -Koordinaten aus den  $L$ -Koordinaten. Deswegen erscheint die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Länge gleichförmig bewegter Maßstäbe sowie der Laufgeschwindigkeit gleichförmig bewegter Uhren tatsächlich in jedem Inertialsystem gleich.

Eine einfache Rechnung (siehe Abschnitt 2.4.1 von (Lücke, rel)) zeigt, daß

$$|\mathbf{v} \hat{+} \mathbf{u}|^2 = c^2 \left( 1 - \frac{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}{(c^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2} \right) < c \quad \text{(B.11)}$$

für beliebige Unterlichtgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}$  gilt. Sonst stünde das spezielle Relativitätsprinzip im Widerspruch zum

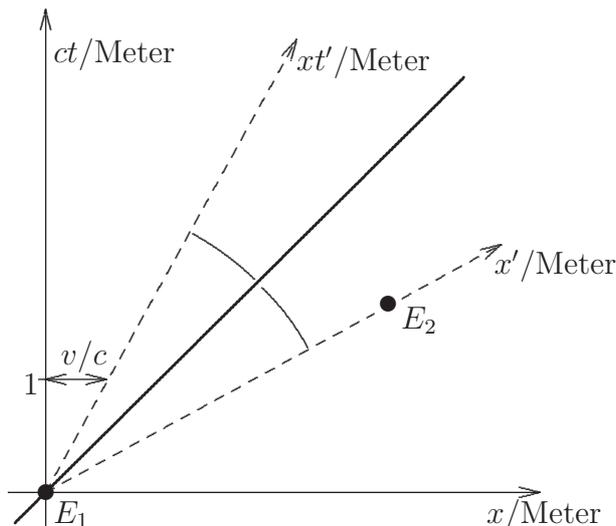
***Kausalitätsprinzip:***

Es existiert ein Inertialsystem, in dem jede Ursache ihrer Wirkung zeitlich vorausgeht.

Denn, wie man aus Abbildung B.2 leicht erkennt:

Für beliebige Ereignisse  $E_1, E_2$  sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

1. Es existiert ein Inertialsystem, in dem man sich mit **Überlichtgeschwindigkeit** bewegen müßte, um an beiden Ereignissen teilzunehmen.<sup>11</sup>
2. Es existieren ein Inertialsystem  $L'$ , für das  $E_1$   $L'$ -früher als  $E_2$  **und** ein Inertialsystem  $\hat{L}'$ , für das  $E_1$   $\hat{L}'$ -später als  $E_2$  stattfindet.

Abb. B.2: Raumartig getrennte Ereignisse  $E_1$ ,  $E_2$ .

Da wir natürlich auch das Kausalitätsprinzip als gültig ansehen wollen, müssen wir folgern:

**Signale** mit Überlichtgeschwindigkeit lassen sich prinzipiell nicht herstellen!

## B.2 Relativistische Dynamik

Auch in der speziellen Relativitätstheorie definiert man den Impuls  $\mathbf{p}$  eines Massenpunktes als Vielfaches seiner Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , wobei nun aber die Proportionalitätskonstante, die **träge Masse**, von  $\mathbf{v}$  abhängt:

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{m(\mathbf{v})}_{\text{träge Masse}} \mathbf{v}. \quad (\text{B.12})$$

Man kann nämlich zeigen (siehe Abschnitt 3.2.1 von (Lücke, rel)), daß nur im Falle

$$m(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v \underbrace{m_0}_{\text{Ruhemasse}} \quad (\text{B.13})$$

die Möglichkeit besteht, daß sich die Vektorsumme der gemäß (B.12) definierten Impulse zweier gleichartiger Teilchen — asymptotisch betrachtet — durch Streuung aneinander grundsätzlich nicht ändert. Wenn man die sog. **Ruhemasse**  $m_0$

<sup>10</sup>In diesem Fall folgt (B.8) direkt aus der Zeitdilatation.

<sup>11</sup>In diesem Falle nennt man die Ereignisse **raumartig getrennt**.

so wie in der nichtrelativistischen Mechanik über die Beschleunigung aus der Ruhelage definiert (siehe Abschn. 3.3.4 von (Lücke, ein)), dann zeigt die Erfahrung aus unzähligen Beschleunigerexperimenten, daß die Vektorsumme der Impulse relativistischer Teilchen vor gegenseitiger Wechselwirkung mit der Vektorsumme der Impulse der Streuprodukte<sup>12</sup> stets übereinstimmt (**Impulserhaltung**).

Indem man weiterhin die Kraft  $\mathbf{F}$  auf bewegte Massenpunkte so definiert, daß

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\gamma_{v(t)} m_0 \mathbf{v}(t))}_{=\mathbf{p}(t)} = \mathbf{F}(t) \quad (\text{B.14})$$

gilt, garantiert man die Additivität der Kraft in folgendem Sinne:

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses (Vektorsumme der Einzelimpulse) eines Systems relativistischer Massenpunkte stimmt mit der Vektorsumme aller Kräfte auf die einzelnen Massenpunkte überein.

Dafür nimmt man in Kauf, daß die Beschleunigung i.a. **nicht** mehr in die gleiche Richtung zeigt wie die Kraft:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} & \stackrel{(\text{B.14})}{=} \frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 \mathbf{v}) \\ & = \gamma_v m_0 \frac{d}{dt} \mathbf{v} + \gamma_v^{-3} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) m_0 \mathbf{v} \\ & \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} \frac{d}{dt} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Für (nicht singuläre) Lösungen von (B.14) gilt konsistenterweise stets

$$|\mathbf{v}(0)| < c \quad \implies \quad |\mathbf{v}(t)| < c \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

— wie auch immer die zeitabhängige Kraft  $\mathbf{F}(t)$  gewählt wird.

**Beweis:** Aus (B.14) folgt

$$\gamma_{v(t)} m_0 \mathbf{v}(t) = \gamma_{v(0)} m_0 \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{F}(t') dt'.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung für alle  $t$  endlich ist, muß dasselbe für die linke Seite gelten. Deshalb kann  $|\mathbf{v}(t)|$  nirgends den Wert  $c$  annehmen. Daraus folgt die Behauptung aus Stetigkeitsgründen. ■

<sup>12</sup>Dabei muß man allerdings gegebenenfalls auch Teilchen verschwindender Ruhemasse (Photonen, Neutronen) berücksichtigen.

Die geschwindigkeitsabhängige Größe

$$E_{\text{kin}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v m_0 c^2 - m_0 c^2 \quad (\text{B.15})$$

ist als kinetische Energie des Massenpunktes zu interpretieren; denn es gilt

$$\frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 c^2) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{B.16})$$

also

$$\int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{F}(t') dt' E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{kin}}(t_0),$$

und  $E_{\text{kin}}$  verschwindet für  $\mathbf{v} = 0$ .

**Beweis von (B.16):** Die Behauptung folgt mit (B.14) gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 \mathbf{v}) &= m_0 \left( v^2 \frac{d}{dt} \gamma_v + \gamma_v \underbrace{\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v}}_{=c^2 \gamma_v^{-3} \frac{d}{dt} \gamma_v} \right) \\ &= m_0 \underbrace{(v^2 + c^2 \gamma_v^{-2})}_{=c^2} \frac{d}{dt} \gamma_v \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 c^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Man beachte

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{m_0}{2} v^2 \quad \text{für } v \ll c$$

und

$$E_{\text{kin}} \xrightarrow{v \rightarrow c} \infty.$$

Naheliegenderweise bezeichnet man deshalb

$$E_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v m_0 c^2$$

als *L-Gesamtenergie* eines **freien** Massenpunktes der Ruhemasse  $m_0$ , der sich mit der *L-Geschwindigkeit*  $\mathbf{v}$  bewegt. Für  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  geht sie offensichtlich in die sog. **Ruheenergie**

$$E_0 \stackrel{\text{def}}{=} m_0 c^2$$

über.

Gemäß (B.9)/(B.10) transformieren sich auch die Komponenten des sog. **Vierer-Impulses**

$$\underline{p} \stackrel{\text{def}}{=} m_0 \underline{\dot{x}} \stackrel{\text{(B.9)}}{\underset{\text{(B.12),(B.13)}}{=}} \left( m(\mathbf{v}) c, \mathbf{p} \right)$$

wie die Raum-Zeit-Komponenten von Ereignissen. Deshalb (siehe Abschnitt 3.2.2 von (Lücke, rel)) folgt aus der asymptotischen Erhaltung des Gesamtimpulses (in jedem Inertialsystem!) die asymptotische Erhaltung der Summe aller Vierer-Impulse bei Streuprozessen. Es bleibt also auch die asymptotische Gesamtmasse<sup>13</sup> bzw. — was dasselbe ist — die asymptotische Gesamtenergie bei Streuprozessen erhalten.

Die Annahme, daß die Energieerhaltung — unter Berücksichtigung entsprechender Feldenergien — auch für wechselwirkende Systeme gilt, führte EINSTEIN auf das Prinzip der Kernspaltung:

Normalerweise sollte bei der Fusion von Protonen und Neutronen zu einem Atomkern Bindungsenergie frei werden. Wenn also die Ruhemasse eines Atomkerns größer ist als die Summe der Ruhemassen der Protonen und Neutronen, aus denen er zusammengesetzt ist, dann sollte dieser Kern relativ leicht zu einem Zerfall anregbar sein, bei dem dann entsprechende Energie frei wird.

Es läßt sich zeigen (siehe Abschnitt 3.1.2 von (Lücke, rel)), daß sich auch die Komponenten der sog. **Vierer-Beschleunigung**

$$\underline{\ddot{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \gamma_{\left| \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|} \frac{d}{dt} \right)^2 (ct, \mathbf{x}(t))$$

wie die Raum-Zeit-Koordinaten von Ereignissen transformieren. Wegen

$$\begin{aligned} m_0 \underline{\ddot{x}} &= \gamma_v \left( \frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 c), \frac{d}{dt} (\gamma_v m_0 \mathbf{v}) \right) \\ &\stackrel{\text{(B.16), (B.14)}}{=} \gamma_v \left( \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F} \right) \end{aligned}$$

transformieren sich somit auch die Komponenten der sog. **Vierer-Kraft**

$$\underline{F} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v \left( \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F} \right)$$

wie die Raum-Zeit-Koordinaten von Ereignissen. Insbesondere gilt also (für  $\mathbf{v} \neq 0$ )

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_{\parallel} + \frac{1}{\gamma_v} (\mathbf{F}' - \mathbf{F}'_{\parallel})$$

mit

$$\mathbf{F}'_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{F}' \right) \frac{\mathbf{v}}{v},$$

wenn  $\mathbf{F}'$  die entsprechende Kraft ist, die auf das Teilchen der  $L$ -Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in dessen Ruhesystem wirkt. Das erklärt z.B., warum in einem relativ zu  $L$  bewegten Inertialsystem  $L'$  ein Magnetfeld ‘erscheint’, wenn in  $L$  nur ein elektrisches Feld vorliegt.

<sup>13</sup>Während des Stoßprozesses ändert sich die Gesamtmasse i.a. natürlich, wenn man die Felder unberücksichtigt läßt, die die Wechselwirkung vermitteln.



# Anhang C

## Übungsaufgaben<sup>0</sup>

**Übungsaufgabe 1** Gegeben seien ein offenes Zeitintervall  $J$  mit  $0 \in J$  und eine stetig differenzierbare Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$ , die den Bedingungen

$$\mathbf{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$$

und

$$\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

genüge. Man zeige:

$$\mathbf{x}(t) = |\mathbf{x}(t)| \frac{\mathbf{x}(0)}{|\mathbf{x}(0)|} \quad \forall t \in J.$$

**Übungsaufgabe 2** Gegeben seien zwei Massenpunkte  $m_1$  resp.  $m_2$  mit den Ortsvektorfunktionen  $\mathbf{x}_1(t)$  resp.  $\mathbf{x}_2(t)$ , die zur Zeit  $t = 0$  ruhen:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(0) = \dot{\mathbf{x}}_2(0) = 0.$$

Die einzigen Kräfte, die auf die Massenpunkte wirken, seien durch das stetig differenzierbare Zweikörperpotential  $U$  gegeben:

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) = -\nabla_{\mathbf{x}_j(t)} U\left(|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}; j = 1, 2.$$

Weiterhin sei ein offenes Zeitintervall  $J$  gegeben mit  $0 \in J$  und

$$\mathbf{x}_1(t) \neq \mathbf{x}_2(t) \quad \forall t \in J.$$

Man zeige, daß eine Funktion  $\lambda_1(t)$  existiert, für die<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda_1(t) \mathbf{x}_1(0) + (1 - \lambda_1(t)) \mathbf{x}_2(0) \quad \forall t \in J$$

gilt und interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.

---

Version vom 26. März 2009

<sup>0</sup>Die Übungsaufgaben wurden zum Teil gemeinsam mit W. Scherer erstellt.

<sup>1</sup>**Hinweis:** Man untersuche die Bewegung in Relativ- und Schwerpunktskoordinaten (vgl. Aufgabe 30 zu *Math. Meth. d. Phys.*) und beachte den Flächensatz.

**Übungsaufgabe 3** Gegeben sei ein System von Massenpunkten  $m_1, m_2, m_3$ , für das sowohl der Gesamtimpuls als auch der Gesamtdrehimpuls für alle Zeiten 0 ist.

Man zeige, daß sich die Massenpunkte in einer festen Ebene bewegen,<sup>2</sup> solange sie sich nicht auf einer Geraden befinden.

**Übungsaufgabe 4** Die zeitabhängige Dichte einer Massenverteilung sei  $\mu(\mathbf{x}, t)$ , die zugehörige Massenstromdichte sei  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ . Sowohl die Momentangeschwindigkeiten als auch die Momentanbeschleunigungen aller Massenanteile am selben Ort seien jeweils alle gleich.<sup>3</sup> Man zeige, daß

$$\mathbf{a} = \frac{\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} \mu}{\mu^2} + \frac{\mu (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{j} - \mathbf{j} (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mu}{\mu^3}$$

die zugehörige Beschleunigungsverteilung ist.

**Übungsaufgabe 5** Sei  $\mathcal{K}$  ein (nicht notwendig starrer) ausgedehnter Körper mit (hinreichend gutartiger) Massendichte  $\mu(\mathbf{x}, t)$ , Geschwindigkeitsverteilung  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  und Beschleunigungsverteilung  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ . Die Gesamtkraft auf  $\mathcal{K}$  zur Zeit  $t$  sei gemäß

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

durch eine (hinreichend gutartige) **Volumenkraft-Dichte**  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  gegeben.

Man zeige, daß mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, && \text{(\textbf{Gesamtimpuls})}, \\ M &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, && \text{(\textbf{Gesamtmasse, unabhängig von } t)}, \\ \mathbf{X}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}}, && \text{(\textbf{Schwerpunkts-Ortsvektor})}, \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\mathbf{P}(t) = M \dot{\mathbf{X}}(t)$$

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>**Hinweis:** Man zeige, daß der Eigendrehimpuls des Massenpunktsystems verschwindet und werte das für das innere Produkt des Eigendrehimpulses mit  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$  aus. Damit läßt sich z.B.

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) \cdot \left( (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t)) \times (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_3(t)) \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

zeigen und schließlich

$$(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t)) \cdot \frac{d}{dt} \left( (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t)) \times (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_3(t)) \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

<sup>3</sup>Für Gase ist das nicht i.a. **nicht** der Fall.

gilt<sup>4</sup> und aus

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$$

die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$M \ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)$$

für den Schwerpunkt von  $\mathcal{K}$  folgt.

**Übungsaufgabe 6** Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mu(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  wie in Aufgabe 5 vorgegeben. Das Gesamtdrehmoment auf  $\mathcal{K}$  (bzgl. des Ortsvektor-Bezugspunktes) zur Zeit  $t$  sei

$$\mathbf{M}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Man zeige die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t),$$

wobei

$$\mathbf{L}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \times (\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}}$$

den Gesamtdrehimpuls von  $\mathcal{K}$  (bzgl. des Ortsvektor-Bezugspunktes) zur Zeit  $t$  bezeichnet.

**Übungsaufgabe 7** Ein homogener Zylinder der Gesamtmasse  $m$  rolle (ohne zu rutschen, auf schnellstem Wege) unter dem Einfluß der konstant angenommenen Schwerkraft  $m\mathbf{g}$  eine schiefe Ebene mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  herab. Man bestimme mithilfe des Energiesatzes und der Bewegungsgleichung für den Eigendrehimpuls die zu  $\mathbf{n}$  senkrechte Komponente der (Zwangs-) Kraft, die die Ebene auf den Zylinder ausübt.

**Übungsaufgabe 8** Man zeige, daß die kinematische Nebenbedingung

$$\dot{x}^2(t) \cos\left(\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}\right) - \dot{x}^1 \sin\left(\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Man zeige zunächst, daß für hinreichend gutartige  $\Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$$

gilt, und beachte die Kontinuitätsgleichung.

nicht holonom sind,<sup>5</sup> daß sich aber insgesamt holonome Nebenbedingungen ergeben, wenn man die Nebenbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x^1(t) = x^2(t), \\ \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v.}} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

noch hinzufügt.

**Übungsaufgabe 9** Ein *Snakeboard* ist ein modifiziertes Skateboard, bei dem beide Radachsen<sup>6</sup> parallel zum Brett frei drehbar sind. Zur Charakterisierung des Snakeboard-Zustandes<sup>7</sup> benötigen wir die Parameter:

$$\left( \begin{array}{l} 1\text{-Koordinate des Brettschwerpunkts}/R \\ 2\text{-Koordinate des Brettschwerpunkts}/R \\ \text{Polarwinkel des Bretts} \\ \text{Polarwinkel der vorderen Achse} \\ \text{Polarwinkel der hinteren Achse} \end{array} \right) = \boldsymbol{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{l} x_s^1/R \\ x_s^2/R \\ \vartheta \\ \varphi_+ \\ \varphi_- \end{array} \right).$$

Die kinematischen Nebenbedingungen bestehen darin, daß sich die Achsenswerpunkte bei rollendem Snakeboard nur senkrecht zur Ausrichtung der jeweiligen Achse bewegen können. Man gebe diese Nebenbedingungen in der Form

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha}_{\pm}(\boldsymbol{\xi}) \mid \dot{\boldsymbol{\xi}} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^5 \alpha_{\pm}^k(\boldsymbol{\xi}) \dot{\xi}^k = 0$$

an und zeige, daß sie zwar skleronom aber nicht holonom sind.

**Übungsaufgabe 10** Ein Massenpunkt  $m$  gleite unter dem Einfluß der konstant angenommenen Schwerkraft  $-mg \mathbf{e}_3$  auf einer glatten Ebene, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v \mathbf{e}_1$  bewege und die Flächennormale  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_3$  habe. Die Geschwindigkeit des Massenpunkts zur Zeit 0 sei ebenfalls  $\mathbf{v}$ . Man zeige:

- a) Die Arbeit, die die Schwerkraft an  $m$  während des Zeitintervalls  $[0, t]$  verrichtet, ist

$$W_g(t) = \frac{m}{2} (t g \cos \alpha)^2.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>5</sup>Man nennt üblicherweise bereits die kinematischen Nebenbedingungen für sich *nicht holonom*, wenn sie sich durch keine Auswahl der erlaubten Anfangspositionen zu einem System holonomer Nebenbedingungen ergänzen lassen.

<sup>6</sup>Der Schwerpunkt des Snakeboards liege genau zwischen beiden Achsenswerpunkten, die den Abstand  $2R$  haben.

<sup>7</sup>Wir interessieren uns nicht für den Umdrehungsstand der Räder.

b) Die Arbeit, die die Ebene an  $m$  während des Zeitintervalls  $[0, t]$  verrichtet, ist

$$W_Z(t) = (m g \sin \alpha \cos \alpha) v t .$$

**Übungsaufgabe 11** Man zeige mithilfe des D’ALEMBERTSchen Prinzips und der NEWTONSchen Bewegungsgleichung, daß die Zwangskraft beim sphärischen Pendel (mit beliebig bewegtem Aufhängepunkt) tatsächlich parallel (bzw. antiparallel) zur Pendelstange sein muß.

**Übungsaufgabe 12** Man zeige mithilfe des D’ALEMBERTSchen Prinzips und der NEWTONSchen Bewegungsgleichung, daß die Zwangskräfte des in Abschnitt 1.1.1.1 der Vorlesung als Beispiel (ii) betrachteten Doppelpendels tatsächlich für alle Zeiten  $t$  den Bedingungen

$$\mathbf{F}_2^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) , \quad \mathbf{F}_1^Z(t) + \mathbf{F}_2^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)$$

genügen und gebe dafür eine anschauliche Erklärung.

**Übungsaufgabe 13** Man leite das in Abschnitt 2.2.1 der *Math. Meth. d. Phys.* formulierte Hebelgesetz aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit – Gleichung (1.14) der Vorlesung – ab.<sup>8</sup>

**Übungsaufgabe 14** Das Ende einer Schraube in einem reibungsfreien Gewinde drücke mit der Kraft  $\mathbf{F}$  auf ein Gegenstück. Das Gewinde entspreche einem Schraubenvorschub um die Strecke  $\Delta s$  pro Schraubendrehung.

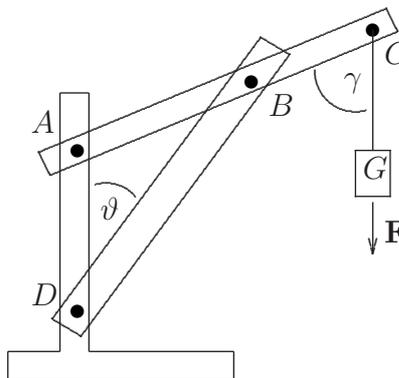
Man bestimme mithilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit das dafür auf die Schraube auszuübende Drehmoment  $\mathbf{M}$ .

Version vom 26. März 2009

<sup>8</sup>**Hinweis:** Man betrachte ein System von zwei Massenpunkten, die am Ende starrer, masseloser, im Punkte  $P_0$  frei drehbar befestigter Stangen angebracht sind und mit einer weiteren starren, masselosen Stange auf konstantem Abstand voneinander gehalten werden.

### Übungsaufgabe 15

Ein Gewicht  $G$  sei folgendermaßen an einem einfachen Galgen aufgehängt:



Unter Vernachlässigung der Gewichte der Balken berechne man **mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit** die Kraft, mit der Bolzen  $D$  auf den Balken zwischen  $B$  und  $D$  wirkt,<sup>9</sup> aus  $|\mathbf{AC}|$ ,  $|\mathbf{AB}|$ , den Winkeln  $\gamma$ ,  $\vartheta$  und der Schwerkraft  $\mathbf{F}$ , die auf  $G$  wirkt.

**Übungsaufgabe 16** Ein Massenpunkt gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft  $-mg\mathbf{e}_3$  reibungsfrei auf einer Ebene, die die Gerade in Richtung  $\mathbf{e}_2$  durch  $P_0$  enthält. Die Flächennormale  $\mathbf{n}(t)$  hänge explizit von der Zeit  $t$  ab. Man wähle zwei geeignete generalisierte Koordinaten und bestimme dazu die LAGRANGE-Gleichungen II. Art.

**Übungsaufgabe 17** Ein Massenpunkt gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft  $-mg\mathbf{e}_3$  reibungsfrei auf einer Kugel mit Radius  $R$ .

- Man wähle alle drei Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  als generalisierte Kugelkoordinaten, stelle dazu die entsprechenden LAGRANGE-Gleichungen I. Art auf und bestimme die Zwangskraft, die die Kugeloberfläche auf den Massenpunkt ausübt.
- Man wähle die Kugelkoordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$  als generalisierte Kugelkoordinaten, stelle dazu die LAGRANGE-Gleichungen II. Art auf, die die Bewegung des Massenpunkts bestimmen (solange er nicht von der Kugel abspringt), und diskutiere die zugehörigen Erhaltungssätze.

**Übungsaufgabe 18** Für die in 1.1.3.2 untersuchte Hantel bestimme man die kinetische Energie  $T$  als Funktion der dort benutzten Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  sowie der Zeit und zeige damit, daß die Gleichungen (1.52) der Vorlesung (bis auf einen Faktor) mit den in 1.1.3.2 abgeleiteten Bewegungsgleichungen (1.23) übereinstimmen.

**Übungsaufgabe 19** Ein undehnbarer, masseloser Faden der Länge  $R_1$  sei mit einem Ende im Koordinatenursprung  $P_0$  befestigt. Am anderen Ende des gespannten Fadens sei ein Massenpunkt  $m_1$  befestigt. Der Massenpunkt  $m_1$  wiederum sei durch einen gespannten, undehnbaren, masselosen Faden der Länge  $R_2$  mit einem Massenpunkt  $m_2$  verbunden. Die Erdbeschleunigung sei näherungsweise als konstant  $+g \mathbf{e}_3$  angenommen.

Man wähle für dieses *Doppelpendel* vier geeignete generalisierte Koordinaten, bestimme die zugehörige LAGRANGE-Funktion, gebe zwei Erhaltungsgrößen an und stelle die Bewegungsgleichungen für den Spezialfall auf, daß sich beide Massenpunkte in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene bewegen.

**Übungsaufgabe 20** Betrachtet sei ein System von Massenpunkten  $m_1, \dots, m_N$  (nicht verschwindender Masse), deren Ortsvektoren  $\mathbf{x}_\gamma$  sich (lokal) durch generalisierte Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$ , die keinen Einschränkungen unterliegen, so beschreiben lassen, daß

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{E} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \sum_{\nu=1}^n E^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\gamma : \gamma \in \{1, \dots, N\} \right\} \neq \{0\}$$

gilt. Für eingepreßte Kräfte, die sich durch ein verallgemeinertes Potential beschreiben lassen, zeige man allgemein, daß die entsprechenden LAGRANGE-Gleichungen II. Art zu vorgegebenen erlaubten Anfangsbedingungen (lokal) stets eindeutig lösbar sind.<sup>10</sup>

**Übungsaufgabe 21** Man zeige, daß die uneingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes  $m$  im Kraftfeld eines Potentials der Form

$$V(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)^4 \alpha, \quad \alpha > 0,$$

nur im Falle spezieller Anfangsbedingungen für alle Zeiten wohldefiniert sein kann.<sup>11</sup>

---

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>**Hinweis:** Man zeige zunächst, daß die Matrix der

$$\alpha_{\nu,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\gamma \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\gamma \right) \quad \text{für } \nu, \mu = 1, \dots, n$$

nur positive Eigenwerte besitzt und deshalb invertierbar ist.

<sup>11</sup>**Hinweis:** Dieses Problem läßt sich auf das von Aufgabe 54 der *Math. Meth. d. Phys.* zurückführen.

**Übungsaufgabe 22** Betrachtet sei ein einzelner Massenpunkt mit der Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$ , die den kinetischen Nebenbedingungen<sup>12</sup>

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}(t)) &= 0, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}(t)) &= 0, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq t_1$$

unterliege.

Man zeige, daß sich ein holonomes System mit einem einzigen Freiheitsgrad ergibt, wenn man die zum Anfangszeitpunkt  $t_1$  erlaubten Positionen geeignet einschränkt.

### Übungsaufgabe 23

- a) Für beliebig vorgegebene (hinreichend gutartige) LAGRANGE-Funktionen  $L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ ,  $L_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  zeige man, daß

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_1 - \nabla_{\mathbf{x}} L_1 \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) = \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_2 - \nabla_{\mathbf{x}} L_2 \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t)$$

für alle  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^{10}$  genau dann gilt, wenn ein (hinreichend gutartiges, zeitabhängiges) Skalarfeld  $f(\mathbf{x}, t)$  existiert mit

$$L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - L_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \dot{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^{3+3+1}.$$

- (b) Man diskutiere die Bedeutung des entsprechenden Sachverhalts für die in Abschnitt 1.2.2.3 betrachteten verallgemeinerten Potentiale elektromagnetischer Kräfte.

**Übungsaufgabe 24** Ein homogener Vollzylinder mit dem Radius  $R$  und der Gesamtmasse  $m$  **rolle** (ohne zu rutschen) auf einer Ebene mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$ .

- a) Man wähle den Abrollwinkel  $\varphi$  als (einzige) generalisierte Koordinate und zeige für beliebige eingeprägte Volumenkräfte, daß die generalisierte eingeprägte Kraft mit dem Gesamtdrehmoment aller eingepprägten Kräfte bzgl. der momentanen Drehachse<sup>13</sup> übereinstimmt.

Version vom 26. März 2009

<sup>12</sup>**Hinweis:** Man zeige zunächst mithilfe des Entwicklungssatzes

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}) = 0 \quad \implies \quad (\mathbf{e}_j \times \dot{\mathbf{x}}) \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}) = 0$$

und beachte Übungsaufgabe 1.

<sup>13</sup>Gemeint ist die Komponente (entsprechender Orientierung) parallel zur momentanen Drehachse bzgl. eines (beliebigen) Punktes auf der momentanen Drehachse.

- b) Man bestimme das verallgemeinerte Potential  $U(\varphi)$  für den Fall, daß bei den eingepägten Kräften nur der Einfluß des Schwerfeldes  $\mathbf{g}$  zu berücksichtigen ist und die momentane Drehachse stets in Richtung von  $\mathbf{n} \times \mathbf{g}$  zeigt. Dazu bestimme man die verallgemeinerte eingepägte Kraft  $Q_\varphi^e = -\frac{\partial}{\partial \varphi} U(\varphi)$  und überprüfe die Konsistenz mit a).

**Übungsaufgabe 25** Gegeben sei ein (holonomes) System von Massenpunkten  $m_1, \dots, m_N$ , dessen Bewegungsgleichungen (lokal) in geeigneten generalisierten Koordinaten  $q^1, \dots, q^n$  durch die Gleichungen (1.59) der Vorlesung gegeben seien. Dazu sei angenommen, daß konstante Vektoren  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{x}_0$  existieren mit

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) = \mathbf{e} \times (\mathbf{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) - \mathbf{x}_0) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, N\}$$

Man zeige, daß  $q^1$  genau dann (lokal) zyklisch ist, wenn das verallgemeinerte Potential  $U$  (lokal) von  $q^1$  unabhängig ist.<sup>14</sup>

**Übungsaufgabe 26** Ein Massenpunkt  $m$  gleite unter dem Einfluß der konstanten Schwerkraft  $m g \mathbf{e}_3$  reibungsfrei auf einem Kreisring mit Radius  $R$  und zu  $\mathbf{e}_3$  senkrechter Symmetrieachse, der entsprechend der konstanten vektoriellen Kreisfrequenz  $\omega \mathbf{e}_3$  um seinen festen Mittelpunkt rotiere.

- Man wähle eine geeignete generalisierte Koordinate und bestimme die zugehörige LAGRANGE-Gleichung II. Art.
- Man bestimme diejenigen Positionen, um die herum beliebig kleine Schwingungen auf dem Kreisring möglich sind, und gebe die entsprechenden — linear genäherten — Schwingungsgleichungen an.
- Man zeige, daß die Gesamtenergie des Massenpunktes nicht erhalten ist und gebe dafür eine physikalische Erklärung.

### Übungsaufgabe 27

- a) Man beweise für beliebig vorgegebene  $3 \times 3$ -Matrizen  $\hat{A}, \hat{B}$  die sog. CAMPBELL-HAUSDORFF-**Formel**<sup>15</sup>

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \exp(\text{ad}_{\hat{A}}) \hat{B},$$

wobei

$$\text{ad}_{\hat{A}} \hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{A}, \hat{C}]_- \quad \text{für } 3 \times 3\text{-Matrizen } \hat{C}.$$

Version vom 26. März 2009

<sup>14</sup>**Hinweis:** Man beachte die zweite der Gleichungen (1.45) der Vorlesung.

<sup>15</sup>**Hinweis:** Man betrachte die Formel für  $\lambda \hat{A}$  anstelle von  $\hat{A}$  und untersuche die Ableitungen beider Seiten der Gleichung nach  $\lambda$  analog zur Begründung von Gleichung (2.8) der Vorlesung.

b) Man beweise die Gleichungen

$$\begin{aligned} R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} R_{-\psi \mathbf{e}_3} &= J_{-\dot{\vartheta} (\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2)}, \\ R_{\psi \mathbf{e}_3} R_{\vartheta \mathbf{e}_1} J_{-\dot{\phi} \mathbf{e}_3} R_{-\vartheta \mathbf{e}_1} R_{-\psi \mathbf{e}_3} &= J_{-\dot{\phi} (\sin \vartheta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \vartheta \mathbf{e}_3)} \end{aligned}$$

mithilfe der CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel und der Vertauschungsrelationen (2.12).

### Übungsaufgabe 28

Eine homogene Kugel der Masse  $M$  mit dem Radius  $R$  rolle (mit beliebigem Drall) ohne Rollwiderstand unter dem Einfluß der Schwerkraft  $-Mg(\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_3)$  auf der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene.

- a) Man wähle EULERSche Winkel für die Kugelorientierung und zwei karthesische Koordinaten für den Kugelschwerpunkt als generalisierte Koordinaten, bestimme dafür die Nebenbedingungen<sup>16</sup> und ermittle die zugehörigen LAGRANGE-Gleichungen (vom gemischten Typ).
- b) Man bestimme den allgemeinsten Bewegungsablauf der Kugel für  $\alpha = 0$ .

**Übungsaufgabe 29** Man zeige mithilfe von Gleichung (2.16) der Vorlesung, daß die EULERSchen Gleichungen (2.44) des kräftefreien Kreisels genau dann erfüllt sind, wenn der Drehimpuls zeitlich konstant ist.

**Übungsaufgabe 30** Man zeige, daß der in Gleichung (2.59) der Vorlesung angegebene, zu  $\phi$  kanonisch konjugierte Impuls (für den Fall  $\theta_1 = \theta_2$ ) mit der  $\mathbf{e}_3$ -Komponente des Drehimpulses übereinstimmt.

**Übungsaufgabe 31** Ein Massenpunkt  $m$  gleite reibungsfrei auf einer Kugel mit Radius  $R$  unter dem Einfluß der konstanten Kraft  $-mg \mathbf{e}_3$  sowie der zusätzlichen CORIOLIS-Kraft

$$\mathbf{C}(t) = -2m \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}' = \omega_C \cos \theta \mathbf{e}_3 - \omega_C \sin \theta \mathbf{e}_1.$$

Als Koordinatenursprung  $P_0$  sei der Kugelmittelpunkt gewählt.

- a) Man bestimme die zugehörigen LAGRANGE-Gleichungen I. Art in karthesischen Koordinaten und zeige, daß die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße ist.

- b) Man zeige, daß sich für kleine Schwindungen (FOUCAULT'sches *Pendel*), d.h. für

$$\left| \frac{x^3(t) + R}{x^3(t)} \right| \ll 1, \quad |\ddot{x}^3(t)| \ll g, \quad \|\dot{x}^3(t)\| \ll 1,$$

die Näherungsgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2i\Omega \dot{z}(t) + \omega_g^2 z(t) = 0$$

für  $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} x^1(t) + ix^2(t)$  ergibt, wobei

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_C \cos \theta, \quad \omega_g \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

- c) Man löse diese Näherungsgleichungen für  $z(t)$  und diskutiere das Ergebnis für  $0 \leq \Omega \ll \omega_g$ .

**Übungsaufgabe 32** Sei  $\theta_t^S$  der Trägheitstensor eines starren Körpers  $\mathcal{K}$  der Gesamtmasse  $M$  bezüglich seines Schwerpunktes  $\mathbf{X}(t)$ .

Man zeige, daß der Trägheitstensor  $\theta_t$  von  $\mathcal{K}$  bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  durch

$$\theta_t(\omega_1, \omega_2) = \theta_t^S(\omega_1, \omega_2) + M \left( \omega_1 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \omega_2 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right)$$

gegeben ist und im allgemein andere Hauptträgheitsachsen hat als  $\theta_t^S$ .

**Übungsaufgabe 33** Es sei  $\mathbf{x}(t)$  eine (hinreichend gutartige) 1-Teilchen-Bewegung die der Bedingung

$$0 = \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2 dt \right) \Big|_{s=0}$$

für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  und alle Variationen

$$\left( \mathbf{x}(t), t_1, t_2 \right) \longmapsto \left( \mathbf{x}(t, s), t_1, t_2 \right)$$

mit

$$\{\mathbf{x}(t) : t \in [t_1, t_2]\} = \{\mathbf{x}(t, s) : t \in [t_1, t_2]\} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

und

$$\mathbf{x}(t_j, s) = \mathbf{x}(t_j) \quad \forall j \in \{1, 2\}, s \in \mathbb{R}$$

genügt.

Man zeige, daß  $|\dot{\mathbf{x}}(t)|$  über  $[t_1, t_2]$  zeitlich konstant ist.

**Übungsaufgabe 34** Gegeben sei ein System von  $N$  Massenpunkten der in Aufgabe 20 betrachteten Art.

Man beweise für jeweils festes  $(q, t)$ , daß  $L(q, \dot{q}, t)$  eine streng konvexe Funktion von  $\dot{q}$  ist und

$$\left\{ p = (p^1, \dots, p^n) : \exists \dot{q} \in \mathbb{R}^n : p^\nu = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} \right\} = \mathbb{R}^n$$

gilt.

**Übungsaufgabe 35** Die generalisierten Koordinaten  $q$  seien über einem hinreichend gutartigen (einfach zusammenhängenden) Teilgebiet  $\mathcal{G}$  des  $\mathbb{R}^n$  wohldefiniert.  $f_1(q, p, t)$ ,  $f_2(q, p, t)$ ,  $f_3(q, p, t)$  seien hinreichend gutartige Funktionen über  $\mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , die für hinreichend großes  $p$  verschwinden. Man zeige:

a) Mit der Definition<sup>17</sup>

$$X_{f_j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} - \frac{\partial f_j}{\partial q^\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right)$$

gilt

$$X_{f_1} = X_{f_2} \iff f_1 = f_2.$$

b)

$$X_{\{f_k, f_j\}_{q,p}} = [X_{f_j}, X_{f_k}]_- \stackrel{\text{def}}{=} X_{f_j} X_{f_k} - X_{f_k} X_{f_j} \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

c) Es gilt die JACOBI-Identität<sup>18</sup>

$$\left\{ f_1, \{f_2, f_3\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ f_2, \{f_3, f_1\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ f_3, \{f_1, f_2\}_{q,p} \right\}_{q,p} = 0.$$

**Übungsaufgabe 36** Man bestimme die HAMILTONSchen kanonischen Gleichungen für das sphärische Pendel im homogenen Kraftfeld mit den Polarwinkeln als verallgemeinerten Koordinaten.

**Übungsaufgabe 37** Man zeige, daß das Variationsprinzip (3.28) auch dann noch äquivalent zu den kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18) ist, wenn man die Bedingung

$$p(t_j, s) = p(t_j) \quad \text{für } j = 1, 2 \text{ und beliebiges } s$$

an die erlaubten Variationen fallen läßt.

<sup>17</sup>Vgl. (A.19).

<sup>18</sup>Siehe Gleichung (3.24) der Vorlesung.

**Übungsaufgabe 38** Gegeben sei ein Massenpunkt  $m$ , der sich in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene unter dem Einfluß der eingepprägten Kraft

$$\mathbf{F}^e(\mathbf{x}) = -D \mathbf{x}$$

bewege.

a) Man wähle  $x^1, x^2$  als generalisierte Koordinaten und gebe dafür die LAGRANGE-Funktion, die HAMILTON-Funktion und die Lösung

$$\left( x^1(t), x^2(t) \right) = \left( x_{x_0^1, v_0^1}^1(t), x_{x_0^2, v_0^2}^2(t) \right)$$

der Bewegungsgleichungen zu den Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x^j(0) = x_0^j, \\ \dot{x}^j(0) = v_0^j \end{array} \right\} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

an.

b) Man zeige explizit, daß — in dieser Bezeichnungsweise — für jede Lösung  $x^1(t), x^2(t)$  die Flußbedingung

$$x^j(t_1 + t_2) = x_{x^j(t_1), \dot{x}^j(t_1)}^j(t_2) \quad \forall j \in \{1, 2\}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist.

**Übungsaufgabe 39** Man behandle

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \omega^2 x_1 x_2$$

formal als LAGRANGE-Funktion eines Teilchen im  $\mathbb{R}^2$ :

a) Man bestimme dazu die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, die HAMILTON-Funktion und die kanonischen Gleichungen (3.17)/(3.18).

b) Man zeige, daß  $\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \omega^2 x_1 x_2$  eine Erhaltungsgröße ist.

**Übungsaufgabe 40** Man zeige, daß jede eindimensionale Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

äquivalent zu den kanonischen Gleichungen einer HAMILTON-Funktion der Form

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + U(x)$$

ist. Für den Fall  $U(x) = ax^2 + bx^3$  mit negativen Konstanten  $a, b$  (entsprechender physikalischer Dimension) skizziere man das Phasenportrait (die Bahnen in der  $x, p$ -Ebene) zusammen mit dem Graphen der Potentialfunktion  $U(x)$ .



# Anhang D

## Lösungsvorschläge

**Zu Aufgabe 1:** Aus der Voraussetzung

$$\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

folgt die Existenz einer Funktion  $g(t)$  mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = g(t) \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in J \tag{D.1}$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = \left( g(t) - \frac{\frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} \right) \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \quad \forall t \in J.$$

Wegen<sup>1</sup>

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \cdot \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \right) = 2 \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \quad \forall t \in J$$

folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = 0 \quad \forall t \in J$$

und somit

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = \frac{\mathbf{x}(0)}{|\mathbf{x}(0)|} \quad \forall t \in J.$$

**Zu Aufgabe 2:** Gemäß Aufgabe 30 von *Math. Meth. d. Phys.* genügen die Ortsvektorfunktionen

$$\mathbf{x}_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 \mathbf{x}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x}_r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$$

für Schwerpunkts- und Relativbewegung den Gleichungen

$$\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = 0 \tag{D.2}$$

---

Version vom 26. März 2009

<sup>1</sup>Oder, alternativ, wegen  $\frac{\frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} \stackrel{\text{(D.1)}}{=} g(t)$ .

und

$$\mu \ddot{\mathbf{x}}_r(t) = -\text{grad } U(|\mathbf{x}_r(t)|) \left( = -U'(|\mathbf{x}_r(t)|) \frac{\mathbf{x}_r(t)}{|\mathbf{x}_r(t)|} \right), \quad (\text{D.3})$$

wobei

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{reduzierte Masse}).$$

Aus (D.2) folgt

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \dot{\mathbf{x}}_s(0) = \frac{m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(0)}{m_1 + m_2} \stackrel{\text{Voraus.}}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und somit

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}_s(0) = \frac{m_1 \mathbf{x}_1(0) + m_2 \mathbf{x}_2(0)}{m_1 + m_2} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.4})$$

Aus (D.3) folgt gemäß Flächensatz

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_r(t) \times \dot{\mathbf{x}}_r(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und somit gemäß Aufgabe 1:

$$\mathbf{x}_r(t) = |\mathbf{x}_r(t)| \frac{\mathbf{x}_r(0)}{|\mathbf{x}_r(0)|} \quad \forall t \in J.$$

Mit

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_s(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{x}_r(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und (D.4) folgt daraus

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda_1(t) \mathbf{x}_1(0) + (1 - \lambda_1(t)) \mathbf{x}_2(0) \quad \forall t \in J,$$

wobei

$$\lambda_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \frac{|\mathbf{x}_r(t)|}{|\mathbf{x}_r(0)|}.$$

Geometrische Interpretation:

Massenpunkt 1 bewegt sich während des Zeitintervalls  $J$  auf der Geraden durch die Punkte mit den Ortsvektoren  $\mathbf{x}_1(0)$  und  $\mathbf{x}_2(0)$ .

Man beachte, daß die Numerierung der Massenpunkte beliebig ist. Massenpunkt 2 bewegt sich also auf der gleichen Geraden.

**Zu Aufgabe 3:** Da der Bahndrehimpuls wegen

$$(m_1 + m_2 + m_3) \dot{\mathbf{X}}(t) = \sum_{j=1}^3 m_j \dot{\mathbf{x}}_j(t) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} 0 \quad (\text{D.5})$$

verschwindet, verschwindet gemäß Abschnitt 3.4.2 von *Math. Meth. d. Phys.* auch der Eigendrehimpuls. Mit

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2 + m_3) \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{X}(t) \right) &= m_2 \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right) + m_3 \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t) \right) \\(m_1 + m_2 + m_3) \left( \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{X}(t) \right) &= m_3 \left( \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_3(t) \right) + m_1 \left( \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) \right) \\(m_1 + m_2 + m_3) \left( \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{X}(t) \right) &= m_1 \left( \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_1(t) \right) + m_2 \left( \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_2(t) \right)\end{aligned}$$

und (D.5) folgt daraus

$$\begin{aligned}0 &= \left( m_2 \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right) + m_3 \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t) \right) \right) \times m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\&\quad + \left( m_3 \left( \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_3(t) \right) + m_1 \left( \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) \right) \right) \times m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\&\quad + \left( m_1 \left( \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_1(t) \right) + m_2 \left( \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_2(t) \right) \right) \times m_3 \dot{\mathbf{x}}_3(t).\end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)$$

ergibt sich daraus durch Bildung des inneren Produktes mit  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)$

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \times \left( -m_1 m_2 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 (m_1 + m_3) \dot{\mathbf{x}}_2 - m_2 m_3 \dot{\mathbf{x}}_3 \right) \right) \\&\stackrel{\dot{\mathbf{x}}=0}{=} m_2 (m_1 + m_2 + m_3) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \times \dot{\mathbf{x}}_2 \right).\end{aligned}$$

Aufgrund der Zyklicität des Spat-Produktes gilt somit

$$\dot{\mathbf{x}}_2 \cdot \left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right) = 0,$$

d.h. der Geschwindigkeitsvektor von Massenpunkt 2 ist parallel zu der Ebene, in der alle drei Massenpunkte momentan liegen. Da die Numerierung willkürlich ist, gilt entsprechendes natürlich für die Massenpunkte 1 und 3. Damit gilt

$$\begin{aligned}0 &= (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_3) \cdot \left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right) \\&= -(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \left( (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right) \\&= -(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \left( (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_3) \right) \\&= -(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \frac{d}{dt} \left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right).\end{aligned}$$

Aufgrund der Willkürlichkeit der Numerierung muß auch

$$0 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \cdot \frac{d}{dt} \left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right)$$

gelten und somit aufgrund des Entwicklungssatzes (anschaulich klar):

$$\left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right) \times \frac{d}{dt} \left( (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \right) = 0.$$

Mit Aufgabe (1) folgt daraus:

Die Flächennormale der von den Massenpunkten aufgespannten Ebene ist für  $t \in J$  zeitlich konstant.

Da diese Ebene stets den Schwerpunkt enthält und letzterer voraussetzungsgemäß ruht, ist sie also fest, solange die Positionen der Massenpunkte nicht auf einer Geraden liegen.

**Zu Aufgabe 4:** Sei  $\mathbf{x}(t)$  die Ortsvektorfunktion eines ausgewählten punktförmigen Massenanteils. Dann gilt dafür voraussetzungsgemäß

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t) = \mu(\mathbf{x}(t), t) \dot{\mathbf{x}}(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) &= \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t)}{\mu(\mathbf{x}(t), t)} \\ &\stackrel{\text{Quotientenr.}}{=} \frac{\mu(\mathbf{x}(t), t) \frac{d}{dt} \mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t) \frac{d}{dt} \mu(\mathbf{x}(t), t)}{\left( \mu(\mathbf{x}(t), t) \right)^2}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{j}(\mathbf{x}(t), t) &\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{\mu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt} \mu(\mathbf{x}(t), t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \mu(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{\mu(\mathbf{x}, t)} \mu(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}$$

folgt daraus die Behauptung, da  $\mathbf{x}(t_0)$  zu vorgegebenem  $t_0$  beliebig wählbar ist.

**Zu Aufgabe 5:** Für jedes einfache Gebiet  $\mathcal{G}$  und hinreichend gutartige  $\Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{G}} \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \int_{\mathcal{G}} \nabla \cdot (\Phi(\mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x})) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathcal{G}} (\Phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x})) dV_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Falls  $\Phi(\mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x})$  im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet, folgt daraus im Limes  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}. \quad (\text{D.6})$$

Mit  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  folgt damit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M \dot{\mathbf{X}}(t)}} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{Kont.-Gl.}}{=} - \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(\text{D.6})}{=} + \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{P}(t)}} \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M \ddot{\mathbf{X}}(t)}} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{Aufg. 4}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \mu \mathbf{a} - \left( \frac{\mathbf{j}}{\mu} \cdot \nabla \right) \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{\mu} \left( \frac{\mathbf{j}}{\mu} \cdot \nabla \right) \mu + \frac{\mathbf{j}}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \mu \right) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{Kont.-Gl.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \mu \mathbf{a} - \left( \frac{\mathbf{j}}{\mu} \cdot \nabla \right) \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{\mu} \left( \frac{\mathbf{j}}{\mu} \cdot \nabla \right) \mu - \frac{\mathbf{j}}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \mu \mathbf{a} - \left( \frac{\mathbf{j}}{\mu} \cdot \nabla \right) \mathbf{j} - \mathbf{j} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\mu} \right) \right) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{(\text{D.6})}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{F}(t)}}. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 6: Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= \int \mathbf{x} \times \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{Aufg. 4}}{=} \int \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int \frac{\mathbf{x}}{\mu} \times \left( \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} \mu - (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{\mu} (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mu \right) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} &= \int \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{dt} \int \mathbf{x} \times \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) \end{aligned}$$

ist nur

$$\int \frac{\mathbf{x}}{\mu} \times \left( \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} \mu - (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{\mu} (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mu \right) dV_{\mathbf{x}} = 0$$

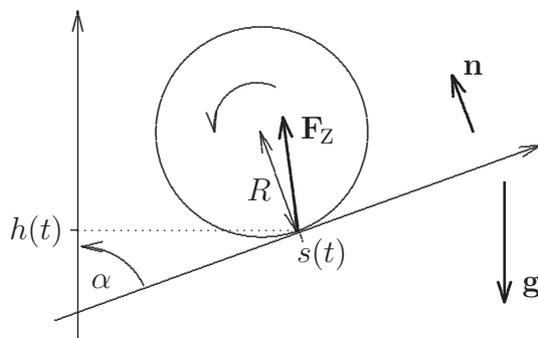
zu zeigen, was aufgrund der Kontinuitätsgleichung äquivalent ist zu

$$\int \frac{\mathbf{x}}{\mu} \times \left( (\nabla \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{j} - \frac{\mathbf{j}}{\mu} (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mu \right) dV_{\mathbf{x}} = 0.$$

Das folgt aber gemäß

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{x}}{\mu} \times (\nabla \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} dV_{\mathbf{x}} &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int (\mathbf{j} \cdot \nabla) \left( \mathbf{x} \times \frac{\mathbf{j}}{\mu} \right) dV_{\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{Produkt.}}{=} \underbrace{\int \mathbf{j} \times \frac{\mathbf{j}}{\mu} dV_{\mathbf{x}}}_{=0} - \int \frac{\mathbf{x}}{\mu} \times (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{j} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int \mathbf{x} \times \underbrace{\left( \mathbf{j} (\mathbf{j} \cdot \nabla) \frac{1}{\mu} \right)}_{= -\frac{\mathbf{j}(\mathbf{j} \cdot \nabla) \mu}{\mu^2}} dV_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 7: Wir benutzen die Bezeichnungen entsprechend folgender Skizze:



Außerdem bezeichne  $\omega(t)$  die positive Winkelgeschwindigkeit des herabrollenden Zylinders. Damit gilt

$$s(t) = s(0) - \int_0^t R\omega(t') dt' \quad (\text{D.7})$$

sowie

$$h(t) = s(t) \cos \alpha. \quad (\text{D.8})$$

Der Energiesatz lautet

$$E(t) = \underbrace{\frac{m}{2} \left( \dot{h}(t) \right)^2}_{=E_{\text{kin}}^{\text{trans}}(t)} + \underbrace{\frac{\theta}{2} \omega^2(t)}_{=E_{\text{rot}}^{\text{trans}}(t)} + \underbrace{m |\mathbf{g}| h(t)}_{=E_{\text{pot}}(t)} = \text{const.}, \quad (\text{D.9})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=E_{\text{kin}}(t)}$$

wobei

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^R r^2 \underbrace{\frac{m}{\pi R^2} 2\pi r}_{=dm} dr \\ &= \frac{m}{2} R^2 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

das Trägheitsmoment des Zylinders (bzgl. seiner Symmetrieachse) ist. Da sich der Zylinderschwerpunkt nur parallel zur Unterlage bewegen kann, gilt

$$(\mathbf{F}_Z + m \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Die Bewegungsgleichung für den Eigendrehimpuls ist

$$\underbrace{\theta \dot{\omega}(t)}_{=\dot{L}_{\text{eigen}}(t)} = \left| \underbrace{-R \mathbf{n} \times \mathbf{F}_Z}_{=\text{Drehm. bzgl. d. Zylinderschwerp.}} \right|. \quad (\text{D.12})$$

Aus (D.9) folgt

$$0 = \dot{E}(t) = m \dot{h}(t) \ddot{h}(t) + \theta \omega(t) \dot{\omega}(t) + m |\mathbf{g}| \dot{h}(t)$$

und daraus mit

$$\dot{h}(t) \stackrel{(\text{D.8})}{=} \dot{s}(t) \cos \alpha \stackrel{(\text{D.7})}{=} -R\omega(t) \cos \alpha$$

weiter

$$\begin{aligned} 0 &= m \left( -R\omega(t) \cos \alpha \right) \left( -R\dot{\omega}(t) \cos \alpha \right) + \theta \omega(t) \dot{\omega}(t) + m |\mathbf{g}| \left( -R\omega(t) \cos \alpha \right) \\ &= \omega(t) \left( \dot{\omega}(t) \left( m (R \cos \alpha)^2 + \theta \right) - m |\mathbf{g}| R \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\dot{\omega}(t) = \frac{m |\mathbf{g}| R \cos \alpha}{m (R \cos \alpha)^2 + \theta}$$

und somit

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{F}_Z| \stackrel{\text{(D.12)}}{=} \frac{m |\mathbf{g}| \cos \alpha}{1 + m (\cos \alpha)^2 / \theta} \stackrel{\text{(D.10)}}{=} \frac{m |\mathbf{g}| \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Da  $\mathbf{F}_Z$  eine Linearkombination von  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{n}$  sein muß, folgt daraus mit (D.11):

$$\mathbf{F}_Z = -\frac{m |\mathbf{g}| \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha} \mathbf{n}_\perp - m (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

wobei

$$\mathbf{n}_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}{|\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}|}.$$

**Zu Aufgabe 8:** Zunächst wollen wir zeigen, daß zu beliebig vorgegebenen  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$  und zu jedem  $t' \in (t_1, t_2]$  stets eine mit der kinematischen Nebenbedingung verträgliche Bewegung existiert, für die

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}(t') = \mathbf{b}$$

gilt. Dazu wählen wir eine Bewegung

$$\check{\mathcal{B}} = \left( (x^1(t), x^2(t)), t_1, t' \right)$$

in der  $(x^1, x^2)$ -Ebene, die den Bedingungen

$$\begin{pmatrix} x^1(t_1) \\ x^2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [t'/2, t'],$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in (t_1, t'/2),$$

und

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{pmatrix} / \left| \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a^3}{\text{Einh. v. } a^3}\right) \\ \sin\left(\frac{a^3}{\text{Einh. v. } a^3}\right) \end{pmatrix}$$

genügt. Die kinematische Nebenbedingung

$$\dot{x}^2(t) \cos\left(\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}\right) - \dot{x}^1(t) \sin\left(\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

legt dann — zusammen mit der Anfangsbedingung  $x^3(t_1) = a^3$  —  $x^3(t)$  für  $t \in [t_1, t'/2]$  eindeutig fest. Für  $t \in [t'/2, t']$  ist die kinematische Nebenbedingung dagegen trivial. Wir erhalten also für beliebigen Verlauf von  $x^3(t)$  über  $[t'/2, t']$  eine mit der kinematischen Nebenbedingung verträgliche Bewegung. Deshalb können wir den Verlauf so wählen, daß  $x^3(t') = b^3$  und damit  $\mathbf{x}(t') = \mathbf{b}$  gilt.

Von jeder Anfangsposition  $\mathbf{x}(t_1)$  aus läßt sich also für beliebig vorgegebenes  $t' \in (t_1, t_2]$  jede Position  $\mathbf{x}(t')$  durch eine mit der kinematischen Nebenbedingung verträgliche Bewegung erreichen. Mit anderen Worten: Für  $t' \in (t_1, t_2]$  sind alle Positionen  $\mathbf{x}(t') \in \mathbb{R}^3$  erlaubt. Daraus folgt für alle Nebenbedingungen der Form

$$S_j(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], j \in \{1, \dots, l\}$$

notwendig

$$S_j(\cdot, t) = 0 \quad \forall t \in [t', t_2], j \in \{1, \dots, l\} .$$

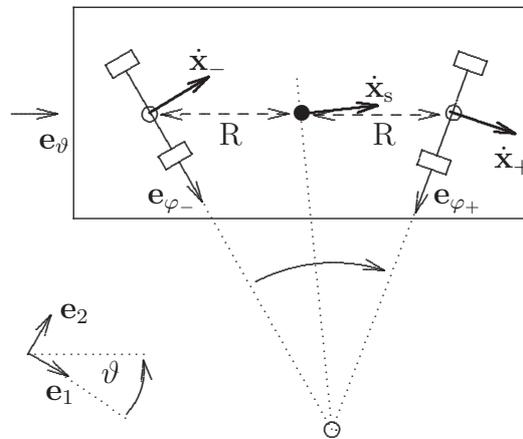
Das System könnte also nur dann holonom sein, wenn es — im Widerspruch zur geforderten kinematischen Nebenbedingung — für  $t \in [t', t_2]$  völlig uneingeschränkt wäre.

Wenn man jedoch zusätzlich die Nebenbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x^1(t) = x^2(t), \\ \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v.}} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{D.13})$$

fordert, dann erhält man ein holonomes System, weil mit (D.13) auch automatisch die kinematische Nebenbedingung erfüllt (also redundant) ist.

**Zu Aufgabe 9:** Der Bewegungszustand des Snakeboards läßt sich wie folgt skizzieren:



Dementsprechend sind die kinematischen Nebenbedingungen durch

$$\dot{\mathbf{x}}_{\pm} \cdot \mathbf{e}_{\varphi_{\pm}} = 0 \quad (\text{D.14})$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{x}_{\pm} = \mathbf{x}_s \pm R \mathbf{e}_{\vartheta} . \quad (\text{D.15})$$

Mit

$$\mathbf{e}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

folgt aus (D.15)

$$\dot{\mathbf{x}}_{\pm} = \begin{pmatrix} \dot{x}_s^1 \\ \dot{x}_s^2 \end{pmatrix} \pm R \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ +\cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

und daraus entsprechend mit (D.14):

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}_s^1 \cos \varphi_{\pm} + \dot{x}_s^2 \sin \varphi_{\pm} \pm R \dot{\vartheta} (\sin \varphi_{\pm} \cos \vartheta - \cos \varphi_{\pm} \sin \vartheta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{\pm} \\ \sin \varphi_{\pm} \\ \pm R (\sin \varphi_{\pm} \cos \vartheta - \cos \varphi_{\pm} \sin \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_s^1 \\ \dot{x}_s^2 \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi}_+ \\ \dot{\varphi}_- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \alpha_+(\boldsymbol{\xi}) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \xi^4 \\ \sin \xi^4 \\ +R (\sin \xi^4 \cos \xi^3 - \cos \xi^4 \sin \xi^3) \\ 0 \\ 0 \\ \cos \xi^5 \\ \sin \xi^5 \\ +R (\sin \xi^5 \cos \xi^3 - \cos \xi^5 \sin \xi^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_-(\boldsymbol{\xi}) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \xi^4 \\ \sin \xi^4 \\ +R (\sin \xi^4 \cos \xi^3 - \cos \xi^4 \sin \xi^3) \\ 0 \\ 0 \\ \cos \xi^5 \\ \sin \xi^5 \\ +R (\sin \xi^5 \cos \xi^3 - \cos \xi^5 \sin \xi^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lassen sich diese Nebenbedingungen also tatsächlich in der Form

$$\sum_{k=1}^5 \alpha_{\pm}^k(\boldsymbol{\xi}) \dot{\xi}^k = 0$$

schreiben.

Um zu zeigen, daß die kinematischen Nebenbedingungen nicht holonom sind, müssen wir entsprechend der Argumentation zu Aufgabe 8 nur zeigen, daß zu jedem  $t' \in (t_1, t_2]$  und zu je zwei Positionen  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^5$  eine mit den diesen Nebenbedingungen verträgliche Bewegung existiert, die während des Zeitintervalls  $[t_1, t']$  die Position  $\boldsymbol{\xi}_1$  in die Position  $\boldsymbol{\zeta}$  überführt. Eine Möglichkeit dafür ist die folgende:

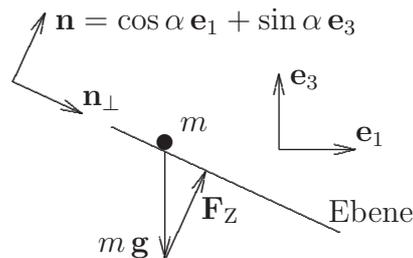
1. Zunächst führt man nur die  $\varphi_{\pm}$  in  $\xi^3$  über.
2. Dann führt man nur die  $\varphi_{\pm}$  und  $\vartheta$  gemeinsam in den Polarwinkel von  $\mathbf{x}_s(t') - \mathbf{x}_s(t_1)$  über.
3. Danach führt man nur  $\varphi_{\pm}$  in  $\vartheta + \pi/2$  über.
4. Danach führt man nur  $(x_s^1, x_s^2)$  auf geradem Wege in  $(\zeta^1, \zeta^2)$  über.

5. Danach führt man nur  $\varphi_{\pm}$  in  $\vartheta$  über (bei festem  $\vartheta$ ).
6. Dann führt man nur  $\varphi_{\pm}$  und  $\vartheta$  auf gemeinsam in  $\zeta^3$  über.
7. Abschließend führt man nur  $\varphi_+$  und  $\varphi_-$  in  $\zeta^4$  resp.  $\zeta^5$  über.

**Zu Aufgabe 10:** Die Zwangskraft, die die schiefe Ebene auf  $m$  ausübt, ist

$$\mathbf{F}_Z = m g \sin \alpha \mathbf{n}, \quad (\text{D.16})$$

wie man folgender Skizze leicht entnimmt:



**Anmerkung:** In diesem Zusammenhang sei auch an Abschnitt 1.3.1 von (Lücke, ein) erinnert.

Die auf  $m$  wirkende Gesamtkraft ist dementsprechend

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_Z \stackrel{(\text{D.16})}{=} m g \cos \alpha \mathbf{n}_{\perp},$$

wobei

$$\mathbf{n}_{\perp} = \sin \alpha \mathbf{e}_1 - \cos \alpha \mathbf{e}_3. \quad (\text{D.17})$$

Die Geschwindigkeit von  $m$  ist somit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \ddot{\mathbf{x}}(t') dt' \\ &= \mathbf{v} + \frac{1}{m} \int_0^t \mathbf{F}(t') dt' \\ &= \mathbf{v} + t g \cos \alpha \mathbf{n}_{\perp}. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Die Arbeit, die die Schwerkraft während des Zeitintervalls  $[0, t]$  an  $m$  verrichtet ist damit

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{W_g(t)}} &= \int_0^t (-m g \mathbf{e}_3) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t') dt' \\
 &\stackrel{\text{(D.18)}}{=} -m g^2 \cos \alpha (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_\perp) \frac{t^2}{2} \\
 &\stackrel{\text{(D.17)}}{=} \underline{\underline{+\frac{m}{2} (t g \cos \alpha)^2}}. \tag{D.19}
 \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung 3.69 von (Lücke, ein) folgt daraus

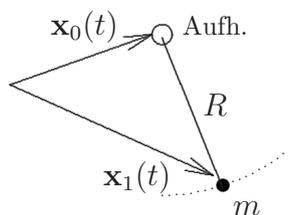
$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{W_Z(t)}} &= \left( E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{kin}}(0) \right) - W_g(t) \\
 &\stackrel{\text{(D.18),(D.19)}}{=} t m g \cos \alpha \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{v} \\
 &= \underline{\underline{(m g \sin \alpha \cos \alpha) v t}}.
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 11:** Die Nebenbedingungen für das Pendel mit vorgegebener Ortsvektorfunktion  $\mathbf{x}_0(t)$  der Aufhängung sind äquivalent zu

$$S_1(\mathbf{x}_1(t), t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$S_1(\mathbf{x}_1, t) \stackrel{\text{def}}{=} R^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|^2 \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$$



(vgl. Beispiel (i) von Abschnitt 1.1.1.1 der Vorlesung). Die gemäß Gleichungen (1.3) und (1.4) der Vorlesung zugeordneten kinematischen Nebenbedingungen sind

$$\begin{aligned} & \underbrace{2\dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t))}_{=S_{1,0}(\mathbf{x}_1(t),t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_1(t) \cdot (-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)))}_{=S_{1,1}(\mathbf{x}_1(t),t)} \\ & = -2(\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t)) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)) = 0 \end{aligned}$$

und stellen offensichtlich eine vollständige Momentancharakterisierung der erlaubten  $\dot{\mathbf{x}}_1(t)$  dar. Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen  $\delta\mathbf{x}_1(t)$  erlaubter  $\mathbf{x}_1(t)$  sind deshalb durch Gleichung (1.10) der Vorlesung vollständig charakterisiert:

$$\delta\mathbf{x}_1(t) \cdot \underbrace{(-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)))}_{=S_{1,1}(\mathbf{x}_1(t),t)} = 0. \quad (\text{D.20})$$

Aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip und den NEWTONSchen Gleichungen folgt Gleichung (1.13) der Vorlesung, im vorliegenden Falle also

$$(\text{D.20}) \implies \delta\mathbf{x}_1(t) \cdot \mathbf{F}_1^Z(t) = 0.$$

Die Zwangskraft steht somit senkrecht zu allen Vektoren, die senkrecht zur momentanen Ausrichtung der Pendelstange stehen. Daraus folgt:

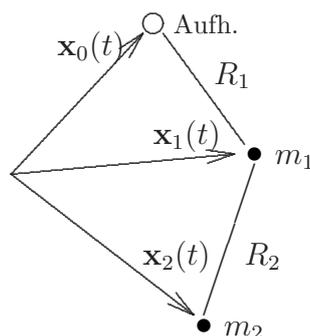
$$\mathbf{F}_1^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t).$$

**Zu Aufgabe 12:** Die Nebenbedingungen sind hier äquivalent zu

$$S_j(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}, t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} S_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (R_1)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0(t)|^2, \\ S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (R_2)^2 - |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$$



(vgl. Beispiel (ii) von Abschnitt 1.1.1.1 der Vorlesung). Die gemäß Gleichungen (1.3) und (1.4) der Vorlesung zugeordneten kinematischen Nebenbedingungen sind

$$\underbrace{2 \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t))}_{=S_{1,0}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_1(t) \cdot (-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)))}_{=S_{1,1}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_2(t) \cdot 0}_{=S_{1,2}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)}$$

$$= -2(\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t)) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)) = 0$$

und

$$\underbrace{0}_{=S_{2,0}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_1(t) \cdot (-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)))}_{=S_{2,1}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_2(t) \cdot (-2(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)))}_{=S_{2,2}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)}$$

$$= -2(\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t)) \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) = 0$$

und stellen offensichtlich eine vollständige Momentancharakterisierung der erlaubten  $\dot{\mathbf{x}}_1(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2(t)$  dar. Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen sind deshalb durch Gleichung (1.10) der Vorlesung vollständig charakterisiert:

$$\delta \mathbf{x}_1(t) \cdot \underbrace{(-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)))}_{=S_{1,1}(\mathbf{x}_1(t), t)} = 0,$$

$$\delta \mathbf{x}_1(t) \cdot \underbrace{(-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)))}_{=S_{2,1}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} - \delta \mathbf{x}_2(t) \cdot \underbrace{(-2(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)))}_{=S_{2,2}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t)} = 0. \quad (\text{D.21})$$

Aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip und den NEWTONSchen Gleichungen folgt Gleichung (1.13) der Vorlesung, im vorliegenden Falle also

$$(\text{D.21}) \implies \delta \mathbf{x}_1(t) \cdot \mathbf{F}_1^Z(t) + \delta \mathbf{x}_2(t) \cdot \mathbf{F}_2^Z(t) = 0.$$

Das ist aber äquivalent zu

$$\begin{cases} \left( \delta \mathbf{x}_1(t) - \delta \mathbf{x}_2(t) \right) \cdot \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right) = 0, \\ \delta \mathbf{x}_1(t) \cdot \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t) \right) = 0 \end{cases} \\ \implies \delta \mathbf{x}_1(t) \cdot \left( \mathbf{F}_1^Z(t) + \mathbf{F}_2^Z(t) \right) + \left( \delta \mathbf{x}_1(t) - \delta \mathbf{x}_2(t) \right) \cdot \mathbf{F}_2^Z(t) = 0,$$

woraus

$$\mathbf{F}_2^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t), \quad \mathbf{F}_1^Z(t) + \mathbf{F}_2^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)$$

folgt. Das entspricht folgender Anschauung:

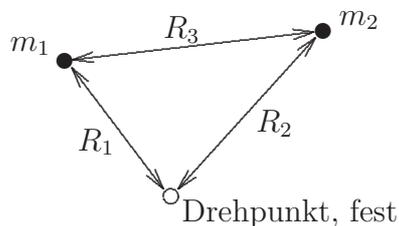
Da die Pendelstange 2 um  $m_1$  frei drehbar ist, kann sie keine Zwangskraft auf  $m_2$  senkrecht zu ihrer Ausrichtung ausüben. Das erklärt  $\mathbf{F}_2^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ . Die gesamte Zwangskraft  $\mathbf{F}_1^Z(t)$  auf  $m_1$  ist aber die Vektorsumme der beiden Zwangskräfte  $\mathbf{F}_{1,1}^Z(t)$  und  $\mathbf{F}_{1,2}^Z(t)$ , die die Pendelstangen 1 und 2 auf  $m_1$  ausüben. Dafür gilt

$$\mathbf{F}_{1,2}^Z(t) = -\mathbf{F}_2^Z(t), \quad \mathbf{F}_{1,1}^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)$$

und somit

$$\mathbf{F}_1^Z(t) + \mathbf{F}_2^Z(t) = \left( \mathbf{F}_{1,1}^Z(t) + \mathbf{F}_{1,2}^Z(t) \right) + \mathbf{F}_2^Z(t) = \mathbf{F}_{1,1}^Z(t) \sim \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t).$$

**Zu Aufgabe 13:** Betrachtet sei folgendes System:



Wenn wir den Drehpunkt als Bezugspunkt für die Ortsvektoren wählen, dann sind die Nebenbedingungen hier äquivalent zu

$$S_j(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), t) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}, t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (R_1)^2 - |\mathbf{x}_1|^2, \\ S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (R_2)^2 - |\mathbf{x}_2|^2, \\ S_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) &\stackrel{\text{def}}{=} (R_3)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2. \end{aligned}$$

Für

$$R_1 + R_2 \neq R_3 \neq |R_1 - R_2| \tag{D.22}$$

charakterisieren die entsprechenden kinematischen Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) \cdot \mathbf{x}_1(t) = 0, \quad (\text{D.23})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) \cdot \mathbf{x}_2(t) = 0, \quad (\text{D.24})$$

$$\left( \dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) \right) \cdot \left( \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right) = 0 \quad (\text{D.25})$$

für jeden Einzelzeitpunkt  $t$  die zu erlaubten  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_2(t)$  möglichen  $\dot{\mathbf{x}}_1(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2(t)$  vollständig.

**Begründung:** Gemäß (D.23)/(D.24) existieren vektorielle Kreisfrequenzen  $\boldsymbol{\omega}_1$ ,  $\boldsymbol{\omega}_2$  mit

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}_1, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x}_2. \quad (\text{D.26})$$

Mit (D.25) folgt daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}_1) - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x}_2) \right) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= -(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 + (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_1 \\ &= -(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung (D.22) gilt für erlaubte Momentanpositionen also

$$\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

mit geeigneten  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Für

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

folgt dann mit (D.23)/(D.24)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_1, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_2.$$

Die Nebenbedingung (D.23)–(D.24) entsprechen dann also einer Drehbewegung der starren Hebelanordnung um den vorgegebenen Drehpunkt.

Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen sind dementsprechend durch

$$0 = \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = (\delta \mathbf{x}_1 - \delta \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (\text{D.27})$$

charakterisiert und das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet

$$(\text{D.27}) \implies \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{F}_1^Z + \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{F}_2^Z = 0. \quad (\text{D.28})$$

Für

$$\delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{x}_1, \quad \delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{x}_2$$

ist (D.27) offensichtlich erfüllt. Damit folgt aus (D.28)

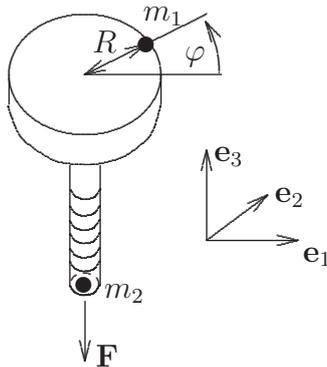
$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{F}_1^Z + (\mathbf{a} \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{F}_2^Z \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{F}_1^Z + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{F}_2^Z) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

und somit das Hebelgesetz in der Form

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{F}_1^Z + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{F}_2^Z = 0,$$

falls (D.22) gilt.<sup>2</sup>

**Zu Aufgabe 14:** Wir betrachten zwei gemäß folgender Skizze an der Schraube befestigte Massenpunkte  $m_1$ ,  $m_2$  vernachlässigbarer Masse:



Das gesuchte Drehmoment  $\mathbf{M}$  stellen wir uns o.B.d.A. durch eine eingeprägte Kraft

$$\mathbf{F}_1^e \perp \mathbf{e}_3 \quad (\text{D.29})$$

erzeugt, die auf  $m_1$  wirkt. Gemäß Prinzip der virtuellen Verrückungen gilt dann

$$\delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{F}_1^e + \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{F}_2^e = 0, \quad (\text{D.30})$$

wobei

$$\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F} \sim \mathbf{e}_3 \quad (\text{D.31})$$

die eingeprägte Kraft ist, die das Gegenstück auf  $m_2$  ausübt. Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen sind dabei (für Rechtsgewinde) durch

$$\delta \mathbf{x}_2 = \frac{\Delta s}{2\pi} \delta \varphi \mathbf{e}_3, \quad \delta \mathbf{x}_1 = \delta \mathbf{x}_2 - R \delta \varphi \mathbf{e}_\varphi^\perp$$

charakterisiert, wobei

$$\mathbf{e}_\varphi^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2.$$

Deshalb ist (D.30) äquivalent zu

$$\left( \left( \frac{\Delta s}{2\pi} \mathbf{e}_3 - R \mathbf{e}_\varphi^\perp \right) \cdot \mathbf{F}_1^e + \frac{\Delta s}{2\pi} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}_2^e \right) \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi,$$

Version vom 26. März 2009

<sup>2</sup>Für  $R_3 = R_1 + R_2$  und  $R_3 = |R_1 - R_2|$  folgt das Hebelgesetz dann natürlich durch Grenzbe-  
trachtung.

also zu

$$\frac{\Delta s}{2\pi} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}_2^e = - \left( \frac{\Delta s}{2\pi} \mathbf{e}_3 - R \mathbf{e}_\varphi^\perp \right) \cdot \mathbf{F}_1^e.$$

Mit (D.29), (D.31) und

$$\mathbf{M} = -R (\mathbf{e}_\varphi^\perp \cdot \mathbf{F}_1^e) \mathbf{e}_3$$

folgt daraus

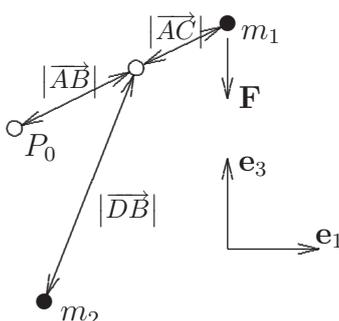
$$\underline{\underline{\mathbf{M} = \frac{\Delta s}{2\pi} \mathbf{F} .}}$$

Vereinfachte Betrachtungsweise: Während einer langsamen Umdrehung leistet das konstante Drehmoment die Arbeit  $2\pi |\mathbf{M}|$ . Da die Zwangskräfte keine Arbeit leisten, muß das mit der Arbeit  $|\mathbf{F}| \Delta s$  übereinstimmen, die  $m_1$  am Gegenstück verrichtet.

**Zu Aufgabe 15:** Wir denken uns den Balken bei  $D$  entfernt, aber  $D$  fest mit dem Stützbalken verbunden. Weiterhin denken wir uns  $C$  resp.  $D$  entsprechend folgender Skizze als Massenpunkte  $m_1, m_2$  (vernachlässigbarer Masse), auf die die eingepprägten Kräfte

$$\mathbf{F}_1^Z = \mathbf{F} = -F \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{F}_2^Z \perp \mathbf{e}_2 \quad (\text{D.32})$$

so wirken daß Gleichgewicht herrscht.



Bei entsprechender Positionierung von  $C$  und  $D$  ist dann  $\mathbf{F}_2^Z$  mit der gesuchten Kraft zu identifizieren. Die infinitesimalen virtuellen Verrückungen sind hier durch

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 &= 0, \\ (\delta \mathbf{x}_2 - \lambda \delta \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_2 - \lambda \mathbf{x}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

charakterisiert, wobei

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left| \overrightarrow{AB} \right| / \left| \overrightarrow{AC} \right|. \quad (\text{D.34})$$

Gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeit ist Gleichgewicht also nur möglich, wenn

$$(\text{D.33}) \implies \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{F}_1^Z + \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{F}_2^Z = 0 \quad (\text{D.35})$$

gilt. (D.33) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_1 &\perp \overrightarrow{AC}, \mathbf{e}_2, \\ \delta \mathbf{x}_2 - \lambda \delta \mathbf{x}_1 &\perp \overrightarrow{DB}, \mathbf{e}_2,\end{aligned}$$

für die zu untersuchende Positionierung also zu

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_1 &\sim \mathbf{n}_\gamma^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \cos \gamma \mathbf{e}_1 - \sin \gamma \mathbf{e}_3, \\ \delta \mathbf{x}_2 - \lambda \delta \mathbf{x}_1 &\sim \mathbf{n}_\vartheta^\perp.\end{aligned}\tag{D.36}$$

(D.36) ist z.B. für

$$\delta \mathbf{x}_1 = 0, \quad \delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{n}_\vartheta^\perp$$

erfüllt. Dafür liefert (D.35) mit (D.32)

$$\mathbf{F}_2^Z \sim \mathbf{n}_\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \quad (\text{Richtung von } D \text{ nach } B),$$

also

$$\mathbf{F}_2^Z = F_2^Z \mathbf{n}_\vartheta$$

für geeignetes  $F_2^Z$ . Damit ergibt sich aus (D.35)

$$\begin{aligned}\text{(D.36)} \quad \implies \delta \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{F}_1^Z + \lambda F_2^Z \mathbf{n}_\vartheta) & \\ = \delta \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{F}_1^Z + \lambda \mathbf{F}_2^Z) + (\delta \mathbf{x}_1 - \lambda \delta \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{F}_2^Z & \\ = \delta \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{F}_1^Z + \delta \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{F}_2^Z & \\ = 0 &\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{n}_\gamma^\perp \cdot (\mathbf{F}_1^Z + \lambda F_2^Z \mathbf{e}_\vartheta) = 0,$$

d.h.

$$\mathbf{F}_2^Z = -\frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{n}_\gamma^\perp \cdot \mathbf{F}_1^Z}{\mathbf{n}_\gamma^\perp \cdot \mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta.$$

Mit (D.32) und (D.34) folgt daraus

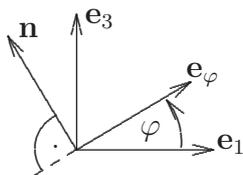
$$\mathbf{F}_2^Z = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \vartheta)} F \mathbf{n}_\vartheta$$

— im Einklang mit dem Ergebnis von Aufgabe 11 der *Math. Meth. d. Phys.* .

**Zu Aufgabe 16:** Wir wählen als generalisierte Koordinaten

$$q^2 \stackrel{\text{def}}{=} x^2 \quad \text{und} \quad q^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{x}$$

entsprechend folgender Skizze:



Damit gilt

$$\mathbf{x}(q^1, q^2, t) = \begin{pmatrix} q^1 \cos \varphi(t) \\ q^2 \\ q^1 \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

und somit

$$U(q^1, q^2, t) = m g x^3(q^1, q^2, t) = m g q^1 \sin \varphi(t)$$

sowie

$$\begin{aligned} T(q^1, q^2, t) &= \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(q^1, q^2, t)|^2 \\ &= \frac{m}{2} \left( (\dot{q}^1 \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}(t) q^1 \sin \varphi(t))^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^1 \sin \varphi(t) + \dot{\varphi}(t) q^1 \cos \varphi(t))^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left( (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{\varphi}(t) q^1)^2 \right). \end{aligned}$$

Die LAGRANGE-Funktion  $J = T - U$  ist hier also

$$L(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2, t) = \frac{m}{2} \left( (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{\varphi}(t) q^1)^2 \right) - m g q^1 \sin \varphi(t). \quad (\text{D.37})$$

Gemäß Gleichung (1.59) sind die LAGRANGE-Gleichungen II. Art dazu:

$$\begin{aligned} m \ddot{q}^1(t) - m \dot{\varphi}(t)^2 q^1(t) + m g \sin \varphi(t) &= 0, \\ m \ddot{q}^2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Für  $\ddot{q}^2 = 0$  ist  $m \dot{\varphi}(t)^2 q^1(t)$  natürlich nichts anderes als die Zentripetalkraft.

**Zu Aufgabe 17a:** In den generalisierten Koordinaten  $(q^1, q^2, q^3) = (r, \vartheta, \varphi)$  (Kugelkoordinaten, siehe Abschnitt 4.3.2 der *Math. Meth. d. Phys.*) gilt

$$\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi, t) = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}(r, \vartheta, \varphi, t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

(vgl. 1.2.1.2). Daraus folgt

$$L(r, \vartheta, \varphi, t) = \underbrace{\frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)}_{=T(r, \vartheta, \varphi, t)} - \underbrace{m r g \cos \vartheta}_{U(r, \vartheta, \varphi, t)}.$$

Die Nebenbedingungen sind

$$r(t_1) = R, \quad \dot{r}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\text{D.38})$$

entsprechen also dem Fall

$$l_q = 1; \quad a_{1,\mu} = \delta_{1\mu}. \quad (\text{D.39})$$

Damit ergibt sich für die Gleichungen (1.56) der Vorlesung:

$$\begin{aligned} m \ddot{r} - m r \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + m g \cos \vartheta &= \lambda, \\ m \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\vartheta} \right) - m r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - m r g \sin \vartheta &= 0, \\ m \frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen (D.38) sind diese Gleichungen äquivalent zu

$$- m R \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + m g \cos \vartheta = \lambda, \quad (\text{D.40})$$

$$m R^2 \ddot{\vartheta} - m R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - m R g \sin \vartheta = 0, \quad (\text{D.41})$$

$$m R^2 \frac{d}{dt} \left( \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \right) = 0. \quad (\text{D.42})$$

Die eigentlichen Bewegungsgleichungen sind (D.41) und (D.42). Aus (D.40) läßt sich die Zwangskraft

$$Q_1^Z \stackrel{(1.44)}{=} \mathbf{F}^Z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{x} = \mathbf{F}^Z \cdot \mathbf{e}_r$$

entnehmen; denn

$$Q_1^Z \stackrel{(1.53), (D.39)}{=} \lambda.$$

**Zu Aufgabe 17b:** Wenn wir nur die generalisierten Koordinaten  $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$  verwenden, sind keinerlei Nebenbedingungen mehr zu beachten. Aus

$$\mathbf{x}(\vartheta, \varphi, t) = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}(\vartheta, \varphi, t) = R \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + R \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

folgt dann

$$L(\vartheta, \varphi, t) = \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - m R g \cos \vartheta.$$

Die Gleichungen (1.59) dafür sind (D.41) und (D.42).

Da  $\varphi$  eine zyklische Koordinate ist ( $\frac{\partial}{\partial \varphi} L = 0$ ), gilt gemäß (1.61) der Erhaltungssatz

$$\dot{p}_2 = 0$$

für die 3-Komponente

$$p_2 \stackrel{(1.60)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = m R^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$$

des Drehimpulses (vgl. Satz 1.2.2) — im Einklang mit (D.42).

Da  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt ( $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$ ), gilt entsprechend (1.62) der Energiesatz

$$\dot{H} = 0$$

für

$$\begin{aligned} H(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &= \underbrace{\dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} L + \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - L}_{=2T} \\ &= T + U. \end{aligned}$$

Die Komponenten des Impulses sowie die 2- und 3-Komponente des Drehimpulses sind hier i.a. **nicht** erhalten.

**Zu Aufgabe 18:** Mit den in 1.1.3.2 verwendeten Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1(\vartheta, \varphi, t) = \mathbf{x}_0(t) + R_1 \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_2(\vartheta, \varphi, t) = \mathbf{x}_0(t) - R_2 \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{e}_r(\vartheta', \varphi') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix} \quad \forall \vartheta', \varphi' \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.43})$$

Die kinetische Energie ist dementsprechend

$$\begin{aligned} T(\vartheta, \varphi, t) &= \frac{m_1 + m_2}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 + \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{2} |\dot{\mathbf{e}}_r(\vartheta, \varphi)|^2 \\ &\quad + (m_1 R_1 - m_2 R_2) \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_r(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Mit

$$\dot{\mathbf{e}}_r(\vartheta', \varphi') = \dot{\vartheta}' \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta', \varphi') + \dot{\varphi}' \sin \vartheta' \mathbf{e}_\varphi(\vartheta', \varphi'), \quad (\text{D.44})$$

wobei

$$\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta', \varphi') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \vartheta' \cos \varphi' \\ \cos \vartheta' \sin \varphi' \\ -\sin \vartheta' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi(\vartheta', \varphi') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.45})$$

(vgl. 1.1.3.2) folgt daraus<sup>3</sup>

$$T(\vartheta, \varphi, t) = \frac{m_1 + m_2}{2} |\dot{\mathbf{x}}_0(t)|^2 + \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + (m_1 R_1 - m_2 R_2) \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \left( \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (\text{D.46})$$

und — dank  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi = 0$  — somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} T - \frac{\partial}{\partial \vartheta} T &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \left( \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \\ &+ (m_1 R_1 - m_2 R_2) (\ddot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_\vartheta) \\ &- (m_1 R_1 - m_2 R_2) \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \left( \dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right). \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

Mit

$$\dot{\mathbf{e}}_\vartheta = \dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta \stackrel{(\text{D.45})}{=} \dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi$$

folgt aus letzterem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} T - \frac{\partial}{\partial \vartheta} T &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \left( \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \\ &+ (m_1 R_1 - m_2 R_2) \ddot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Das zusammen mit

$$Q_\vartheta^e \stackrel{(\text{1.44})}{=} \mathbf{F}_1^e \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_2^e \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{x}_2 = (R_1 \mathbf{F}_1^e \cdot \mathbf{e}_\vartheta - R_2 \mathbf{F}_2^e \cdot \mathbf{e}_\vartheta)$$

zeigt, daß hier die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} T - \frac{\partial}{\partial \vartheta} T = Q_\vartheta^e$$

mit der ersten der Gleichungen (1.24) übereinstimmt. Entsprechend folgt aus (D.46)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} T - \frac{\partial}{\partial \varphi} T &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \left( \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \\ &+ (m_1 R_1 - m_2 R_2) \left( \sin \vartheta \ddot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \mathbf{e}_\varphi + \sin \vartheta \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \mathbf{e}_\varphi \right) \\ &- (m_1 R_1 - m_2 R_2) \left( \dot{\vartheta} \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \dot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \end{aligned}$$

und

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{D.48})$$

<sup>3</sup>Es sei daran erinnert, daß  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$  eine (von  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängige) Orthonormalbasis ist.

die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} T - \frac{\partial}{\partial \varphi} T \\ &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \left( \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \right) + (m_1 R_1 - m_2 R_2) \sin \vartheta \ddot{\mathbf{x}}_0(t) \cdot \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

und daraus mit

$$Q_\varphi^e \stackrel{(1.44)}{=} \mathbf{F}_1^e \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_2^e \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}_2 = \sin \vartheta (R_1 \mathbf{F}_1^e \cdot \mathbf{e}_\varphi - R_2 \mathbf{F}_2^e \cdot \mathbf{e}_\varphi)$$

die Übereinstimmung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} T - \frac{\partial}{\partial \varphi} T = Q_\varphi^e$$

mit der zweiten der Gleichungen (1.24), multipliziert mit  $\sin \vartheta$ .

**Zu Aufgabe 19:** Hier sind offensichtlich die Voraussetzungen von Satz 1.2.3 und von Satz 1.2.2 für  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$  erfüllt. Deshalb sind hier  $T + U$  und  $\mathbf{L}_{\text{ges}} \cdot \mathbf{e}_3$  für alle Lösungen der LAGRANGE-Gleichungen Erhaltungsgrößen.

Wir beschreiben nun das System mithilfe der generalisierten Koordinaten

$$(q^1, \dots, q^4) = (\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$$

gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1(\vartheta_1, \varphi_1) &= R_1 \mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) &= \mathbf{x}_1(\vartheta_1, \varphi_1) + R_2 \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2). \end{aligned}$$

Mit (D.44) ergibt sich dann für die LAGRANGE-Funktion

$$\begin{aligned} & L(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\varphi}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\varphi}_2) \\ &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} R_1^2 \left( \dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \vartheta_1 \right) + \frac{m_2}{2} R_2^2 \left( \dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \vartheta_2 \right) \\ & \quad + m_2 R_1 R_2 \left( \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta_2, \varphi_2) \right. \\ & \quad \quad + \dot{\vartheta}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \vartheta_2 \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\vartheta_2, \varphi_2) \\ & \quad \quad + \dot{\vartheta}_2 \dot{\varphi}_1 \sin \vartheta_1 \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta_2, \varphi_2) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\vartheta_1, \varphi_1) \\ & \quad \quad \left. + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \mathbf{e}_\varphi(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\vartheta_2, \varphi_2) \right) \\ & \quad \underbrace{+ m_1 g R_1 \cos \vartheta_1 + m_2 g (R_1 \cos \vartheta_1 + R_2 \cos \vartheta_2)}_{= -\text{potentielle Energie}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{=}{(D.45)} \frac{(m_1 + m_2)}{2} R_1^2 \left( \dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \vartheta_1 \right) + \frac{m_2}{2} R_2^2 \left( \dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \vartheta_2 \right) . \\
& + m_2 R_1 R_2 \left( \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \left( \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \right) \right. \\
& \quad + \dot{\vartheta}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\
& \quad + \dot{\vartheta}_2 \dot{\varphi}_1 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\
& \quad \left. + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \\
& + m_1 g R_1 \cos \vartheta_1 + m_2 g (R_1 \cos \vartheta_1 + R_2 \cos \vartheta_2) .
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

reduzieren sich die zugehörigen LAGRANGE-Gleichungen auf

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2) R_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 R_1 R_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (m_1 + m_2) g R_1 \sin \vartheta_1 \\
- m_2 R_1 R_2 \left( \dot{\vartheta}_2 \right)^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
m_2 R_2^2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 R_1 R_2 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + m_2 g R_2 \sin \vartheta_2 \\
+ m_2 R_1 R_2 \left( \dot{\vartheta}_1 \right)^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 .
\end{aligned}$$

Bzgl. der zugehörigen Näherungslösungen für kleine Ausschläge<sup>4</sup> siehe z.B. (Budó, 1965, § 41 Nr. 2).

**Zu Aufgabe 20:** Die Matrix der

$$\alpha_{\nu, \mu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\gamma \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\gamma \right) \quad \forall \nu, \mu = 1, \dots, n \quad (D.49)$$

ist offensichtlich symmetrisch:

$$\alpha_{\nu, \mu} = \alpha_{\mu, \nu} \quad \forall \nu, \mu \in \{1, \dots, n\} .$$

Deshalb existiert eine Orthonormalbasis  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$  des  $\mathbb{R}^n$ , die nur aus Eigenvektoren von  $(\alpha_{\nu, \mu})$  besteht.<sup>5</sup>

$$\sum_{\mu=1}^n \alpha_{\nu, \mu} E_\lambda^\mu = e_\lambda E_\lambda^\nu \quad \forall \lambda, \nu \in \{1, \dots, n\} .$$

Version vom 26. März 2009

<sup>4</sup>Eine Animation für beliebige Ausschläge findet man auf der Web-Seite:

<http://www.maths.tcd.ie/~plynch/SwingingSpring/doublependulum.html>.

<sup>5</sup>Siehe z.B. Folgerung 7.3.21 der *Math. Meth. d. Phys.* .

Die Eigenwerte

$$e_\lambda = |\mathbf{E}_\lambda|^{-2} \sum_{\nu,\mu=1}^n E_\lambda^\nu \alpha_{\nu,\mu} E_\lambda^\mu = \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{2} \left| \sum_{\nu=1}^n E_\lambda^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathbf{x}_\gamma \right|^2$$

sind entsprechend unserer Voraussetzungen an die  $q^\nu$  alle positiv. Die durch

$$\mathbf{E}_\lambda \longmapsto e_\lambda \mathbf{E}_\lambda \quad \forall \lambda \in \{1, \dots, n\}$$

charakterisierte lineare Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  in sich ist somit invertierbar und dementsprechend auch die Matrix  $(\alpha_{\nu,\mu})$ . Es existieren also Funktionen  $(\alpha^{-1})_{\lambda,\nu}(q^1, \dots, q^n, t)$ , für die (lokal)

$$\sum_{\nu=1}^n (\alpha^{-1})_{\lambda,\nu} \alpha_{\nu,\mu} = \delta_{\lambda,\mu} \quad (\text{D.50})$$

gilt. Da das verallgemeinerte Potential von der Form

$$U(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = f(q^1, \dots, q^n, t) + \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu g_\nu(q^1, \dots, q^n, t)$$

sein muß,<sup>6</sup> und

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\gamma|^2 \\ &\stackrel{(1.27), (D.49)}{=} \sum_{\nu,\mu=1}^n \alpha_{\nu,\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\gamma \right|^2 + \sum_{\gamma=1}^N m_\gamma \sum_{\mu=1}^n \dot{q}^\mu \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathbf{x}_\gamma \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_\gamma \end{aligned}$$

gilt, sind die LAGRANGE-Gleichungen II. Art von der Form

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^n \underbrace{\left( \alpha_{\nu,\mu}(q^1, \dots, q^n, t) + \alpha_{\mu,\nu}(q^1, \dots, q^n, t) \right)}_{=2\alpha_{\nu,\mu}(q^1, \dots, q^n, t)} \ddot{q}^\mu(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \\ &= F_\nu(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

was dank (D.50) offensichtlich äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} &\ddot{q}^\lambda(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (\alpha^{-1})_{\lambda,\nu}(q^1, \dots, q^n, t) F_\nu(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \quad \forall \lambda \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Gemäß Abschnitt 5.2.3 der *Math. Meth. d. Phys.* ist das Anfangswertproblem für dieses Differentialgleichungssystem lokal eindeutig lösbar.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Siehe Fußnote 46 von Kapitel 1.

<sup>7</sup>Da die  $\alpha_{\nu,\mu}$  voraussetzungsgemäß hinreichend gutartige Funktionen sind, gilt dasselbe gemäß CRAMERScher Regel (siehe Abschnitt 2.3.3 der *Math. Meth. d. Phys.*) auch für die  $(\alpha^{-1})_{\lambda,\nu}$ .

**Zu Aufgabe 21:** Die LAGRANGE-Gleichungen II. Art für die „generalisierten“ Koordinaten  $x^1, x^2, x^3$  sind hier (in Übereinstimmung mit der NEWTONschen Bewegungsgleichung):

$$\begin{aligned} m \ddot{x}^1 - 4(x^1)^3 \alpha &= 0, \\ m \ddot{x}^2 &= 0, \\ m \ddot{x}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Aus (D.51) folgt (dem Energiesatz entsprechend)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} (\dot{x}^1)^2 - (x^1)^4 \alpha \right) = 0$$

und daraus z.B. für Anfangsbedingungen der Form

$$x^1(0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}^1(0) = \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} (x_0)^2 \quad (\text{D.52})$$

die Gleichung

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^1(t))^2 = (x^1(t))^4 \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.53})$$

Da  $\dot{x}^1$  gemäß (D.51) nicht negativ sein kann, folgt aus (D.52)

$$\dot{x}^1 > 0 < x^1(t) \quad \forall t \geq 0$$

und daraus mit (D.53)

$$\frac{1}{x^1(0)} - \frac{1}{x^1(t)} = \int_0^t \frac{\dot{x}^1(t')}{(x^1(t'))^2} dt' = \int_0^t \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} dt' = t \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} \quad \forall t \geq 0.$$

Für die eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems gilt in diesem Falle also

$$x^1(t) = \frac{x^1(0)}{1 - \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} x^1(0) t} \quad \forall t \in \left[ 0, \left( \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} x^1(0) \right)^{-1} \right).$$

Da aber die rechte Seite für  $t \rightarrow \left( \sqrt[+]{\frac{2\alpha}{m}} x^1(0) \right)^{-1}$  divergiert, ist die Annahme einer für alle  $t \in \mathbb{R}$  glatten Lösung in diesem Falle nicht haltbar.<sup>8</sup>

**Zu Aufgabe 22:** Aus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \left( \mathbf{e}_j \times \mathbf{x}(t) \right) = 0 \quad \forall t \geq t_1, j \in \{1, 3\} \quad (\text{D.54})$$

<sup>8</sup>Wenn sich  $x^1(t)$  der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit nähert, verliert die nichtrelativistische Theorie allerdings ohnehin ihre (näherungsweise) Gültigkeit!

folgt

$$\begin{aligned}
 \left( \mathbf{e}_j \times \dot{\mathbf{x}}(t) \right) \times \left( \mathbf{e}_j \times \mathbf{x}(t) \right) & \stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} \left( \left( \mathbf{e}_j \times \dot{\mathbf{x}}(t) \right) \cdot \mathbf{x}(t) \right) \mathbf{e}_j - \left( \left( \mathbf{e}_j \times \dot{\mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{e}_j \right) \mathbf{x}(t) \\
 & = \left( \left( \mathbf{e}_j \times \dot{\mathbf{x}}(t) \right) \cdot \mathbf{x}(t) \right) \mathbf{e}_j \\
 & = - \left( \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \left( \mathbf{e}_j \times \mathbf{x}(t) \right) \right) \mathbf{e}_j \\
 & = 0 \qquad \forall t \geq t_1, j \in \{1, 3\},
 \end{aligned}$$

nach Aufgabe 1 somit<sup>9</sup>

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}(t) \sim \mathbf{e}_j \times \mathbf{x}(0) \quad \text{für alle } t \text{ mit } \mathbf{x}(t) \not\sim \mathbf{e}_j \quad \forall t \geq t_1$$

sowohl für  $j = 1$  als auch für  $j = 3$ . Daraus folgt insbesondere

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(0) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq t_1.$$

Da

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq t_1 \tag{D.55}$$

garantiert, daß  $\mathbf{x}(t)$  konstanten Betrag hat, folgt für einen beliebig vorgegebenen Radius  $R > 0$  aus

$$\mathbf{x}(t_1) \in T_R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = 0 \} \tag{D.56}$$

zusammen mit den kinematischen Randbedingungen (D.54), (D.55) also

$$\mathbf{x}(t) \in T_R \quad \forall t \geq t_1. \tag{D.57}$$

Da aus (D.57) umgekehrt (D.54) und (D.55) folgt, sind die kinematischen Nebenbedingungen zusammen mit der Einschränkung (D.56) der erlaubten Anfangspositionen äquivalent zu (D.57) und damit zu den holonomen Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned}
 |\mathbf{x}(t)|^2 - R^2 &= 0, \\
 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(t) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq t_1.$$

Diese Nebenbedingungen lassen sich (lokal) mithilfe der generalisierten Koordinate  $\varphi$  gemäß

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi) = R(\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_3)$$

erfassen, entsprechen also einem holonomen System mit einem einzigen Freiheitsgrad.

**Zu Aufgabe 23 a):** Daß

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_1 - \nabla_{\mathbf{x}} L_1 \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) = \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_2 - \nabla_{\mathbf{x}} L_2 \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) \tag{D.58}$$

<sup>9</sup>Natürlich folgt aus (D.54) auch  $\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \sim \mathbf{e}_2$ , aber nicht  $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}_2$ .

aus

$$L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - L_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^{3+3+1} \quad (\text{D.59})$$

folgt, ist leicht zu sehen; denn:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} f - \nabla_{\mathbf{x}} \dot{f} \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \right) - \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) - \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, daß umgekehrt auch (D.59) aus (D.58) folgt:

Für  $L_0 \stackrel{\text{def}}{=} L_1 - L_2$  folgt aus (D.58)

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_0 - \nabla_{\mathbf{x}} L_0 \right) (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + (\ddot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}) \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ &\quad - \nabla_{\mathbf{x}} L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^{10}. \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^7, \quad j \in \{1, \dots, 3\},$$

und damit die Existenz von  $\hat{f}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  mit

$$L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^7. \quad (\text{D.60})$$

Dafür gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \left( \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) - \nabla_{\mathbf{x}} \left( \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \left( \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{x}, t) + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)) \\ &\stackrel{\text{Entw.-Satz}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned}$$

und somit

$$\nabla_{\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \text{rot } \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Dementsprechend existiert also ein  $V(\mathbf{x}, t)$  mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } V(\mathbf{x}, t)$$

und

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \hat{f}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} V(\mathbf{x}, t) \right) = 0.$$

Aus letzterem folgt die Existenz einer Funktion  $c(t)$  mit

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} V(\mathbf{x}, t) + c(t).$$

und deshalb für

$$f(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} V(\mathbf{x}, t) + \int_0^t c(t') dt'$$

schließlich

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } f(\mathbf{x}, t).$$

Mit (D.60) folgt daraus (D.59).

**Anmerkung:** Die bewiesene Äquivalenzaussage gilt lokal für beliebige generalisierte Koordinaten.

**Zu Aufgabe 23 b):** Auch für verallgemeinerte Potentiale  $U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  folgt gemäß a), daß sie jeweils bis auf die additive totale Zeitableitung

$$\dot{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \text{grad } f(\mathbf{x}, t)$$

eines  $t$ -abhängigen Skalarfeldes  $f(\mathbf{x}, t)$  eindeutig durch die (als Funktionen von  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $t$  gegebenen) eingepprägten Kräfte festgelegt sind. Speziell für das verallgemeinerte Potential

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = e \Phi(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

eines Massenpunktes mit elektrischer Ladung  $e$  im elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

(siehe Beispiel (iii) von 1.2.2.3) folgt, daß das *elektromagnetische Potential*  $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$  bis auf eine *Eichtransformation*

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &\longmapsto \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &\longmapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \text{grad } f(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

eindeutig ist.

**Zu Aufgabe 24 a):** Wir bezeichnen die zu  $\mathbf{n}$  senkrechte Ausrichtung des Zylinders mit  $\mathbf{e}_Z$  und parametrisieren die körperfesten Punkte in der durch den Abrollwinkel  $\varphi$  gegebenen Position des Zylinders durch die Zylinderkoordinaten

$$(\rho, \psi, h) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, L]$$

gemäß

$$\mathbf{x}_{\rho, \psi, h}(\varphi) = \mathbf{y} + R\varphi \underbrace{\mathbf{e}_Z \times \mathbf{n}}_{\text{Abrollrichtung}} + R\mathbf{n} + h\mathbf{e}_Z + \rho\mathbf{e}(\varphi + \psi), \quad (\text{D.61})$$

wobei

$$\mathbf{e}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\varphi)\mathbf{n} \times \mathbf{e} - \sin(\varphi)\mathbf{n}$$

und  $\mathbf{y}$  der Ortsvektor eines festen Punktes auf der Ebene ist. Mit  $\mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t)$  bezeichnen wir die Volumendichte der eingepprägten Kräfte an der Stelle  $\mathbf{x}_{\rho, \psi, h}(\varphi)$  zur Zeit  $t$ . Die generalisierte eingepprägte Kraft ist dann

$$\begin{aligned} Q(\varphi, t) &= \int_{h=0}^L \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{x}_{\rho, \psi, h}(\varphi) \, d\rho \, d\psi \, dh \\ &= \int_{h=0}^L \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t) \cdot \left( R\mathbf{e}_Z \times \mathbf{n} + \rho \left( \frac{d}{d\alpha} \mathbf{e}(\alpha) \right) \Big|_{\alpha=\varphi+\psi} \right) \, d\rho \, d\psi \, dh \\ &= \int_{h=0}^L \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t) \cdot \left( R\mathbf{e}_Z \times \mathbf{n} + \rho\mathbf{e}_Z \times \mathbf{e}(\varphi + \psi) \right) \, d\rho \, d\psi \, dh \\ &= \int_{h=0}^L \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \mathbf{e}_Z \cdot \left( \left( R\mathbf{n} + \rho\mathbf{e}(\varphi + \psi) \right) \times \mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t) \right) \, d\rho \, d\psi \, dh. \end{aligned}$$

Da die zu  $\varphi$  gehörige momentane Drehachse durch den Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_0 + R\varphi\mathbf{n} \times \mathbf{e}$  geht, folgt daraus mit (D.61) die Behauptung.

**Zu Aufgabe 24 b):** Im Falle

$$\mathbf{f}_{\rho, \psi, h}(\varphi, t) = \mu \mathbf{g},$$

wobei

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} m / \int_{h=0}^L \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R d\rho \, d\psi \, dh$$

die Massendichte des Zylinders bezeichnet, ist das Potential

$$U(\varphi) = -m\mathbf{g} \cdot (\mathbf{x}_0 + R\varphi\mathbf{e}_Z \times \mathbf{n} + R\mathbf{n}) + \text{const.}$$

Daraus folgt

$$Q(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} U(\varphi) = m\mathbf{g} \cdot (R\mathbf{e}_Z \times \mathbf{n}) = \mathbf{e}_Z \cdot (R\mathbf{n} \times m\mathbf{g}),$$

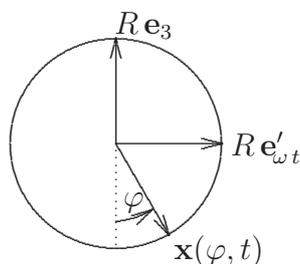
im Einklang mit a).

**Zu Aufgabe 25:** Die Behauptung folgt wegen  $L = T - U$  unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial q^1} T &= \frac{\partial}{\partial q^1} \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} |\dot{\mathbf{x}}_\nu|^2 \\
 &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial q^1} \dot{\mathbf{x}}_\nu \\
 &\stackrel{(1.45)}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{x}_\nu \\
 &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot \frac{d}{dt} \left( \mathbf{e} \times (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0) \right) \\
 &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{x}}_\nu \cdot (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{x}}_\nu) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 26 a):** Mithilfe eines Winkels  $\varphi$  als generalisierte Koordinate lässt sich die Momentanposition  $\mathbf{x}$  des Massenpunktes (lokal, bei entsprechender Wahl von  $\mathbf{e}_1$ ) wie folgt beschreiben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi) = R \sin \varphi \mathbf{e}'_{\omega t} - R \cos \varphi \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_{\omega t} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2.$$



Damit gilt

$$\dot{\mathbf{x}}(\varphi, \dot{\varphi}) = R \dot{\varphi} (\cos \varphi \mathbf{e}'_{\omega t} + \sin \varphi \mathbf{e}_3) + R \sin \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{e}'_{\omega t}$$

und somit

$$T = T(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}(\varphi, \dot{\varphi})|^2 = \frac{m}{2} R^2 \left( \dot{\varphi}^2 + (\omega \sin \varphi)^2 \right). \quad (\text{D.62})$$

Mit dem Potential

$$U = U(\varphi) = -m \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\varphi) = -m g R \cos \varphi \quad (\text{D.63})$$

ergibt sich daraus für die LAGRANGE-Funktion

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} R^2 \left( \dot{\varphi}^2 + (\omega \sin \varphi)^2 \right) + m g R \cos \varphi. \quad (\text{D.64})$$

Die zugehörige LAGRANGE-Gleichung II. Art lautet explizit<sup>10</sup>

$$R \left( m R \ddot{\varphi} - m R \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + m g \sin \varphi \right) = 0$$

und ist äquivalent zu

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{R} - \omega^2 \cos \varphi \right) \sin \varphi = 0. \quad (\text{D.65})$$

**Zu Aufgabe 26 b):** Eine beliebig kleine Schwingung um  $\varphi = \varphi_0$  herum ist natürlich nur bei entsprechender Rückstellkraft möglich. Insbesondere muß also gemäß (D.65)

$$\left( \frac{g}{R} - \omega^2 \cos \varphi_0 \right) \sin \varphi_0 = 0,$$

d.h. entweder  $\sin \varphi_0 = 0$  oder<sup>11</sup>

$$\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \varphi_0 = 0 \quad (\text{D.66})$$

gelten.

Der Fall  $\sin \varphi_0 = 0$  ist nur für  $\varphi_0 = 0 \bmod 2\pi$  resp.  $\varphi_0 = \pi \bmod 2\pi$  möglich, wobei dann in linearer Näherung von (D.65)

$$R \ddot{\varphi} + (g - R \omega^2) \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \approx 0$$

resp.

$$R \ddot{\varphi} - (g + R \omega^2) (\varphi - \pi) = 0 \quad \text{für } \varphi \approx \pi$$

gilt. Deshalb ist in diesem Falle nur eine (harmonische) Schwingung um  $\varphi_0 = 0 \bmod 2\pi$  herum möglich und zwar genau dann, wenn  $g > R \omega^2$  gilt, die Kreisfrequenz also nicht zu groß ist.

Der Fall (D.66),  $\sin \varphi_0 \neq 0$ , kann natürlich nur für

$$g < R \omega^2, \quad \cos \varphi_0 > 0$$

eintreten. Dann ergibt sich mithilfe der entsprechenden Additionstheoreme

$$\ddot{\varphi} + (\omega \sin \varphi_0)^2 (\varphi - \varphi_0) = 0 \quad \text{für } \varphi \approx \varphi_0$$

Version vom 26. März 2009

<sup>10</sup>Natürlich stimmt  $|m R \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi|$  mit dem Betrag der zu  $\mathbf{x}(\varphi, t)$  senkrechten Komponente der Zentrifugalkraft überein und  $|m g \cos \varphi|$  mit dem Betrag der entsprechenden Komponente der Schwerkraft.

<sup>11</sup>Die Bedingung (D.66) ist natürlich genau dann erfüllt, wenn sich die zu  $\mathbf{x}(\varphi_0)$  orthogonalen Komponenten von Schwer- und Zentrifugalkraft kompensieren (Prinzip des *Fliehkraftreglers*).

als lineare Näherung von (D.65). In diesem Falle sind also stets Schwingungen mit beliebig kleiner Amplitude um  $\varphi = \varphi_0$  herum möglich.

**Zu Aufgabe 26 c):** Wegen  $\frac{\partial}{\partial t} L \stackrel{(D.64)}{=} 0$  ist

$$\begin{aligned} H(\varphi, \dot{\varphi}) &\stackrel{(1.63)}{=} \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L(\varphi, \dot{\varphi}) - L(\varphi, \dot{\varphi}) \\ &\stackrel{(D.64)}{=} \frac{m}{2} R^2 \left( \dot{\varphi}^2 - (\omega \sin \varphi)^2 \right) - m g R \cos \varphi \\ &\stackrel{(D.62), (D.63)}{=} T(\varphi, \dot{\varphi}) + U(\varphi, \dot{\varphi}) - m (R \omega \sin \varphi)^2 \end{aligned}$$

gemäß (1.62) eine Erhaltungsgröße. Da  $\sin^2 \varphi(t)$  für Schwingungen  $\varphi(t)$  nicht konstant sein kann, folgt daraus entsprechendes für die Gesamtenergie  $T + U$ . Der physikalische Grund ist folgender:

Für das gesamte Drehmoment  $\mathbf{M}(t)$ , das auf  $m$  wirkt, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M}(t) &\stackrel{\text{allgemein}}{=} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L}(t) \\ &= \frac{d}{dt} m (R \sin \varphi(t))^2 \omega. \end{aligned}$$

Die zur Kreisebene senkrechte Komponente der Zwangskraft verrichtet dementsprechend an  $m$  die Leistung

$$\omega \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt} m \left( R \omega \sin \varphi(t) \right)^2.$$

**Zu Aufgabe 27 a):** Die Matrix-wertigen Funktionen

$$\hat{M}_1(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$\hat{M}_2(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\text{ad}_{\lambda \hat{A}}} \hat{B} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

genügen beide der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{M}(\lambda) = \text{ad}_{\hat{A}} \hat{M}(\lambda)$$

und der Anfangsbedingung

$$\hat{M}(0) = \hat{B}.$$

Daraus folgt

$$\hat{M}_1(\lambda) = \hat{M}_2(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

insbesondere also die Behauptung  $\hat{M}_1(1) = \hat{M}_2(1)$  :

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = e^{\text{ad}_{\hat{A}}} \hat{B}, \quad (\text{D.67})$$

**Zu Aufgabe 27 b):** Die erste Formel ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} R_{-\psi \mathbf{e}_3} & \stackrel{(2.8)}{=} e^{-\psi J_{\mathbf{e}_3}} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} e^{+\psi J_{\mathbf{e}_3}} \\ & \stackrel{(\text{D.67})}{=} e^{-\psi \text{ad}_{J_{\mathbf{e}_3}}} J_{-\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1} \\ & \stackrel{(2.11)}{=} -\dot{\vartheta} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\psi)^{\nu} (\text{ad}_{J_{\mathbf{e}_3}})^{\nu} J_{\mathbf{e}_1} \\ & \stackrel{(2.12)}{=} -\dot{\vartheta} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \psi^{2\nu} J_{\mathbf{e}_1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \psi^{2\nu+1} J_{\mathbf{e}_2} \right) \\ & = -\dot{\vartheta} (\cos \psi J_{\mathbf{e}_1} - \sin \psi J_{\mathbf{e}_2}) \\ & \stackrel{(2.11)}{=} J_{-\dot{\vartheta} (\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2)}. \end{aligned}$$

Die zweite Formel ergibt sich mit (2.11) aus den analog abzuleitenden Beziehungen

$$\begin{aligned} R_{\vartheta \mathbf{e}_1} J_{-\dot{\phi} \mathbf{e}_3} R_{-\vartheta \mathbf{e}_1} & = -\dot{\phi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\vartheta)^{\nu} (\text{ad}_{J_{\mathbf{e}_1}})^{\nu} J_{\mathbf{e}_3} \\ & = J_{-\dot{\phi} (\cos \vartheta \mathbf{e}_3 + \sin \vartheta \mathbf{e}_2)}, \\ R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\phi} \sin \vartheta \mathbf{e}_2} R_{-\psi \mathbf{e}_3} & = -\dot{\phi} \sin \vartheta \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\psi)^{\nu} (\text{ad}_{J_{\mathbf{e}_3}})^{\nu} J_{\mathbf{e}_2} \\ & = J_{-\dot{\phi} \sin \vartheta (\cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_1)} \end{aligned}$$

und

$$R_{\psi \mathbf{e}_3} J_{-\dot{\phi} \cos \vartheta \mathbf{e}_3} R_{-\psi \mathbf{e}_3} = J_{-\dot{\phi} \cos \vartheta \mathbf{e}_3}.$$

**Zu Aufgabe 28 a):** Die Bewegung der Kugel sei gemäß Abschnitt 2.1 der Vorlesung beschrieben, wobei für  $\mathbf{x}_0(t)$  die Ortsvektorfunktion  $\mathbf{X}(t)$  des Kugelschwerpunkts gewählt sei. Da  $X^3$  den festen Wert  $R$  haben muß, können wir

$$(q^1, \dots, q^5) = (X^1, X^2, \phi, \vartheta, \psi)$$

als generalisierte Koordinaten verwenden. Zur Zeit  $t_0$  berühren sich Kugel und Ebene im Punkt mit dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t_0) & \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}(t_0) - \underbrace{\mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{e}_3} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(2.1)}{=} \mathbf{X}(t_0) - \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^{-1}(t_0) \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1(t_0) \\ \mathbf{e}'_2(t_0) \\ \mathbf{e}'_3(t_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Ortsvektorfunktion desjenigen körperfesten Punktes auf der Kugeloberfläche, der die Ebene zum Zeitpunkt  $t_0$  berührt, ist dementsprechend durch

$$\mathbf{x}_{t_0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}(t) - \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^{-1}(t_0) \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1(t) \\ \mathbf{e}'_2(t) \\ \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Nebenbedingung des Rollens ist gemäß Fußnote 28 von Kapitel 2

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_{t_0}(t) \right) \Big|_{t=t_0} = 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R},$$

wegen

$$\begin{aligned} \left( R^{-1}(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1(t) \\ \mathbf{e}'_2(t) \\ \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix} \right)^j & \stackrel{(2.16)}{=} \left( R^{-1}(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_1(t) \\ \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_2(t) \\ \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_3(t) \end{pmatrix} \right)^j \\ & \stackrel{(2.3)}{=} \sum_{k=1}^3 R_k^j(t) (\boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_k(t)) \\ & = \boldsymbol{\omega}'(t) \times \sum_{k=1}^3 R_k^j(t) \mathbf{e}'_k(t) \\ & \stackrel{(2.1),(2.3)}{=} \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

also — auch anschaulich klar — äquivalent zu

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{R} \boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}_3, \quad (\text{D.68})$$

mit  $\boldsymbol{\omega}'(t)$  gemäß (2.16). Nach (2.1) ist (D.68) äquivalent zu

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{R} \sum_{j=1}^3 \omega^j(t) \left( R_j^2(t) \mathbf{e}_1 - R_j^1(t) \mathbf{e}_2 \right), \quad (\text{D.69})$$

mit  $\omega^j(t)$  gemäß (2.39) und  $R(t)$  gemäß (2.14). Mit<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} e^{\lambda J_{\mathbf{e}_3}} & = \mathbb{1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \lambda^{2\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \lambda^{2\nu+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

<sup>12</sup>Vgl. (2.8) und (2.2).

und

$$\begin{aligned}
e^{\lambda J_{\mathbf{e}_1}} &= \mathbb{1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \lambda^{2\nu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \lambda^{2\nu+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \tag{D.71}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
R(t) &= R_{\psi(t)\mathbf{e}_3} R_{\vartheta(t)\mathbf{e}_1} R_{\phi(t)\mathbf{e}_3} \\
&\stackrel{(2.14)}{=} \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & \sin \psi(t) & 0 \\ -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta(t) & \sin \vartheta(t) \\ 0 & -\sin \vartheta(t) & \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & \sin \psi(t) & 0 \\ -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\cos \vartheta(t) \sin \phi(t) & \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) & \sin \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \sin \phi(t) & -\sin \vartheta(t) \cos \phi(t) & \cos \vartheta(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} R_1^1(t) \\ R_2^1(t) \\ R_3^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) \cos \phi(t) - \sin \psi(t) \cos \vartheta(t) \sin \phi(t) \\ -\sin \psi(t) \cos \phi(t) - \cos \psi(t) \cos \vartheta(t) \sin \phi(t) \\ \sin \vartheta(t) \sin \phi(t) \end{pmatrix}, \tag{D.72}$$

$$\begin{pmatrix} R_1^2(t) \\ R_2^2(t) \\ R_3^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) \sin \phi(t) + \sin \psi(t) \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ -\sin \psi(t) \sin \phi(t) + \cos \psi(t) \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ -\sin \vartheta(t) \cos \phi(t) \end{pmatrix}, \tag{D.73}$$

$$\begin{pmatrix} R_1^3(t) \\ R_2^3(t) \\ R_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi(t) \sin \vartheta(t) \\ \cos \psi(t) \sin \vartheta(t) \\ \cos \vartheta(t) \end{pmatrix}, \tag{D.74}$$

Gemäß (D.72) und (D.73) sind die kinematischen Nebenbedingungen (D.69) äquivalent zu

$$\sum_{\nu=1}^5 a_{j,\nu} \dot{q}^\nu = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}. \tag{D.75}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &\stackrel{\text{def}}{=} 1/\mathcal{R}, & a_{2,1} &\stackrel{\text{def}}{=} 0, \\
a_{1,2} &\stackrel{\text{def}}{=} 0, & a_{2,2} &\stackrel{\text{def}}{=} 1/\mathcal{R}, \\
a_{1,3} &\stackrel{\text{def}}{=} 0, & a_{2,3} &\stackrel{\text{def}}{=} 0, \\
a_{1,4} &\stackrel{\text{def}}{=} -\sin \phi, & a_{2,4} &\stackrel{\text{def}}{=} +\cos \phi, \\
a_{1,5} &\stackrel{\text{def}}{=} \sin \vartheta \cos \phi, & a_{2,5} &\stackrel{\text{def}}{=} \sin \vartheta \sin \phi,
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie der Kugel ist nach (2.40)

$$T = \frac{M}{2} \left( (\dot{X}^1)^2 + (\dot{X}^2)^2 \right) + \frac{\theta_1}{2} \left( \dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\vartheta \right), \quad (\text{D.76})$$

wobei hier

$$\theta_1 = \frac{5}{2} \mathcal{R}^2 M$$

das Trägheitsmoment der Kugel bzgl. einer beliebigen Achse ist, die durch den Kugelschwerpunkt geht.<sup>13</sup> Die potentielle Energie der Kugel ist (bis auf eine additive Konstante)

$$U = M g \sin \alpha X^1.$$

Mit (D.76) und (D.75) ergibt sich damit für die LAGRANGE-Gleichungen (1.56):

$$\begin{aligned} M \ddot{X}^1 &= \lambda_1 / \mathcal{R} - M g \sin \alpha, \\ M \ddot{X}^2 &= \lambda_2 / \mathcal{R}, \\ \theta_1 \left( \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right) &= 0, \\ \theta_1 \left( \ddot{\vartheta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \vartheta \right) &= -\lambda_1 \sin \phi + \lambda_2 \cos \phi, \\ \theta_1 \left( \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \vartheta - \dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right) &= \lambda_1 \sin \vartheta \cos \phi + \lambda_2 \sin \vartheta \sin \phi. \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

**Zu Aufgabe 28 b):** Für  $\alpha = 0$  sieht man unmittelbar, daß

$$\left. \begin{aligned} \phi(t) &= \phi_0, \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0, \\ \psi(t) &= \Omega t + \psi_0, \\ X^j(t) &= \mathcal{R} \left( \Omega \mathbf{e}'_3(0) \times \mathbf{e}_3 \right)^j t + X_0^j \quad \forall j \in \{1, 2\} \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{D.78})$$

für beliebig vorgegebene Konstanten  $\phi_0, \vartheta_0, \Omega, \psi_0, X_0^1, X_0^2$  (entsprechender physikalischer Dimension) eine Lösung des Gleichungssystems (D.77) zur Wahl

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

der LAGRANGE-Parameter ist, die wegen

$$\boldsymbol{\omega}'(t) \stackrel{(2.16), (D.78)}{=} \Omega \mathbf{e}'_3(t) = \Omega \mathbf{e}'_3(0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{D.79})$$

der Rollbedingung (D.68) genügt. Da  $\mathbf{e}'_3(0)$  nur von der Wahl der EULER-Winkel  $\phi_0$  und  $\vartheta_0$  abhängt, läßt sich also durch entsprechende Wahl o.a. Konstanten jede Anfangsbedingung erfüllen. Deshalb ist im Falle  $\alpha = 0$  jede Lösung von (D.77)/(D.68) von der Form (D.78). Gemäß (D.79) bedeutet das:

<sup>13</sup>Siehe Abschnitt 4.4.1 der *Math. Meth. d. Phys.*

Im Falle  $\alpha = 0$  (waagerechte Ebene) rotiert die Kugel entsprechend der konstanten vektoriellen Kreisfrequenz  $\boldsymbol{\omega}'(0)$  während sich der Kugelschwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathcal{R}\boldsymbol{\omega}'(0) \times \mathbf{e}_3$  bewegt.

**Zu Aufgabe 29:** Aus

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{e}'_j(t) \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) \right) \mathbf{e}'_j(t) \\
 &\stackrel{(2.27)}{=} \sum_{j=1}^3 \theta_t \left( \mathbf{e}'_j(t), \boldsymbol{\omega}'(t) \right) \mathbf{e}'_j(t) \\
 &\stackrel{(2.16), (2.39)}{=} \sum_{j,k=1}^3 \omega^k(t) \theta_t \left( \mathbf{e}'_j(t), \mathbf{e}'_k(t) \right) \mathbf{e}'_j(t) \\
 &\stackrel{(2.34)}{=} \sum_{j=1}^3 \omega^j(t) \theta_j \mathbf{e}'_j(t) \tag{D.80}
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}'_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) &= \mathbf{e}'_1(t) \cdot \sum_{j=1}^3 \theta_j \left( \dot{\omega}^j(t) \mathbf{e}'_j(t) + \omega^j(t) \dot{\mathbf{e}}'_j(t) \right) \\
 &\stackrel{(2.16)}{=} \theta_1 \dot{\omega}^1(t) + \sum_{j=1}^3 \theta_j \omega^j(t) \mathbf{e}'_1(t) \cdot (\boldsymbol{\omega}'(t) \times \mathbf{e}'_j(t)) \\
 &= \theta_1 \dot{\omega}^1(t) + \sum_{j=1}^3 \theta_j \omega^j(t) \boldsymbol{\omega}'(t) \cdot (\mathbf{e}'_j(t) \times \mathbf{e}'_1(t)) \\
 &= \theta_1 \dot{\omega}^1(t) + (\theta_3 - \theta_2) \omega^2(t) \omega^3(t)
 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}'_2(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) &= \theta_2 \dot{\omega}^2(t) + (\theta_1 - \theta_3) \omega^3(t) \omega^1(t), \\
 \mathbf{e}'_3(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) &= \theta_3 \dot{\omega}^3(t) + (\theta_2 - \theta_1) \omega^1(t) \omega^2(t).
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) = 0 \quad \iff \quad \mathbf{e}'_j(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 30:** Aus (2.1) und (2.3) folgt

$$\mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 R_k^3(t) \mathbf{e}'_k(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und daraus mit (D.80) die Behauptung gemäß:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}'(t), t) \\
 &= \sum_{j,k=1}^3 R_k^3(t) \omega^j(t) \theta_j \mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t) \\
 &= \sum_{k=1}^3 \theta_j R_j^3(t) \omega^j(t) \\
 &\stackrel{\text{(D.74),(2.39)}}{=} \theta_1 \sin \psi(t) \sin \vartheta(t) \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \sin \psi(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \psi(t) \right) \\
 &\quad + \theta_2 \cos \psi(t) \sin \vartheta(t) \left( \dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) \cos \psi(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \psi(t) \right) \\
 &\quad + \theta_3 \cos \vartheta(t) \left( \dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \vartheta(t) \right) \\
 &\stackrel{\theta_1=\theta_2}{=} \dot{\phi}(t) \left( \theta_1 \sin^2 \vartheta(t) + \theta_3 \cos^2 \vartheta(t) \right) + \dot{\psi}(t) \theta_3 \cos \vartheta(t).
 \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 31 a):** Entsprechend Aufgabe 49 der *Math. Meth. d. Phys.* ist

$$-\mathbf{x} \times \int_0^1 \lambda \boldsymbol{\omega}' d\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}$$

ein Vektorpotential des konstanten Skalarfeldes  $\boldsymbol{\omega}'$ , d.h.:<sup>14</sup>

$$\text{rot} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x} \right) = \boldsymbol{\omega}'.$$

Entsprechend Beispiel (ii) von 1.2.2.3 ist also

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \stackrel{\text{def}}{=} +m g \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x} - m (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

ein verallgemeinertes Potential der vorgegebenen eingeprägten Kräfte. Die kinematischen Nebenbedingungen sind

$$\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

die LAGRANGE-Gleichungen I. Art somit

$$m (\ddot{\mathbf{x}} + 2 \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}} + g \mathbf{e}_3) = \lambda_1 \mathbf{x}. \quad (\text{D.81})$$

Explizit lautet (D.81):

$$m (\ddot{x}^1 - 2 \dot{x}^2 \omega_C \cos \theta) = \lambda_1 x^1, \quad (\text{D.82})$$

$$m (\ddot{x}^2 + 2 \dot{x}^1 \omega_C \cos \theta - 2 \dot{x}^3 \omega_C \sin \theta) = \lambda_1 x^2, \quad (\text{D.83})$$

$$m (\ddot{x}^3 - 2 \dot{x}^2 \omega_C \sin \theta + g) = \lambda_1 x^3. \quad (\text{D.84})$$

<sup>14</sup>Hier sei auch an Aufgabe 38 a) der *Math. Meth. d. Phys.* erinnert.

Bildet man auf beiden Seiten von (D.81) das innere Produkt mit  $\dot{\mathbf{x}}$ , so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 + m g \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x} \right) = m \dot{\mathbf{x}} \cdot (\ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}} + g \mathbf{e}_3) = \lambda_1 \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}.$$

Da die rechte Seite aufgrund der kinematischen Nebenbedingungen Null ist, ist also die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 + m g \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x}$$

für physikalisch erlaubte Bewegungen zeitlich konstant.<sup>15</sup>

**Zu Aufgabe 31 b):** Für kleine Schwingungen um  $\mathbf{x} = -R \mathbf{e}_3$  herum ergibt sich aus (D.84)

$$\lambda \approx -\frac{m g}{R}$$

und daraus mit (D.82)/(D.83) näherungsweise

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1(t) + \omega_g^2 x^1(t) &= +2\Omega \dot{x}^2(t), \\ \ddot{x}^2(t) + \omega_g^2 x^2(t) &= -2\Omega \dot{x}^1(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_C \cos \theta, \quad \omega_g \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Die beiden Gleichungen für die reellwertigen Funktionen  $x^1(t)$ ,  $x^2(t)$  sind äquivalent zu

$$\ddot{z}(t) + 2i\Omega \dot{z}(t) + \omega_g^2 z(t) = 0. \quad (\text{D.85})$$

**Zu Aufgabe 31 c):** Die allgemeine Lösung von (D.85) ist:<sup>16</sup>

$$z(t) = c_+ e^{-i\Omega t + i\sqrt{\Omega^2 + \omega_g^2} t} + c_- e^{-i\Omega t - i\sqrt{\Omega^2 + \omega_g^2} t}.$$

In einem mit der Kreisfrequenz  $-\Omega$  um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse rotierenden Bezugssystem betrachtet, führt also<sup>17</sup> der Massenpunkt (in der angegebenen Näherung) eine (ungedämpfte, i.a. elliptische) harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\sqrt{\Omega^2 + \omega_g^2}$  aus. Dabei gilt

$$\sqrt{\Omega^2 + \omega_g^2} \approx \omega_g \quad \text{für } \Omega \ll \omega_g.$$

<sup>15</sup>Das kann man natürlich auch aus (1.62) schließen, wenn man zeigt, daß (1.63) mit der Gesamtenergie übereinstimmt. Der Energiesatz 1.2.3 ist dagegen **nicht** anwendbar, da  $U$  auch von der Geschwindigkeit abhängt.

<sup>16</sup>Siehe z.B. (Arnol'd, 1988, Beispiel 2 in Abschn. 6.2.2).

<sup>17</sup>Siehe Übungsaufgabe 15 der *Math. Meth. d. Phys.*

**Zu Aufgabe 32:** Gemäß (2.35) — und Gleichung (2.24) der *Math. Meth. d. Phys.* — gilt<sup>18</sup>

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \quad (\text{D.86})$$

und entsprechend

$$\theta_t^S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \quad (\text{D.87})$$

wobei  $\mu(\mathbf{x}, t)$  die Massendichte von  $\mathcal{K}$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet. Außerdem gilt definitionsgemäß

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{M} \int \mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}. \quad (\text{D.88})$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \\ & \stackrel{(\text{D.86})}{=} \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ & \quad + \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ & \quad + \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ & \quad + \int \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \right) \mu(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \\ & \stackrel{(\text{D.87}), (\text{D.88})}{=} \theta_t^S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + M \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right). \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich

$$\theta_t(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \theta_t^S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \theta_t^P(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2),$$

wobei

$$\theta_t^P(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \stackrel{\text{def}}{=} M \left( \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right)$$

den Trägheitstensor bzgl.  $\mathbf{x}_0(t)$  eines Massenpunktes  $M$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X}(t)$  bezeichnet.

Seien  $\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)$  die Richtungen der Hauptträgheitsachsen von  $\theta_t^S$ :

$$\theta_t^S(\mathbf{e}'_j(t), \mathbf{e}'_k(t)) = \delta_{jk}.$$

Dann müßte auch

$$\theta_t^P(\mathbf{e}'_j(t), \mathbf{e}'_k(t)) = \delta_{jk}$$

<sup>18</sup>Siehe auch Gleichung (4.40) der *Math. Meth. d. Phys.*

gelten, wenn  $\theta_t^P$  die gleichen Hauptträgheitsachsen hätte. Tatsächlich gilt aber z.B.

$$\theta_t^P(\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t)) = -MR^2 \quad \text{für } \mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0(t) = R(\mathbf{e}'_1(t) + \mathbf{e}'_2(t)).$$

I.a. hat also  $\theta_t^P$  andere Hauptachsen als  $\theta_t^S$ .

**Zu Aufgabe 33:** Für jede (zeitwertige, hinreichend gutartige) Funktion  $g(t)$  mit

$$g(t_1) = g(t_2) = 0 \tag{D.89}$$

ist

$$\mathbf{x}(t) \quad \mapsto \quad \mathbf{x}(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t + s g(t))$$

eine Variation der betrachteten Art. Dafür gilt voraussetzungsgemäß

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right|^2 dt \right)_{|s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \right)_{|s=0} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 2 \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}(t) g(t)) dt \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{2 |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 g(t)}_{\stackrel{\text{D.89}}{=} 0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} 2 \ddot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) g(t) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}|^2 \right) g(t) dt. \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung folgt daraus

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}|^2 = 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2)$$

und damit die Behauptung.

**Zu Aufgabe 34:** Im Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 20 wurde gezeigt, daß die LAGRANGE-Funktion von der Form

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \alpha_{\nu, \mu}(q, t) \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + F(q, t) + \sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu G_\nu(q, t) \tag{D.90}$$

ist, wobei die Matrix  $\hat{\alpha}$  der  $\alpha_{\nu, \mu}$  symmetrisch ist und eine (von  $(q, t)$  abhängige) Orthonormalbasis  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_N\}$  des  $\mathbb{R}^n$  existiert, die nur aus Eigenvektoren von  $\hat{\alpha}$  zu positiven (von  $(q, t)$  abhängigen) Eigenwerten besteht:

$$\hat{\alpha} \mathbf{E}_\nu = \underbrace{e_\nu}_{>0} \mathbf{E}_\nu \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}.$$

Aus letzterem folgt offensichtlich

$$\left( \sum_{\nu=1}^n c^\nu \mathbf{E}_\nu \right) \cdot \hat{\alpha} \left( \sum_{\mu=1}^n c^\mu \mathbf{E}_\mu \right) = \sum_{\nu=1}^n \underbrace{e_\nu}_{>0} (c^\nu)^2$$

und somit

$$\mathbb{R}^n \ni (\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n) \neq (0, \dots, 0) \implies \sum_{\nu,\mu=1}^n \hat{e}^\nu \alpha_{\nu,\mu} \hat{e}^\mu > 0. \quad (\text{D.91})$$

Aus (D.90) folgt für beliebige  $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\lambda=1}^n \hat{e}^\lambda \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\lambda} \right)^2 L &= \left( \sum_{\lambda=1}^n \hat{e}^\lambda \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\lambda} \right)^2 \sum_{\nu,\mu=1}^n \alpha_{\nu,\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu \\ &= \left( \sum_{\lambda'=1}^n \hat{e}^{\lambda'} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\lambda'}} \right) \left( \sum_{\lambda,\mu=1}^n \alpha_{\lambda,\mu} \hat{e}^\lambda \dot{q}^\mu + \sum_{\nu,\lambda=1}^n \alpha_{\nu,\lambda} \dot{q}^\nu \hat{e}^\lambda \right) \\ &= 2 \sum_{\lambda,\lambda'=1}^n \alpha_{\lambda,\lambda'} \hat{e}^\lambda \hat{e}^{\lambda'} \end{aligned}$$

und daraus mit (D.91)

$$\mathbb{R}^n \ni (\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n) \neq (0, \dots, 0) \implies \left( \sum_{\lambda=1}^n \hat{e}^\lambda \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\lambda} \right)^2 L > 0.$$

Damit ist gezeigt, daß  $L(q, \dot{q}, t)$  (für jeweils festes  $(q, t)$ ) eine streng konvexe Funktion von  $\dot{q}$  ist.

Andererseits folgt aus (D.90) und der Symmetrie von  $\hat{\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) = 2 \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\nu,\mu} \dot{q}^\mu + G_\nu$$

und somit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} L \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^n} L \end{pmatrix} = 2 \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}.$$

Da  $\hat{\alpha}$  invertierbar ist, folgt daraus auch

$$\left\{ p = (p^1, \dots, p^n) : \exists \dot{q} \in \mathbb{R}^n : p^\nu = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L(q, \dot{q}, t) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

**Zu Aufgabe 35 a):** Da die  $q^1, \dots, p_n$  unabhängige Koordinaten sind, gilt

$$\begin{aligned} X_{f_1} = X_{f_2} &\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q^1} f_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q^1} f_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} f_2 \end{pmatrix} \\ &\iff f_1 - f_2 \text{ unabhängig von } p, q. \end{aligned}$$

Da  $f_1 - f_2$  voraussetzungsgemäß für hinreichend großes  $p$  verschwindet, folgt daraus die Behauptung.

**Zu Aufgabe 35 b):** Die Behauptung ist eine einfache Folge der Produktregel und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

**Zu Aufgabe 35 c):** Nach b) gilt

$$X_{\{f_j, \{f_k, f_l\}_{q,p}\}_{q,p}} = [X_{f_j}, [X_{f_k}, X_{f_l}]_-]_-$$

Deshalb genügt nach a) der Nachweis von

$$[X_{f_1}, [X_{f_2}, X_{f_3}]_-]_- + \text{zyklische Vertauschungen von } 1, 2, 3 = 0.$$

Das folgt aber aus<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} &X_{f_1} [X_{f_2}, X_{f_3}]_- + \text{zyklische Vertauschungen von } 1, 2, 3 \\ &= \sum_{\pi \in S_3} \text{sign}(\pi) X_{f_{\pi(1)}} X_{f_{\pi(2)}} X_{f_{\pi(3)}} \\ &= [X_{f_2}, X_{f_3}]_- X_{f_1} + \text{zyklische Vertauschungen von } 1, 2, 3. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 36:** Die LAGRANGE-Funktion ist<sup>20</sup>

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} R^2 \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - m g R \cos \vartheta.$$

Für die verallgemeinerten Impulse folgt daraus

$$p_{\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} L = m R^2 \dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = m R^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}.$$

Auflösung nach den generalisierten Geschwindigkeiten liefert

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{m R^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{m R^2 \sin^2 \vartheta} \quad (\text{D.92})$$

<sup>19</sup>Wir bezeichnen, wie allgemein üblich, die Menge aller Permutationen von  $(1, 2, 3)$  mit  $S_3$ .

<sup>20</sup>Siehe Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 17 b).

und somit für die HAMILTON-Funktion:

$$\begin{aligned} H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vartheta} p_\vartheta + \dot{\varphi} p_\varphi - L \\ &= \frac{1}{2mR^2} \left( p_\vartheta^2 + \left( \frac{p_\varphi}{\sin \vartheta} \right)^2 \right) + mgR \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= +\frac{\partial}{\partial p_\vartheta} H, & \dot{\varphi} &= +\frac{\partial}{\partial p_\varphi} H \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial}{\partial \vartheta} H, & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} H \end{aligned}$$

lauten damit explizit:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{p_\vartheta}{mR^2}, & \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \vartheta} \\ \dot{p}_\vartheta &= \frac{p_\varphi^2}{mR^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + mgR \sin \vartheta, & \dot{p}_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen stimmen natürlich mit (D.92) überein, während die letzten beiden gemäß (D.92) die eigentlichen Bewegungsgleichungen (D.41) und (D.42) darstellen.

**Zu Aufgabe 37:** Wir passen die in 3.1.1.2 vorgenommene Auswertung des HAMILTON-Prinzips (3.2) dem vorliegenden Fall an:

Gemäß verallgemeinerter Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu=1}^n p_\nu(t, s) \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(t, s) - H(q(t, s), p(t, s), t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^n \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} p_\nu(t, s) \right) \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(t, s) + p_\nu(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(t, s) \right. \\ &\quad \left. - \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) \right) \frac{\partial}{\partial q^\nu} H(q, p, t) + \left( \frac{\partial}{\partial s} p_\nu(t, s) \right) \frac{\partial}{\partial p_\nu} H(q, p, t) \right) \Big|_{q=q(t, s), p=p(t, s)} \right) dt. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\} \\ &\implies \int_{t_1}^{t_2} p_\nu(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(t, s) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} p_\nu(t, s) \right) \frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) dt \end{aligned}$$

ergibt sich daraus für das Variationsprinzip:

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \frac{\partial}{\partial s} \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\nu=1}^n p_\nu(t, s) \frac{\partial}{\partial t} q^\nu(t, s) - H(q(t, s), p(t, s), t) \right) dt \right) \Big|_{s=0} \\
&= \sum_{\nu=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \dot{q}^\nu(t) - \frac{\partial}{\partial p_\nu} H(q, p, t) \Big|_{q=q(t), p=p(t)} \right) \frac{\partial}{\partial s} p_\nu(t, s) \Big|_{s=0} \right. \\
&\quad \left. - \left( \dot{p}_\nu(t) + \frac{\partial}{\partial q^\nu} H(q, p, t) \Big|_{q=q(t), p=p(t)} \right) \frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) \Big|_{s=0} \right) dt.
\end{aligned}$$

Da die  $\frac{\partial}{\partial s} p_\nu(t, s) \Big|_{s=0}$  und  $\frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t, s) \Big|_{s=0}$  bis auf die Einschränkung

$$\frac{\partial}{\partial s} q^\nu(t_j, s) = 0 \quad \forall j \in \{t_1, t_2\}$$

beliebige Funktionen von  $t$  sind, folgt daraus mit dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung die Behauptung.

**Zu Aufgabe 38 a):** Die LAGRANGE-Funktion ist

$$L(x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2) = \underbrace{\frac{m}{2} \left( (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 \right)}_{=T} - \underbrace{\frac{D}{2} \left( (x^1)^2 + (x^2)^2 \right)}_{=U}.$$

Die zugehörigen kanonischen Impulse stimmen also mit den gewöhnlichen Impulsen überein:

$$p_j = m \dot{x}^j \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Die HAMILTON-Funktion ist dementsprechend

$$\begin{aligned}
H(x^1, x^2, p_1, p_2) &= p_1 \dot{x}^1(x^1, x^2, p_1, p_2) + p_2 \dot{x}^2(x^1, x^2, p_1, p_2) \\
&\quad - L(x^1, x^2, \dot{x}^1(x^1, x^2, p_1, p_2), \dot{x}^2(x^1, x^2, p_1, p_2)) \\
&= p_1 \frac{p_1}{m} + p_2 \frac{p_2}{m} - \left( \frac{m}{2} \left( (p_1/m)^2 + (p_2/m)^2 \right) - \frac{D}{2} \left( (x^1)^2 + (x^2)^2 \right) \right) \\
&= \frac{(p_1)^2 + (p_2)^2}{2m} + \frac{D}{2} \left( (x^1)^2 + (x^2)^2 \right).
\end{aligned}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m \ddot{x}^j + D x^j = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}. \quad (\text{D.93})$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems zu (D.93) ist

$$\begin{aligned}
x_{x_0^j, v_0^j}^j(t) &= x_0^j \cos(\omega t) + \frac{v_0^j}{\omega} \sin(\omega t) \\
&= \left( x_0^j + \frac{v_0^j}{i\omega} \right) \frac{e^{+i\omega t}}{2} + \left( x_0^j - \frac{v_0^j}{i\omega} \right) \frac{e^{-i\omega t}}{2}, \quad (\text{D.94})
\end{aligned}$$

wobei

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

**Zu Aufgabe 38 b):** Aus

$$x^j(t_1) \stackrel{\text{(D.94)}}{=} \left( x^j(0) + \frac{\dot{x}^j(0)}{i\omega} \right) \frac{e^{+i\omega t_1}}{2} + \left( x^j(0) - \frac{\dot{x}^j(0)}{i\omega} \right) \frac{e^{-i\omega t_1}}{2}$$

folgt

$$\dot{x}^j(t_1) = \left( i\omega x^j(0) + \dot{x}^j(0) \right) \frac{e^{+i\omega t_1}}{2} - \left( i\omega x^j(0) - \dot{x}^j(0) \right) \frac{e^{-i\omega t_1}}{2}$$

und somit

$$x^j(t_1) \pm \frac{\dot{x}^j(t_1)}{i\omega} = \left( x^j(0) \pm \frac{\dot{x}^j(0)}{i\omega} \right) e^{\pm i\omega t_1}.$$

Daraus folgt die Behauptung gemäß

$$\begin{aligned} x_{x^j(t_1), \dot{x}^j(t_1)}^j(t_2) &\stackrel{\text{(D.94)}}{=} \left( x^j(t_1) + \frac{\dot{x}^j(t_1)}{i\omega} \right) \frac{e^{+i\omega t_2}}{2} - \left( x^j(t_1) - \frac{\dot{x}^j(t_1)}{i\omega} \right) \frac{e^{-i\omega t_2}}{2} \\ &= \left( x^j(0) + \frac{\dot{x}^j(0)}{i\omega} \right) \frac{e^{+i\omega(t_1+t_2)}}{2} - \left( x^j(0) - \frac{\dot{x}^j(0)}{i\omega} \right) \frac{e^{-i\omega(t_1+t_2)}}{2} \\ &\stackrel{\text{(D.94)}}{=} x^j(t_1+t_2). \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 39 a):** Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für die vorgegebene ‘LAGRANGE-Funktion’ sind die Bewegungsgleichungen des 2-dimensionalen harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}^j + \omega^2 x^j = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Die kanonischen Impulse sind hier

$$p_1 = \dot{x}^2, \quad p_2 = \dot{x}^1 \tag{D.95}$$

und die HAMILTON-Funktion ist dementsprechend

$$H(x^1, x^2, p_1, p_2) = p_1 p_2 + \omega^2 x_1 x_2.$$

Die zugehörigen kanonischen Gleichungen sind (D.95) und

$$\dot{p}_1 = -\omega^2 x_2, \quad \dot{p}_2 = -\omega^2 x_1.$$

**Zu Aufgabe 39 b):** Die Herleitung von (1.62) gilt auch für den vorliegenden Fall, d.h.

$$H = p_1 p_2 + \omega^2 x_1 x_2 \stackrel{\text{(D.95)}}{=} \dot{x}_2 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 x_2$$

ist — für den hier unorthodox beschriebenen zweidimensionalen harmonischen Oszillator — eine Erhaltungsgröße.

**Zu Aufgabe 40:** Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (\text{D.96})$$

ist äquivalent zur Bewegungsgleichung eines auf die  $x$ -Achse gebundene Massenpunktes  $m$ , auf den die eingeprägte Kraft mit dem Potential

$$U(x) \stackrel{\text{def}}{=} m \int_0^x f(x') dx'$$

wirkt. Dazu gehört nämlich die LAGRANGE-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} (\dot{x})^2 - U(x)$$

mit der LAGRANGE-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial x} L(x) \\ &= m \ddot{x} + m f(x). \end{aligned}$$

Der zu  $x$  kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p = m \dot{x}$$

und die HAMILTON-Funktion dementsprechend

$$\begin{aligned} H(x, p) &= p \dot{x}(p) - L(x, \dot{x}(p)) \\ &= \frac{p^2}{2m} + U(x). \end{aligned}$$

Die LAGRANGE-Gleichung — und damit auch (D.96) — ist äquivalent zu den kanonischen Gleichungen

$$\dot{x} = p/m, \quad \dot{p} = -m f(x) \left( = -U'(x) \right).$$

Speziell für

$$U(x) = a x + b x^3 \quad (a, b > 0)$$

haben die Lösungskurven

$$\left\{ (x(t), p(t)) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

der kanonischen Gleichungen aufgrund der Energieerhaltung etwa den in Abbildung D.1 skizzierten Verlauf.

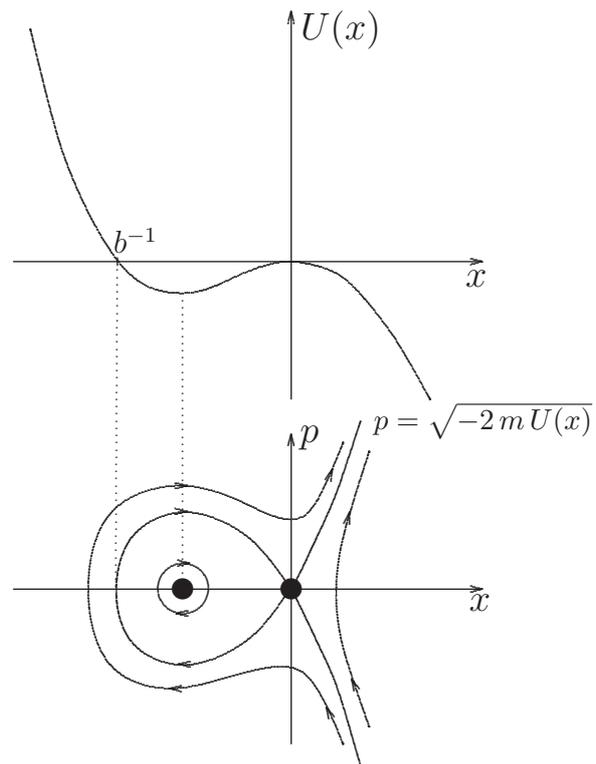


Abb. D.1: Einfaches Phasendiagramm

# Literaturverzeichnis

- Abraham, R. und Marsden, J. E. (1978). *Foundations of Mechanics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 2. Auflage. **3, 89**
- Arnol'd, V. I. (1988). *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*. Birkhäuser Verlag. **3, 77, 96, 105, 110, 189**
- Birkhoff, G. D. (1979). *Dynamical Systems*, Band 9 von *Colloquium Publications*. American Mathematical Society.
- Brickel, F. und Clark, R. S. (1970). *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand Reinold Company London. **113**
- Budó, A. (1965). *Theoretische Mechanik*, Band 25 von *Hochschulbücher für Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. **173**
- Choquet-Bruhat, Y., Dewitt-Morette, C., und Dillard-Bleick, M. (1978). *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland Publishing Company. **119**
- D'Alessandro, D. (2001). Optimal evaluation of generalized Euler angles with applications to classical and quantum control. *quant-ph/0110120*, Seiten 1–13. **50**
- Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Éditions du Griffon, Neuchatel. **3**
- Dürr, D. (2001). *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*. Springer-Verlag. **101**
- Fischer, H. und Kaul, H. (2003). *Mathematik für Physiker*, Band 3. B.G. Teubner, Stuttgart. **3**
- Fredenhagen, K. (Hamburg, WS 1997/98). Theoretische Mechanik. <http://www.desy.de/uni-th/lqp/notes.html>. **46**
- Goldstein, H. (1972). *Klassische Mechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M., 2. Auflage. **3, 52, 67**
- Hamel, G. (1967). *Theoretische Mechanik*, Band 57 von *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer Verlag. **11, 14**

- José, J. V. und Saletan, E. J. (2000). *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press. 3
- Kamke, E. (1965). *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen II*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig, 5. Auflage. 94
- Landau, L. D. und Lifschitz, E. M. (1964). *Mechanik*, Band I von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Akademie - Verlag, Berlin, 3. Auflage. 61
- Ljubarski, G. J. (1962). *Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik*, Band 53 von *Hochschulbücher für Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 104
- Lücke, W. (1995). Nonlinear Schrödinger dynamics and nonlinear observables. In Doebner, H.-D., Dobrev, V. K., und Nattermann, P., Herausgeber, *Nonlinear, Deformed and Irreversible Quantum Systems*, Seiten 140–154. World Scientific. 101
- Lücke, W. (edyn). Elektrodynamik .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf>. 34
- Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf>. 3, 21, 22, 81, 105, 115, 116, 131, 159, 160
- Lücke, W. (eine). Ergänzungen zu “Mathematische Methoden der Physik”.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/eine.pdf>. 56
- Lücke, W. (grav). Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/grav.pdf>. 73
- Lücke, W. (rel). Spezielle Relativitätstheorie .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/rel.pdf>. 123, 126, 128, 129, 130, 133
- Lücke, W. (tdst). Thermodynamik und Statistik .  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/tdst.pdf>. 79, 103
- Malik, R. P. (2003). Jacobi identity for Poisson brackets: A concise proof. *Phys. Teach.*, 45:10–11. [physics/0210117](http://www.physics/0210117). 83
- Mielnik, B. (1974). Generalized quantum mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 37:221–256. 101
- Neimark, J. I. und Fufaev, N. A. (1972). *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Band 33 von *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society. 11

- Pohl, R. W. (1962). *Mechanik · Akustik und Wärmelehre*, Band 15 von *Einführung in die Physik*. Springer-Verlag, 15. Auflage. [61](#)
- Saletan, E. J. und Cromer, A. H. (1974). *Theoretische Mechanik*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien. [40](#)
- Sommerfeld, A. (1964). *Mechanik*, Band 1 von *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 7. Auflage. [3](#), [11](#)
- Straumann, N. (2001). Schrödingers Entdeckung der Wellenmechanik. [quant-ph/0110097](#), Seiten 1–26. [100](#)
- v. Mangoldt, H. und Knopp, K. (1962). *Einführung in die höhere Mathematik*, Band 2. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 11. Auflage. [89](#)
- van der Waerden, B. L. (1966). *Algebra · Erster Teil*. Heidelberger Taschenbücher. Springer-Verlag. [90](#)
- Vandenbrouck, F., Berthier, L., und Gheusi, F. (2000). Coriolis force in geophysics: an elementary introduction and examples. *Eur. J. Phys.*, 21:359–366. [physics/0005028](#). [51](#)
- Walker, J. (1981). Rätselhafte Kreisel. *Spektrum der Wissenschaft*, Mai:151–157. [64](#)
- Weizel, W. (1963). *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band 1 Physik der Vorgänge. Springer-Verlag, 3. Auflage. [3](#)
- Whitney, H. (1936). Differentiable manifolds. *Ann. of Math.*, 37:645–680. [113](#)
- Whitney, H. (1944). Self intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Ann. of Math.*, 45:220–246. [113](#)



# Index

- Äquivalenzrelation, 112
- äußere Ableitung, 117
- Abbildung
  - differenzierbare, 112
  - von Mannigfaltigkeiten
    - differenzierbare, 112
- Ableitung
  - äußere, 117
  - LIE-, 119
  - LIE-, 114, 118
- aktive Koordinatentransformation, 47
- Atlas, 111
  - äquivalenter, 112
  - abzählbarer, 113
  - $C^\infty$ -, 112
- Bewegung, 7
  - erlaubte, 7
  - periodische, 106
    - bedingt, 106
- BOHMSche Mechanik, 101
- BOHR-SOMMERFELD
  - Quantisierung, 110
- boosten, 126
- CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel, 143
- CORIOLIS
  - Kraft, 144
- CORIOLIS
  - Kraft, 52
- D'ALEMBERTSches Prinzip, 11, 16, 18, 30, 31
- diffeomorph, 113
- Diffeomorphismus, 113
- Differential, 117
  - Form, 116
- Dreh-
  - Impuls
    - Satz, 37
  - Matrix, 46
  - Operator, 46
  - Spiegelung, 46
- Drehung, 46
  - infinitesimale, 48
    - Generator, 48
  - THOMAS-, 128
- Eikonal, 98
  - Gleichung, 98
- eingeprägte Kräfte, 13
- Energie
  - Satz, 39
- erlaubte Bewegung, 7
- Erzeugende einer kanonischen Transformation, 88
- EULER
  - Gleichungen, 58
  - LAGRANGE-Gleichungen, 76
  - Winkel, 50
  - Fundamentalsatz von, 39
- Fliehkraftregler, 181
- Fluß eines Vektorfeldes, 115
- Form
  - 0-, 116
  - Differential-, 116
  - kanonische 1-, 120
  - kanonische 2-, 120
  - N-, 116
    - invariante, 119
  - N-, 116

- symplektische, 121
- FOUCAULT
  - Pendel, 145
- Freiheitsgrade
  - Zahl der
    - im Endlichen, 26
    - im Unendlichkleinen, 12
- Funktion
  - HAMILTON-, 81
  - streng konvexe, 78
- generalisierte
  - Geschwindigkeiten, 24
  - Koordinaten, 23
  - Kräfte, 29
- Generator
  - einer infinitesimalen Drehung, 48
- Geodäte, 73
- Geschwindigkeit
  - Phasen-, 99
- Gleichungen
  - Eikonal-, 98
  - EULER-LAGRANGE-, 76
  - EULERSche, 58
  - kanonische
    - HAMILTONSche, 81
    - NEWTONSche, 14, 18
    - SCHRÖDINGER-, 100
- gleichzeitig, nach EINSTEIN, 123
- Haftreibung, 14
- HAMILTON
  - Funktion, 81, 89
  - JACOBI
    - Gleichung, 93
  - Prinzip, 72
  - kanonische Gleichungen, 81
- Haupt
  - Trägheitsachse, 56
  - Trägheitsmomente, 56
- Herpolhodie, 60
- holonom, 7
- Impuls
  - Satz, 37
  - kanonisch konjugierter, 35
- Integral
  - vollständiges, 94
- invariable Ebene, 60
- JACOBI
  - Determinante, 89
  - Identität, 83
- kanonisch
  - konjugierter Impuls, 35
  - Transformation, 86
- Karte, 111
- Kausalitätsprinzip, 129
- Kegel
  - Nutations-, 61
  - Pol-, 60
  - Spur-, 60
- Konfigurationsraum, 73
- konvexe Funktion, 78
- Koordinaten
  - Transformation
    - aktive, 47
    - passive, 47
  - generalisierte, 23
  - Kugel-, 21
  - zyklische, 35–37, 43
- Kotangentbündel, 119
- Kovektor, 116
  - Feld, 118
- Kraft
  - CORIOLIS-, 52, 144
  - eingeprägte, 13
  - generalisierte, 29
  - LORENTZ-, 34, 52
  - Reibungs-, 13, 14
  - Zwangs-, 13
- Kreisel
  - abgeplatteter, 61
  - gestreckter, 61
  - kräftefreier, 59
  - schwerer, 64
  - symmetrischer, 60

- Kugelkoordinaten, 21
- LAGRANGE
- Funktion, 32
  - Gleichungen
    - gemischten Typs, 31
    - I. Art, 31
    - II. Art, 31
  - Parameter, 31
- LEGENDRE
- Transformation, 79
- LEIBNIZ
- Bedingung, 114
  - Regel, 119
- LIE-Ableitung, 114, 118, 119
- LIOUVILLE
- Satz von, 94
- LORENTZ
- Kontraktion, 124
  - Kraft, 34, 52
  - Transformation
    - spezielle, 126
- Mannigfaltigkeit, 111
- HAUSDORFFsche, 113
  - Atlas einer, 111
  - $C^\infty$ -, 112
  - diffeomorphe, 113
  - differenzierbare, 112
  - Karte, 111
  - Unter-
    - differenzierbare, 112
- Masse
- Ruhe-, 130
  - träge, 130
- Nebenbedingungen
- geometrische, 10
  - holonome, 7
  - kinematische, 10
  - nicht holonome, 10, 138
  - rheonome, 10
  - skleronome, 10, 11
- NEWTONsche Gleichungen, 14, 18
- NOETHER-Theorem, 40
- Nutationskegel, 61
- offene Menge, 23, 111
- optische Weglänge, 98
- passive Koordinatentransformation, 47
- Pendel
- FOUCAULTSches, 145
- periodische Bewegung, 106
- bedingt, 106
- Phasen
- Geschwindigkeit, 99
  - Raum, 87, 120
    - erweiterter, 87
- POINCARÉ
- Wiederkehrtheorem von, 95
- POINSON-Konstruktion, 60
- POISSON
- Klammer, 82, 83, 92
  - Satz von, 83
- Polhodie, 60
- Polkegel, 60
- Potential
- verallgemeinertes, 32
- Prinzip
- D'ALEMBERTSches, 11, 16, 18, 30, 31
  - der virtuellen Arbeit, 17
  - HAMILTONSches, 72
  - Kausalitäts-, 129
  - spezielles Relativitäts-, 126
- pull back, 118
- Punkttransformation, 87
- push forward, 117
- Rad
- rollendes, 11
- Raum
- Konfigurations-, 73
- Reibung
- Haft-, 14
  - Koeffizient, 13, 14
  - Kraft, 13, 14

- Rollbewegung
  - allgemein, 60
  - des Trägheitsellipsoids, 60, 61
  - einer Kugel, 144
  - eines Rades, 11
  - eines Zylinders, 14, 15
- Ruhe
  - Energie, 132
- Satz
  - Drehimpuls-, 37
  - Energie-, 39
  - EULERScher Fundamental-, 39
  - Impuls-, 37
  - von LIOUVILLE, 94
  - von POISSON, 83
  - Wiederkehr-
    - von POINCARÉ, 95
- Schnitt, 115
- SCHRÖDINGER-Gleichung, 100
- skleronom, 10
- Snakeboard, 138
- Spurkegel, 60
- stationär, 72
- Tangentenvektor, 114
- tangential, 103
- Tangentialbündel, 115
- Theorem
  - NOETHER-, 40
- THOMAS-Drehung, 128
- Torus, 106
- totale Ableitung, 72
- Trägheits
  - Ellipsoid, 59
  - Moment, 55
    - Haupt-, 56
  - Tensor, 54
    - kovariante Komponenten, 55
- Transformation
  - kanonische, 86
  - kanonischen
    - Erzeugende einer, 88
  - LEGENDRE-, 79
  - Punkt-, 87
- Untermannigfaltigkeit, 112
- Variation, 72
- Vektor
  - Feld, 115
    - HAMILTONSches, 120, 121
    - differenzierbares, 115
    - Fluß eines, 115
    - Ko-, 118
  - Gruppe
    - diskrete, 104
  - Ko-, 116
  - Tangenten-, 114
- verallgemeinerte
  - Potentiale, 32
- Vierer
  - Beschleunigung, 133
  - Geschwindigkeit, 128
  - Impuls, 132
  - Kraft, 133
- virtuelle
  - Arbeit, 17
  - Verrückung, 11
    - infinitesimale, 12
- vollständiges Integral, 94
- Volumenkraft
  - Dichte, 136
- Wellenfront, 99
- Winkel
  - EULERSche, 50
- Wirkungsintegral, 71
- WKB-Näherung, 101
- Zahl der Freiheitsgrade, 31
  - im Endlichen, 26
  - im Unendlichkleinen, 12
- Zeitdilatation, 124
- Zwangskräfte, 13
- zyklische Koordinaten, 35–37, 43