

Theorie zur  
Physik der Musikinstrumente

—  
provisorisches Skript

Technische Universität Clausthal  
WS 1997/98 – SS 2003

W. Lücke



## Vorwort

Der überwiegende Teil der hier zusammengestellten Notizen diente als Grundlage einer im WS 1997/98 gehaltenen Vorlesung *Ausgewählte Kapitel der Physik der Musikinstrumente*, für die natürlich noch eine Menge weiteres Anschauungsmaterial benutzt wurde. Dabei sollte gezeigt werden, wie sich mithilfe der üblichen mathematischen Methoden der Theoretischen Physik die Klangerzeugung von Blasinstrumenten erklären läßt. Entscheidend ist dabei nicht die möglichst exakte Beschreibung, sondern – wie stets in der Theoretischen Physik – eine möglichst einfache Idealisierung (*Modellierung*) mit hinreichender Genauigkeit.

**Literaturempfehlung:** (Helmholtz, 1870; Jeans, 1968; Benade, 1976; Fletcher und Rossing, 1991; Olson, 1967; Pierce, 1989; Rigden, 1985)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegendes</b>	<b>7</b>
1.1	Einleitung . . . . .	7
1.2	Frequenz-Analyse . . . . .	8
1.2.1	Fourier-Reihen und -Integrale . . . . .	8
1.2.2	Tonsysteme der Musik . . . . .	12
1.3	Schwingungsgeneratoren und Resonatoren . . . . .	19
1.3.1	Lineare Oszillatoren . . . . .	20
1.3.2	Nichtlineare Oszillatoren . . . . .	23
1.3.3	Rückkopplung . . . . .	26
1.4	Schallausbreitung in Gasen . . . . .	27
1.4.1	Longitudinale Schallwellen . . . . .	27
1.4.2	Maße für die Schallstärke . . . . .	29
1.4.3	Komplexe Formulierung . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Monochromatische Schallwellen in Führungen</b>	<b>33</b>
2.1	Gerade Rohre . . . . .	33
2.1.1	Akustischer Widerstand . . . . .	33
2.1.2	Ebene Wellen in endlichen Röhren . . . . .	36
2.1.3	Dämpfung und Kompliziertere Schwingungsmoden . . . . .	39
2.2	Hörner . . . . .	41
2.2.1	Die Webster-Gleichung . . . . .	41
2.2.2	Spezielle Hornformen . . . . .	45
2.2.3	Störungsrechnung . . . . .	47
2.3	Akustische Komponenten . . . . .	50
2.3.1	Akustische Vierpole . . . . .	50
2.3.2	Die akustische Kettenmatrix strikt konischer Hörner . . . . .	52
2.3.3	Spezielle akustische Komponenten . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Blasinstrumente</b>	<b>59</b>
3.1	Druckgesteuerte Blasinstrumente . . . . .	59
3.1.1	Vereinfachte Modelle von Schwingungsgeneratoren . . . . .	59
3.1.2	Wirkliche Rohrblatt-Holzblasinstrumente . . . . .	63
3.1.3	Blechblasinstrumente . . . . .	72

3.2 Flöten und Flöten-Orgelpfeifen . . . . .	72
<b>A</b>	<b>73</b>
A.1 Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) . . . . .	73
A.2 Ableitung der Schallwellengleichung . . . . .	76
A.3 Kugel- und Zylinderwellen . . . . .	80
A.4 Strahlung aus einer schallharten Wand . . . . .	84
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>
<b>Index</b>	<b>93</b>

# Kapitel 1

## Grundlegendes

### 1.1 Einleitung

Der normale Mensch hat bekanntlich fünf Sinne:<sup>1</sup>

Gehörsinn, Gesichtssinn, Geruchssinn, Tastsinn, Geschmackssinn.

Musikinstrumente sollen Schallwellen erzeugen, die überwiegend angenehm durch unseren Gehörsinn wahrgenommen werden. Welche Schallwellen als wohlklingend empfunden werden, ist weitgehend durch die Funktionsweise unseres Gehörsinns<sup>2</sup> bestimmt. Deshalb besteht gute Musik aus einer Abfolge einzelner oder mehrerer gleichzeitig ertönender Klänge.

Leider werden die musikalisch akustischen Grundbegriffe in der Literatur nicht einheitlich benutzt. Deshalb seien zunächst folgende Vereinbarungen getroffen:

- Unter einem (einzelnen) **Klang** (*Tonkomplex*) sei stets eine hörbare Überlagerung harmonischer Schwingungen verstanden, die eine mehr oder weniger deutliche Tonhöhenempfindung hervorruft.
- Unter einem **Sinuston** (*reiner Ton*) sei stets eine hörbare (nahezu) harmonische Schwingung verstanden.<sup>3</sup>
- Unter einem **Ton** schlechthin (in der Musik einer *Note* entsprechend) sei stets ein Klang verstanden, der einer (nahezu) periodischen Schwingung entspricht.
- Unter einer **Oberschwingung** (Partialschwingung) sei stets eine sinusförmige Teilschwingung eines Klanges verstanden, deren Kreisfrequenz größer ist als die eines Sinustons dessen Tonhöhe so empfunden wird wie die des Klanges.

---

Version vom 21. November 2009

<sup>1</sup>Einfältige Menschen glauben auch heute noch, daß nichts existieren kann, was nicht (wenigstens im Prinzip) von mindestens einem dieser fünf Sinne erfaßt werden kann.

<sup>2</sup>Bzgl. der Funktionsweise des menschlichen Gehörs siehe z.B. (Stevens, 1980). Das erste Buch zur ‘Psychoakustik’ stammt von Hermann VON HELMHOLTZ: *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Braunschweig, 1862.

<sup>3</sup>Ein solcher Ton entsteht z.B. bei leichtem Anschlagen einer Stimmgabel. Reine Sinustöne werden als fremd und unnatürlich empfunden.

- Unter der **Grundkreisfrequenz** eines einzelnen Klanges sei stets die Kreisfrequenz eines Sinustons verstanden, dessen Tonhöhe so empfunden wird wie die des jeweiligen Klanges.<sup>4</sup>

Die **Tonhöhe**, die wir bei Wahrnehmung eines Sinustons empfinden, entspricht eineindeutig der Schwingungsfrequenz: Sinustöne größerer Kreisfrequenz werden als *höher* empfunden.

## 1.2 Frequenz-Analyse

### 1.2.1 FOURIER-Reihen und -Integrale

Eine wichtige Strukturaussage über Töne liefert der folgende Satz.<sup>5</sup>

**Satz 1.2.1** Sei  $f(t)$  eine stetige komplexwertige Funktion mit der Periode  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  :

$$f(t) = f(t + T_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dann erlaubt  $f$  eine absolut konvergente **FOURIERSche Reihenentwicklung**<sup>6</sup>

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-in\omega_1 t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \cdot \text{Zeiteinheit}. \quad (1.1)$$

Die **FOURIERSchen Entwicklungskoeffizienten** in (1.1) sind dabei eindeutig und durch

$$c_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{+\pi/\omega_1} f(t) e^{+in\omega_1 t} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

gegeben. (1.1) konvergiert sogar gleichmäßig über jedem Intervall.

**Beweis:** Siehe Anhang B von (Lücke, ein). ■

Ein Ton ist also eine Überlagerung  $f(t)$  reiner Sinustöne

$$f_n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad A_n \geq 0, \varphi_n \in \mathbb{R},$$

Version vom 21. November 2009

<sup>4</sup>I.a. muß in einem Klang eine Teilschwingung zur Grundkreisfrequenz aber **nicht** enthalten sein. Z.B. kann bei gleichzeitiger Erzeugung zweier Töne mit den Grundfrequenzen 400 Hz und 600 Hz (Quintabstand!) der Eindruck eines einzigen Tones mit der Grundfrequenz 200 Hz entstehen (Roederer, 2000, Abschnitt 2.7). Deshalb kann man aus einem billigen Lautsprecher auch tiefe Stimmen ‘hören’, deren Frequenzen der Lautsprecher eigentlich gar nicht wiedergeben kann.

<sup>5</sup>In (Carleson, 1966) wurde sogar bewiesen, daß die FOURIER-Reihe für alle LEBESGUE-quadratintegrablen  $f(t)$  fast überall konvergiert.

<sup>6</sup>Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit  $\mathbb{Z}$  die Menge aller ganzen Zahlen.

deren **Kreisfrequenzen** (nahezu) natürliche Vielfache der größten Kreisfrequenz  $\omega_1$  sind, für die

$$f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_1}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt und die deshalb (nahezu) der größte gemeinsame Teiler aller beitragenden Kreisfrequenzen ist. Diese Kreisfrequenz  $\omega_1$  ist — für brauchbare Idealisierung wahrnehmbarer Töne durch streng periodische Schwingungen<sup>7</sup> — die Grundkreisfrequenz des Klanges, also für die Tonhöhe ausschlaggebend. Die **Phasen**  $\varphi_n$  und **Amplituden**  $A_n$  sind dabei – von der Konvergenzbedingung

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$$

abgesehen – beliebig.<sup>8</sup> Die sichere Zuordnung einer genauen Tonhöhe setzt i.a. allerdings voraus, daß hinreichend viele der niedrigsten Partialschwingungen mit merklicher Amplitude vorhanden sind.<sup>9</sup>

Die den  $f_n(t)$  entsprechenden Oberschwingungen<sup>10</sup> eines Tones bezeichnet man als **Partialtöne** oder auch als ***n-te Harmonische*** von  $f(t)$ .

#### Anmerkungen:

- Die Intensitätsverteilung (nicht also die Phasenbeziehungen) der Obertöne eines Tones zu vorgegebener Grundperiode bestimmt — zusammen mit der Art der unvermeidlichen Abweichung von strikter Periodizität<sup>11</sup> — je nach Erzeugungsmechanismus (Klavier/Chembalo, gestrichene/gezupfte Saite usw.) die empfundene „Klangfarbe“ (hell/dunkel, blechern/hölzern usw.), i.a. jedoch nicht die Tonhöhe. Dementsprechend läßt sich die Klangfarbe von Tönen ohne wesentliche Änderung der empfundenen Tonhöhe bei Hi-Fi-Anlagen durch Höhen- und Tiefenfilter verändern.<sup>12</sup>
- Das Vorliegen der Obertöne erleichtert auch die Überprüfung, ob zwei hintereinander erzeugte Töne z.B. Oktavabstand haben. Töne im Oktavabstand werden als nahezu gleich empfunden.
- Obertöne werden auch dann wahrgenommen, wenn nur eine reine Sinusschwingung das Ohr erreicht.

Version vom 21. November 2009

<sup>7</sup>Rein mathematisch gesehen kann eine leichte Frequenzänderung der Teilschwingungen, die keine Änderung der Tonhöhenempfindung bewirkt, zu einer drastischen Änderung von  $\omega_1$  führen.

<sup>8</sup>Deshalb können recht unterschiedliche Schwingungsformen durchaus gleicher Klangfarbe entsprechen (Helmholtz, 1870, S. 36).

<sup>9</sup>Natürlich gibt es interessante Grenzfälle der Amplitudenverteilungen, in deren Nähe sich die Tonhöhenempfindung abrupt ändern kann; siehe z.B. (Benade, 1976, Abschn. 2.3).

<sup>10</sup>Man beachte u.a. die Möglichkeit der Anregung von Kombinationstönen durch Nichtlinearitäten (siehe 1.3.2) — auch im Ohr selbst; siehe (Roederer, 2000, Abschnitt 2.3) und (Olson, 1967, Fig. 7.13).

<sup>11</sup>Daß reale Töne nicht exakt periodischen Schwingungen entsprechen, wird bei impulsartiger Tonerzeugung besonders deutlich.

<sup>12</sup>Bei Geräuschen (wesentlich kontinuierliches Frequenzspektrum) wird dadurch jedoch die Tonhöhenempfindung mit verändert.

- Bei entsprechender Klangfarbe (z.B. Mann/Frau) werden auch von geübten Musikern Töne oft eine Oktave höher oder tiefer empfunden als ihrer tatsächlichen Grundfrequenz entspricht.

Wesentlich für das Empfinden von Konsonanz oder Dissonanz ist u.a. das folgende Lemma (Beweis als Übungsvorschlag).

**Lemma 1.2.2 (Kleiner Modulationsatz)** *Für beliebige  $A, A', \omega, \omega', \varphi, \varphi'$  gilt*

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega t + \varphi) + A' \cos(\omega' t + \varphi') \\ &= A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \cos(\omega_- t + \varphi_-) + A_- \sin(\omega_+ t + \varphi_+) \sin(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

mit

$$A_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} A \pm A', \quad \omega_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega \pm \omega'}{2}, \quad \varphi_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi \pm \varphi'}{2}.$$

**Anmerkungen:**

1. Die Amplitudenmodulation der Schwingung zur Frequenz  $\omega_+$  bezeichnet man als **Schwebung**. Sie ist bei vorgegebenem  $A$  für  $A' = A$  maximal.<sup>13</sup>
2. Der Grund für diese — oft als unangenehm empfundene — Amplitudenmodulation ist eine kontinuierliche Verschiebung der Phasendifferenz der (nicht modulierten) Teilschwingungen  $A \cos(\omega t + \varphi)$  und  $A' \cos(\omega' t + \varphi')$ , durch die sich konstruktive und destruktive Interferenz abwechseln.
3. Für  $|\omega_-| \ll |\omega_+|$ ,  $|A_-| \ll |A_+|$  gilt nach Lemma 1.2.2

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega t + \varphi) + A' \cos(\omega' t + \varphi') \\ & \approx A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \cos(\omega_- t + \varphi_-). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Streng periodische Schwingungen lassen sich natürlich nicht realisieren, schon allein deshalb, weil der Schwingungsvorgang zu endlicher Zeit erst einmal ‘eingeschaltet’ werden muß. Trotzdem lassen sich reale Schwingungen **mathematisch** als (kontinuierliche) Überlagerung von Sinusschwingungen darstellen:

**Satz 1.2.3** *Sei  $f(t)$  eine stetige komplexwertige Funktion über  $\mathbb{R}$ , die außerdem absolut integabel sei, d.h.:*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T |f(t)| dt < \infty.$$

---

Version vom 21. November 2009

<sup>13</sup>Dies ist auch die Grundlage für die sog. **Suchtonmethode**, mit der sich (durch Variation von Amplitude und Frequenz eines zusätzlichen Sinustons) sogar die Amplitude der verschiedenen Schwingungskomponenten bestimmen läßt, die im Ohr vorliegen.

Dann existiert die sog. **FOURIER-Transformierte**

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

und genügt der Bedingung<sup>14</sup>

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

**Beweis:** Siehe Anhang B von (Lücke, ein). ■

Die wichtigsten Rechenregeln zur FOURIER-Integraltransformation sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt. Regel (F10) zeigt z.B., wie sich Ausgleichsvorgänge (Ein- und Ausschalten) auf das Frequenzspektrum auswirken.<sup>15</sup>

Für reale Töne  $f(t)$  der Grundkreisfrequenz  $\omega_0$  gilt

$$\tilde{f}(\omega) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n(\omega - n\omega_0),$$

wobei die  $\delta_n$  „nahezu  $\delta$ -Funktionen“ sind. Bei unregelmäßig ausgedehntem<sup>17</sup>  $\tilde{f}(\omega)$  bezeichnet man  $f(t)$  i.a. als **Geräusch**. Die bei Geräuschen empfundene „Tonhöhe“ entspricht in der Regel in etwa der Frequenz, für die  $\tilde{f}$  maximal ist.

**Anmerkung:** Wenn  $J$  ein vorgegebenes Zeitintervall ist, dann liegt es nahe, den Klangcharakter von  $f(t)$  während  $J$  durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}_J(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho_J(t) f(t) e^{+i\omega t} dt \\ &\stackrel{(\text{F10})}{=} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\rho}_J(\omega') \tilde{f}(\omega - \omega') d\omega' \end{aligned}$$

mit einer geeigneten *Fenster-Funktion*  $\rho_J$  wie z.B.

$$\rho_J(t) = \chi_J(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } t \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu charakterisieren.<sup>18</sup> Auf diese Weise läßt sich also auch die zeitliche Veränderung des Klangcharakters erfassen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß  $\tilde{f}_J(\omega)$  selbst für streng periodisches  $f(t)$ , also gleichbleibenden Klangcharakter, von  $J$  abhängt und entsprechend zu interpretieren ist.

Version vom 21. November 2009

<sup>14</sup>Es kann natürlich höchstens eine stetige komplexwertige Funktion  $\tilde{f}(\omega)$  existieren, für die (1.5) gilt (Beweis als Übungsvorschlag).

<sup>15</sup>Zur musikalischen Bedeutung der Ausgleichsvorgänge siehe (Skudrzyk, 1954, Abschnitt 5.a)).

<sup>16</sup>Mit  $\bar{z}$  bezeichnen wir stets die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl.

<sup>17</sup>Das Frequenzspektrum  $\tilde{f}$  ist umso ausgedehnter, je enger  $f$  konzentriert ist (entsprechend den Unschärferelationen für Ort und Impuls in der Quantenmechanik).

<sup>18</sup>Zur angenäherten Bestimmung von  $\tilde{f}_J(\omega)$  verwendet man gewöhnlich die sog. *schnelle FOURIER-Transformation* (siehe Anhang A.1). Man beachte speziell:  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\chi}_{[-T_0, +T_0]} = \frac{\sin(T_0 \omega)}{\pi \omega}$ .

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$	$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{+i\omega t} dt$	
$c f(t)$	$c \tilde{f}(\omega)$	(F1)
$f_1(t) + f_2(t)$	$\tilde{f}_1(\omega) + \tilde{f}_2(\omega)$	(F2)
$\frac{\partial}{\partial t} f(t)$	$-i\omega \tilde{f}(\omega)$	(F3)
$i t f(t)$	$\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{f}(\omega)$	(F4)
$f(t + \tau)$	$e^{-i\omega\tau} \tilde{f}(\omega)$	(F5)
$e^{+i\omega_0 t} f(t)$	$\tilde{f}(\omega + \omega_0)$	(F6)
$\overline{f(t)}$	$\overline{\tilde{f}(-\omega)}$	(F7)
$\overline{f(-x)}$	$\overline{\tilde{f}(\omega)}$	(F8)
$f(t) = e^{-\lambda t^2}$	$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{1}{4\lambda}\omega^2}$	(F9)
$\sqrt{2\pi} f_1(t) f_2(t)$	$\int \tilde{f}_1(\omega') \tilde{f}_2(\omega - \omega') d\omega'$	(F10)
$\int f_1(x') f_2(t - t') dt'$	$\sqrt{2\pi} \tilde{f}_1(\omega) \tilde{f}_2(\omega)$	(F11)
$\int f(t) dt = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(0)$		(F12)

Tabelle 1.1: Regeln zur FOURIER-Integraltransformation.<sup>16</sup>

## 1.2.2 Tonsysteme der Musik

Erfahrungsgemäß ergibt sich bei gleichzeitigem Erklingen von Tönen nur dann eine **Konsonanz** (Wohlklang), wenn die entsprechenden Grundfrequenzen in geeigneten Verhältnissen zueinander stehen.

Der Abstand zweier Frequenzen  $\nu < \nu'$  ( $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ) beträgt definitionsgemäß<sup>19</sup>

$$\nu \nearrow \nu' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(\nu'/\nu)}{\ln 2} \cdot 1200 \text{ Cents.}$$

Die typischen **Tonintervalle** der Musik entsprechen weitgehend den Frequenzverhältnissen von Oberschwingungen zu einundderselben Grundschiwingung. Für die Grundschiwingung der Tonhöhe von C ist das in Tabelle 1.2 verdeutlicht.<sup>20</sup>

<sup>19</sup>Das entspricht der gleichmäßigen Unterteilung einer Oktave in 12 Halbtonschritte von jeweils



Partialton-Folge	Tonintervall	rein		temperiert	
		$\nu'/\nu$	Cents	Cents	$\nu'/\nu$
C ↗ C	<b>Prime</b>	1/1	0	0	$2^{0/12} = 1$
C ↗ c	<b>Oktave</b>	2/1	1200	1200	$2^{12/12} = 2$
c ↗ g	<b>reine Quinte</b>	3/2	<b>702</b>	<b>700</b>	$2^{7/12} \approx \frac{3}{2} \cdot 0.999$
g ↗ c <sup>1</sup>	<b>reine Quarte</b>	4/3	498	500	$2^{5/12} \approx \frac{4}{3} \cdot 1.001$
c <sup>1</sup> ↗ e <sup>1</sup>	<b>große Terz</b>	5/4	386	400	$2^{4/12} \approx \frac{5}{4} \cdot 1.008$
e <sup>1</sup> ↗ g <sup>1</sup>	<b>kleine Terz</b>	6/5	316	300	$2^{3/12} \approx \frac{6}{5} \cdot 0.991$
g <sup>1</sup> ↗ ≈b <sup>1</sup>		7/6	267		
≈b <sup>1</sup> ↗ c <sup>2</sup>		8/7	231		
c <sup>2</sup> ↗ d <sup>2</sup>	<b>großer Ganzton</b>	9/8	204	200	$2^{2/12} \approx \frac{9}{8} \cdot 0.998$
d <sup>2</sup> ↗ e <sup>2</sup>	<b>kleiner Ganzton</b>	10/9	182		$\approx \frac{10}{9} \cdot 1.010$
e <sup>2</sup> ↗ ≈fis <sup>2</sup>		11/10	165		
≈fis <sup>2</sup> ↗ g <sup>2</sup>		12/11	151		
g <sup>2</sup> ↗ ≈as <sup>2</sup>		13/12	139		
≈as <sup>2</sup> ↗ ≈b <sup>2</sup>		14/13	128		
≈b <sup>2</sup> ↗ h <sup>2</sup>		15/14	119		
h <sup>2</sup> ↗ c <sup>3</sup>	<b>Halbton</b>	16/15	112	100	$2^{1/12} \approx \frac{16}{15} \cdot 0.993$

Tabelle 1.2: Partialtonfolge über C

	Bezeichnungen der Oktav-Anfangstöne								
im deutschen Sprachraum:	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C	c	c <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	c <sup>3</sup>	c <sup>4</sup>	c <sup>5</sup>
nach Helmholtz:	C <sub>II</sub>	C <sub>I</sub>	C	c	c'	c''	c'''	c''''	c <sup>v</sup>
nach USA Norm:	C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>8</sub>

Tabelle 1.3: Bezeichnungsweisen für verschiedene Tonlagen

Tonintervall	Kombination	$\nu'/\nu$	Cents
Halbton		16/15	112
kleiner Ganzton		10/9	182
großer Ganzton		9/8	204
<b><i>kleiner Halbton</i></b>	kl. Ganzton - Halbton	25/24	71
kleine Terz	gr. Ganzton + Halbton	6/5	316
große Terz	gr. Ganzton + kl. Ganzton	5/4	386
reine Quarte	kl. Terz + kl. Ganzton	4/3	498
<b><i>Tritonus</i></b>	gr. Terz + gr. Ganzton	45/32	590
reine Quinte	gr. Terz + kl. Terz	3/2	702
<b><i>kleine Sexte</i></b>	reine Quarte + kl. Terz	8/5	814
<b><i>große Sexte</i></b>	reine Quarte + gr. Terz	5/3	884
<b><i>kleine Septime</i></b>	reine Quarte + reine Quarte	16/9	996
<b><i>große Septime</i></b>	reine Quinte + gr. Terz	15/8	1088

Tabelle 1.4: Tonintervalle der reinen Stimmung

Ton x	Abstand von c	$\nu_x/\nu_c$
c	Prime	1/1
d	großer Ganzton	9/8
e	große Terz	5/4
(f)	reine Quarte	4/3
g	reine Quinte	3/2
(a)	große Sexte	5/3
h	große Septime	15/8
c <sup>1</sup>	Oktave	2/1

Tabelle 1.5: Töne der reinen C-Dur-Tonleiter

$x \nearrow y$	Intervall	$\nu_y/\nu_x$
c $\nearrow$ d	großer Ganzton	9/8
d $\nearrow$ e	kleiner Ganzton	10/9
e $\nearrow$ f	Halbton	16/15
f $\nearrow$ g	großer Ganzton	9/8
g $\nearrow$ a	kleiner Ganzton	10/9
a $\nearrow$ h	großer Ganzton	9/8
h $\nearrow$ c <sup>1</sup>	Halbton	16/15
c $\nearrow$ e	große Terz	5/4
e $\nearrow$ g	kleine Terz	6/5
g $\nearrow$ h	große Terz	5/4
h $\nearrow$ d <sup>1</sup>	kleine Terz	6/5
d $\nearrow$ f	< kleine Terz	$(80/81) \cdot (6/5)$
f $\nearrow$ a	große Terz	5/4
a $\nearrow$ c <sup>1</sup>	kleine Terz	6/5

Tabelle 1.6: Intervalle der reinen C-Dur Tonleiter.

Ton Nr.	Abstand zum vorhergehenden Ton	
	Dur	Moll
2	großer Ganzton	großer Ganzton
3	kleiner Ganzton	Halbton
4	Halbton	großer Ganzton
5	großer Ganzton	kleiner Ganzton
6	kleiner Ganzton	Halbton
7	großer Ganzton	großer Ganzton
8	Halbton	kleiner Ganzton

Tabelle 1.7: Reine Tonleitern<sup>21</sup>

Dur				Moll			
Zusatz- Intervall	Partialton von			Zusatz- Intervall	Partialton von		
	c	e	g		e	g	h
Prime	1.			Prime	1.		
große Terz		1.		kleine Terz		1.	
kleine Terz			1.	große Terz			1.
reine Quarte	2.			reine Quarte	2.		
große Terz		2.		kleine Terz		2.	
kleine Terz	3.		2.	große Terz	3.		2.
große Terz		3.		kleine Terz		3.	
Halbton	4.			kleiner Ganzton	4.		
großer Ganzton			3.	großer Ganzton			3.
kleiner Ganzton	5.	4.		Halbton		4.	
kleiner Terz	6.		4.	kleiner Halbton	5.		

Tabelle 1.8: Partialtonverhältnisse in Dreiklängen

Die Töne der **reinen** C-Dur-Tonleiter<sup>22</sup> haben die in Tabelle 1.5 angegebenen Abstände vom Grundton c.

Wie Tabelle 1.6 zu entnehmen, ist der Frequenzabstand zwischen direkt benachbarten Tönen jeweils ein Halbton, ein kleiner Ganzton oder ein großer Ganzton. Jeder Ton bildet zusammen mit seinen übernächsten Nachbarn einen **Dreiklang**, solange nicht sowohl ein d als auch ein f zu diesen drei Tönen gehört, d.h. das Frequenzintervall zu einem der beiden übernächsten Nachbarn ist eine kleine, das zum anderen übernächsten Nachbarn eine große Terz. Wenn dabei die große Terz zwischen den beiden tieferen Tönen liegt, spricht man von einem **Dur-Dreiklang** (Frequenzverhältnis 4:5:6), sonst von einem **Moll-Dreiklang** (Frequenzverhältnis 10:12:15). Der Wohlklang der Dreiklänge, sowie der unterschiedliche Klangcharakter

Version vom 21. November 2009

100 Cents.

<sup>20</sup>Die weiter unten definierten Töne  $b^1$ ,  $fs^2$ ,  $as^2$  und  $b^2$  nennt man **eklemisch** (außerhalb des Melos stehend), da sie nur ungenau dem 7., 11., 13. und 14. Oberton entsprechen:

$$4 \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{36}{5} = 7.2, \quad 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{100}{9} = 11.111\dots,$$

$$8 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{64}{5} = 12.8, \quad 8 \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{5} = 14.4.$$

<sup>21</sup>Der 1. Ton ist jeweils der Grundton, der 8. Ton der oktavierte Grundton.

<sup>22</sup>Die Töne f und a waren nicht unter den Partialtönen. Da Töne im Oktavabstand, wie bereits erwähnt, als weitgehend gleich empfunden werden, reicht die Betrachtung einer einzigen Oktave.

von Dur und Moll, läßt sich aus den in Tabelle 1.8 angegebenen Frequenzverhältnissen der zugehörigen Partialtöne erklären.

Der Frequenzabstand zwischen d und f ist aber um das sog. syntonische Komma<sup>23</sup> kleiner als eine kleine Terz. Deshalb klingt {d,f,a} in der reinen Stimmung dissonant. {h,d,f} ist weder in der reinen noch in der (gleichschwebend) temperierten Stimmung ein Dreiklang, da weder  $h \nearrow d$  noch  $d \nearrow f$  eine große Terz ist.

Es wäre schön, wenn eine endliche Zahl von Tönen existieren würde, die modulo Oktaven invariant unter reinen Quinten ist. Das würde aber exakte Gültigkeit der Gleichung  $\left(\frac{3}{2}\right)^j = 2^k$  für eine geeignetes Paar natürlicher Zahlen  $j, k$  voraussetzen. Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik (Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung natürlicher Zahlen) ist das nicht möglich. Die Gleichung gilt aber in sehr guter Näherung<sup>24</sup> für  $j = 12$  und  $k = 2$ :

$$\left(\ell \frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7 \text{ für } \ell \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3} 2^{\frac{7}{12}} \approx 0,9988713847.$$

Indem man also die reine Quinte mit dem Faktor  $\ell$  multipliziert (also um wenig mehr als ein Promille zur temperierte Quinte staucht) erhält man deshalb — ausgehend vom **Kammerton**<sup>25</sup>  $a^1 \hat{=} 440 \text{ Hz}$  — durch Quintenbildung und Oktavierung die 12-Ton-Leiter der gleichschwebend temperierten Stimmung;<sup>26</sup> wie anhand des Quintenzirkels (Abb. 1.1) veranschaulicht:

Durch Verwendung der temperierten Quinte (unter Beibehaltung der reinen Oktave) schließt sich der Quintenzirkel nach 12 Schritten bis auf 7-fachen Oktavabstand.<sup>28</sup>

Version vom 21. November 2009

<sup>23</sup>Das **syntonische Komma** ist der Frequenzabstand zwischen großem und kleinem Ganzton, entspricht also dem Frequenzverhältnis  $\frac{9}{8}/\frac{10}{9} = \frac{81}{80}$  und beträgt etwa 21.5 Cents.

<sup>24</sup>Den Frequenzabstand von

$$\begin{aligned} \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{12} / 2^7\right) \frac{1200}{\ln 2} \text{ Cents} &= \ln\left(\frac{531441}{524288}\right) \frac{1200}{\ln 2} \text{ Cents} \\ &\approx 23,46 \text{ Cents,} \end{aligned}$$

der sich zwischen reiner und temperierter Stimmung nach Umlauf um den Quintenzirkel (Abbildung 1.1) ergibt, bezeichnet man als **pythagoreisches Komma**.

<sup>25</sup>Nach (Brüderlin, 1990, S. 87) besitzen etwa 5% der männlichen und 2% der weiblichen Bevölkerung ein sog. „absolutes Gehör“, das aber mit Musikalität nichts zu tun hat und vermutlich auf einem langwährenden Tongedächtnis beruht.

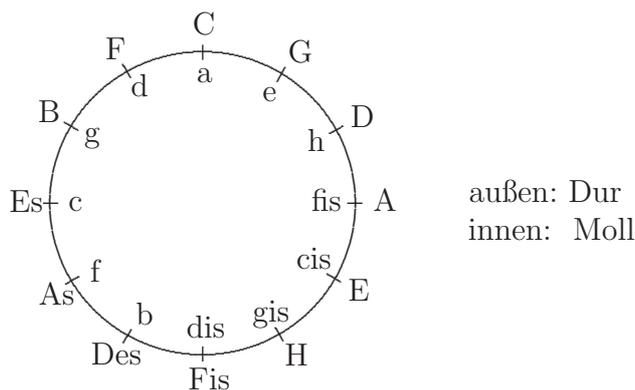
<sup>26</sup>Verwenden man statt  $\ell$  den Faktor

$$\ell' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{5}} \approx 1.010477711$$

(streckt also um wenig mehr als 1%), dann gelangt man zur **Pentatonik**.

<sup>27</sup>Hier weichen wir zur besseren Übersicht von der in Tabelle 1.3 angegebenen deutschen Bezeichnungsweise ab. Warnung: Im englischen wird B statt H geschrieben!

<sup>28</sup>Der Quintenzirkel ist dann also eigentlich ein diskretes Faserbündel.

Abb. 1.1: Quintenzirkel<sup>27</sup>**Historische Anmerkungen:**

- Temperierte Stimmungen wurden um 1700, u.a. von ANDREAS WERCKMEISTER, eingeführt und durch JOHANN SEBASTIAN BACH's 1744 abgeschlossene Komposition „Das wohltemperierte Klavier“ allgemein bekannt. Die von BACH benutzte *wohltemperierte* Stimmung war allerdings **nicht** die — von BACH abgelehnte — heute benutzte gleichschwebend temperierte Stimmung.
- Der Kammerton wurde 1939 von der „International Federation of the National Standardizing Associations (ISA)“ auf 440 Hz festgelegt. Im heutigen Orchester werden aber meist 442 Hz bevorzugt.
- Davor war der Kammerton durch die Wiener Stimmkonferenz 1885 auf 435 Hz, also etwa 19.8 Cents niedriger, festgelegt. Deshalb sind z.B. vor 1939 gefertigte Klarinetten im heutigen Orchester nicht verwendbar.
- Im 18. Jahrhundert waren sogar nur 415 Hz für den Kammerton gebräuchlich.

Die erweiterte C-Dur-Tonleiter ergibt sich durch Hinzunahme der jeweils um einen kleinen Halbton erhöhten oder erniedrigten Töne:<sup>29</sup>

Eine Erniedrigung wird durch Anhängung von „es“ (engl.: *-flat*) bzw. den Index  $\flat$  mitgeteilt, eine Erhöhung durch Anhängung von „is“ (engl.: *-sharp*) bzw. den Index  $\sharp$ .<sup>30</sup>

Während z.B. cis und des in der temperierten Stimmung übereinstimmen, beträgt cis  $\nearrow$  des in der reinen Stimmung  $\ln\left(\frac{9}{8} \left(\frac{24}{25}\right)^2\right) \frac{1200}{\ln(2)}$  Cents  $\approx 62,6$  Cents.

Version vom 21. November 2009

<sup>29</sup>Siehe dazu (Skudrzyk, 1954, Kap. XXVI, Tabelle 15).

<sup>30</sup>Dabei schreibt man üblicherweise Es statt Ees, As statt Aes und B statt Hes. Warnung: Im Englischen schreibt man B statt H.

Jeder Ton der erweiterten Tonleiter läßt sich als Grundton einer reinen Dur- oder Moll-Tonleiter wählen, deren Intervallschritte in Tabelle 1.7 angegeben sind.<sup>31</sup> Da man früher die reinen Tonleitern benutzte, war auch die Verwendung speziell dafür gestimmter Instrumente notwendig. Deshalb gibt es auch heute noch z.B. Klarinetten in B, A, C, Es und D die alle — obwohl inzwischen temperiert gestimmt — einen eigenen Klangcharakter haben.<sup>32</sup>

#### Abschließende Anmerkungen:

- Ein Intervall nennt man *vermindert*, wenn es um einen kleinen Halbton verkleinert ist.
- Ein Intervall nennt man *übermäßig*, wenn es um einen kleinen Halbton vergrößert ist.
- Entsprechend nennt man einen Dreiklang *vermindert*, wenn man die große Terz durch die kleine ersetzt, bzw. *übermäßig*, wenn man die kleine Terz durch die große ersetzt.

## 1.3 Schwingungsgeneratoren und Resonatoren

Damit ein schwingendes System in der umgebende Luft eine intensive Schallstrahlung anregt, muß es eine hinreichend große räumliche Ausdehnung haben.

Für Musikinstrumente — nicht dagegen bei Lautsprechern — verwendet man dazu Resonatoren, die durch geeignete Generatoren entweder impulsartig (insbesondere bei Anschlaginstrumenten und gezupften Saiteninstrumenten) oder kontinuierlich periodisch (insbesondere bei Blasinstrumenten und gestrichenen Saiteninstrumenten) zu starken Eigenschwingungen angeregt werden.

**Erläuterung:** Wenn man z.B. eine Stimmgabel anschlägt und in der Hand hält, ist kaum etwas zu hören. Setzt man die Stimmgabel dagegen auf einen hohlen Holzkasten mit geeigneten Abmessungen, so hört man die Schwingung recht deutlich. Der Hohlraum verstärkt nicht die Schallquelle, sorgt aber für gute Schallabstrahlung.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst einfache Modelle schwingender Systeme untersucht, deren mathematische Struktur auch für akustische Generatoren und Resonatoren wesentlich ist.<sup>33</sup> Die entsprechenden Analogien für Blasinstrumente werden in den Kapiteln 2 und 3 eingehender behandelt.

---

Version vom 21. November 2009

<sup>31</sup>Die Intervalle der Dur-Tonleiter entsprechen natürlich dem oberen Teil von Tabelle 1.6. Wenn man in der C-Dur-Tonleiter a als Grundton wählt, ergibt sich die a-Moll-Tonleiter.

<sup>32</sup>Richard Strauß legte z.B. großen Wert auf Verwendung der C-Klarinette.

<sup>33</sup>Die akustischen Resonatoren besitzen allerdings — im Gegensatz zum einfachen harmonischen Oszillator — in aller Regel unendlich viele Eigenfrequenzen.

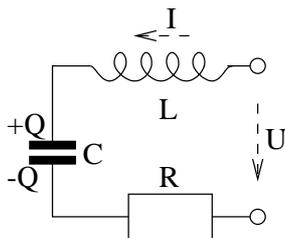


Abb. 1.2: Elektrischer Reihenschwingkreis.

### 1.3.1 Lineare Oszillatoren

Ein typischer linearer Oszillator ist der in Abbildung 1.2 dargestellte elektrische Schwingkreis, der von einer äußeren Spannung  $U(t)$  angeregt wird.

Die physikalische<sup>34</sup> Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung

$$L \ddot{Q}(t) + R \dot{Q}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U(t) \quad (1.6)$$

für ( $L, R, C > 0$  und) hinreichend gutartiges  $U(t)$  ist

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\tilde{U}(\omega)}{-L\omega^2 - i\omega R + \frac{1}{C}} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.7)$$

**Beweisskizze:** Wir gehen davon aus, daß aufgrund der Dämpfung ( $R > 0$ ) auch  $Q(t)$  hinreichend gutartig ist. Dann folgt aus (1.6) mit den Regeln (F1)–(F3) für die FOURIER-Transformation

$$\tilde{U}(\omega) = \left(-L\omega^2 - i\omega R + \frac{1}{C}\right) \tilde{Q}(\omega)$$

und somit

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{Q}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\tilde{U}(\omega)}{-L\omega^2 - i\omega R + \frac{1}{C}} e^{-i\omega t} d\omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Man kann die Lösung natürlich auch durch *Variation der Konstanten* der homogenen Lösung bestimmen; siehe Abschnitt 5.3.3 von (Lücke, ein).

In der Wechselstromlehre bezeichnet man

$$\mathcal{Z}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \quad (1.8)$$

<sup>34</sup>Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung. Jede nicht triviale Lösung zu  $U(t) \equiv 0$  divergiert aber (wegen  $R > 0$ ) für  $t \rightarrow -\infty$  und ist deshalb unphysikalisch.

$$\stackrel{(1.7), (F3)}{=} -i\omega L + R - \frac{1}{i\omega C} \quad (1.9)$$

als die **elektrische Impedanz** des Schwingkreises. Damit gilt

$$\dot{Q}(t) \rightarrow \Re\left(\frac{U_0 e^{-i\omega_0 t}}{\mathcal{Z}(\omega_0)}\right) \quad \text{für } U(t) \rightarrow U_0 \cos(\omega_0 t)$$

und die Frequenzabhängigkeit der vom Schwingkreis aufgenommenen mittleren Leistung (*Wirkleistung*) ist im Grenzfall  $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$  durch

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \dot{Q}(t) U(t) dt &= \frac{1}{2} |I_0|^2 \Re(\mathcal{Z}(\omega_0)) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \frac{1}{2} |I_0|^2 R \end{aligned} \quad (1.10)$$

gegeben,<sup>35</sup> wobei

$$I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in \mathbb{R}} \dot{Q}(t) = \left| \frac{U_0}{\mathcal{Z}(\omega_0)} \right| \quad (1.11)$$

die Amplitude des entsprechenden Wechselstroms ist.

**Beweisskizze:**

$$\begin{aligned} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \dot{Q}(t) U(t) dt &= \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \Re\left(\frac{U_0 e^{-i\omega_0 t}}{\mathcal{Z}(\omega_0)}\right) \Re(U_0 e^{-i\omega_0 t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{U_0}{\mathcal{Z}(\omega_0)} \right|^2 \Re\left(\mathcal{Z}(\omega_0) \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} (1 + e^{2i\omega_0 t}) dt\right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{U_0}{\mathcal{Z}(\omega_0)} \right|^2 \Re(\mathcal{Z}(\omega_0)) \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Stromamplitude  $\max_{t \in \mathbb{R}} \dot{Q}(t)$  ist in diesem Grenzfall für fest vorgegebenes  $U_0$  also genau dann maximal, wenn der **Scheinwiderstand**<sup>36</sup>

$$|\mathcal{Z}(\omega_0)| \stackrel{(1.9)}{=} \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}$$

minimal ist, also für die **Resonanz-Kreisfrequenz** des Stromes

$$\omega_0 = \omega_r^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Version vom 21. November 2009

<sup>35</sup>Die Beziehung (1.10) gilt auch dann mit dem jeweiligen **Wirkwiderstand** (*Resistanz*)  $\Re(\mathcal{Z}(\omega_0))$ , wenn die Impedanz nicht von der speziellen Form (1.9) ist.

<sup>36</sup>Leider ist der allgemeine Sprachgebrauch, was komplexe Widerstände anbetrifft, nicht einheitlich. Die hier gegebene Definition des Scheinwiderstands wird z.B. in (Ebert, 1967, Abschn. 126.222), (Meinke, 1965, Anm. zu Gl. (78)) und (Jackson, 2002, Abschn. 6.9, Fußn. 8) benutzt. Oft werden die Begriffe „Scheinwiderstand“ und „komplexer Widerstand“ synonym benutzt und mitunter wird nur der Betrag des komplexen Widerstandes als „Impedanz“ bezeichnet.

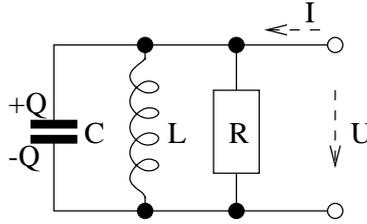


Abb. 1.3: Elektrischer Parallelschwingkreis.

**Anmerkung:** Die Amplitude von  $Q(t)$  wird dagegen für  $\omega_0 = \omega_r^Q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2}$  maximal; vgl. Übungsaufgabe 1 b). Für  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$  liegt die **Eigenfrequenz**  $\omega_e \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2}$ , mit der der Schwingkreis nach Abschalten von  $U$  (gedämpft) weiter-schwingt, zwischen  $\omega_r^Q$  und  $\omega_r^I$ ; siehe Übungsaufgabe 36 von (Lücke, ein).

Wir sehen:

Wenn  $R$  nicht zu groß ist, kann man also mit kleiner Spannungsamplitude hohe Stromamplituden im Serienschwingkreis aufrechterhalten, wenn die Kreisfrequenz der Spannungsquelle hinreichend gut mit der Resonanz-Kreisfrequenz des Stromes übereinstimmt.

Das akustische Analogon dieses Sachverhalts mit der Entsprechung

$$\text{Schalldruck} \hat{=} U, \quad \text{Schallfluß} \hat{=} I$$

ist die Grundlage der kontrollierten Klangerzeugung auf schallflußgesteuerten Blasinstrumenten (insbesondere Flöten).

Während für den in Abbildung 1.2 skizzierte Serienschwingkreis nahe der Resonanzkreisfrequenz die Eingangsspannung klein gegenüber dem Eingangsstrom ist, liegen die Verhältnissen bei dem in Abbildung 1.3 skizzierten Parallelschwingkreis genau umgekehrt. Die entsprechende Bewegungsgleichung

$$C \ddot{U}(t) + \frac{1}{R} \dot{U}(t) + \frac{1}{L} U(t) = \dot{I}(t) \quad (1.12)$$

ergibt sich nämlich formal aus (1.6) durch die Ersetzung

$$\begin{pmatrix} U \\ I \\ L \\ C \\ R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{U} \\ C \\ L \\ 1/R \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die elektrische Impedanz (1.8) für den Parallelschwingkreis<sup>37</sup>

$$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{1}{-\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} - i\omega C}$$

und für monochromatische Schwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  wird die Amplitude von  $U(t)$  bei vorgegebener Amplitude von  $I(t)$  genau dann maximal, wenn der Scheinwiderstand

$$|\mathcal{Z}(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right)^2}}$$

maximal wird, also wiederum für  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Wir sehen:

Wenn  $R$  nicht zu klein ist, kann man also mit kleiner äußerer Stromamplitude eine hohe Spannungsamplitude am Parallelschwingkreis aufrechterhalten, wenn die Kreisfrequenz der Stromquelle hinreichend gut mit der Resonanz-Kreisfrequenz übereinstimmt.

Das akustische Analogon dieses Sachverhalts mit der Entsprechung

$$\text{Schalldruck} \hat{=} U, \quad \text{Schallfluß} \hat{=} I$$

ist die Grundlage der kontrollierten Klangerzeugung auf schalldruckgesteuerten Blasinstrumenten (insbesondere Blech- und Rohrblattblasinstrumente).

### 1.3.2 Nichtlineare Oszillatoren

Ein mechanisches Analogon zum elektrischen Serienschwingkreis ist ein 1-dimensionaler Massenpunkt  $m$ , der sich längs der  $x$ -Achse unter dem Einfluß einer Reibungskraft einer rücktreibenden Kraft  $-Dx$  (z.B. Kraft einer idealen Feder), einer Reibungskraft  $2\rho\dot{x}$  und einer zusätzlichen äußeren Kraft  $f(t)$  bewegt. Die entsprechende Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + Dx(t) = f(t) \tag{1.13}$$

geht formal aus (1.6) durch die Ersetzung

$$\begin{pmatrix} U \\ Q \\ L \\ C \\ R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ x \\ m \\ 1/D \\ 2\rho \end{pmatrix}.$$

Version vom 21. November 2009

<sup>37</sup>Der entsprechende Wirkwiderstand ist

$$\Re(\mathcal{Z}(\omega)) = \frac{1/R}{\left|-\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} - i\omega C\right|^2} = \frac{R}{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Die physikalische Lösung ist gemäß (1.7) also

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\tilde{f}(\omega)}{-m\omega^2 - i\omega 2\rho + D} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.14)$$

gegeben, was sich gemäß (F11) auch in der Form

$$\boxed{x(t) = \int x_\delta(t') f(t-t') dt'} \quad (1.15)$$

mit

$$x_\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\omega t}}{D - \frac{\rho^2}{m} - m\left(\omega + i\frac{\rho}{m}\right)^2} d\omega$$

schreiben läßt. Es läßt sich zeigen (siehe z.B. Abschnitt 3.1.3 von (Lücke, ftm)), daß

$$\boxed{x_\delta(t) = 0 \quad \forall t < 0} \quad (1.16)$$

gilt. Aus (1.15) und (1.16) erkennt man, daß die Lösung (1.14) tatsächlich physikalisch ist:

Solange die äußere Kraft noch nicht wirkt, ruht der Massenpunkt bei  $x = 0$ . (no output before input)

**Anmerkung:** Für  $\rho < \sqrt{mD}$  ist die **Impulsantwort**

$$x_\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{mD - \rho^2}} e^{-\frac{\rho}{m}t} \sin\left(t\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{\rho}{m}\right)^2}\right) \theta(t), \quad \theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases};$$

siehe Anmerkung auf Seite 22 und Abschnitt 5.3.3 von (Lücke, ein).

**Übungsaufgabe 1** Man zeige:

a) Für

$$f(t) = A e^{-i\omega_0 t}, \quad A > 0,$$

folgt aus (1.14)

$$x(t) = B e^{-i(\omega_0 t - \varphi)}$$

mit

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{\sqrt{m^2 \left(\frac{D}{m} - \omega_0^2\right)^2 + \omega_0^2 (2\rho)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega_0 2\rho}{m \left(\frac{D}{m} - \omega_0^2\right)}.$$

b) Zu vorgegebenen  $A, m, D, \rho$  mit  $\rho < \sqrt{mD}$  ist  $B$  für

$$\omega_0 = \omega_r^x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{D}{m} - 2\left(\frac{\rho}{m}\right)^2}$$

maximal.

c) Für  $\omega_0 \ll \sqrt{\frac{D}{m}}$  ist  $x(t)$  von  $m$  nahezu unabhängig.

d) Für die Lösungen

$$x_0(t) \sim e^{\left(-\frac{\rho}{m} \pm i\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{\rho}{m}\right)^2}\right)t}$$

von (1.13) zu  $f = 0$  ist  $Q \frac{2\pi}{\omega_r^x}$  die Zeit, während der die Schwingungsamplitude auf das  $e^{-\pi}$ -fache des Anfangswertes abfällt, wobei:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{mD}}{\rho} \quad (\text{Qualitätsfaktor}), \quad \omega_r^x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

I.a. kann man die Rückstellkraft nur für kleine Schwingungsamplituden als proportional zur Auslenkung betrachten. Für größere Auslenkungen ist zumindest<sup>38</sup> die Ersetzung

$$Dx \longmapsto Dx + k(x)$$

vorzunehmen,<sup>39</sup> wobei  $k(x)$  eine nichtlineare Funktion ist, die der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x)}{x} = 0 \tag{1.17}$$

genügt. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + Dx(t) = f(t) + k(x(t)), \tag{1.18}$$

ist also äquivalent zu

$$\hat{H}[x - \mathcal{N}[x]](t) = f(t), \tag{1.19}$$

wobei:

$$\hat{H}[x](t) \stackrel{\text{def}}{=} m\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + Dx(t),$$

$$\mathcal{N}[x](t) \stackrel{\text{def}}{=} \int x_\delta(t') k(x(t-t')) dt'.$$

<sup>38</sup>Auch die Dämpfung kann natürlich komplizierter vom Bewegungsvorgang abhängen. Relativistische Korrekturen der Bewegungsgleichung wären dagegen unangebracht.

<sup>39</sup>Dabei ist immer noch ideale Elastizität vorausgesetzt. Es kann auch nötig sein,  $k$  geschwindigkeitsabhängig zu wählen.

Aus (1.19) und (1.16) folgt insbesondere

$$x(t) - \mathcal{N}[x](t) = x_{\text{lin}}(t) \quad (1.20)$$

mit

$$x_{\text{lin}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int x_{\delta}(t') f(t-t') dt'.$$

Für hinreichend gutartige Nichtlinearität  $k$  läßt sich (1.20) durch Iteration lösen:<sup>40</sup>

$$\begin{aligned} x^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} x_{\text{lin}}, \\ x^{(\nu+1)} &\stackrel{\text{def}}{=} x_{\text{lin}} + \mathcal{N}[x^{(\nu)}], \\ x(t) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} x^{(\nu)}(t). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} x^{(\nu)}(t) &= \sum_{n=1}^N \left( X_n^{(\nu)} e^{-in\omega_0 t} + \overline{X_n^{(\nu)}} e^{in\omega_0 t} \right) \\ \Rightarrow (x^{(\nu)}(t))^{N'} &= \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{n'=0}^{N'} \binom{N'}{n'} (X_n^{(\nu)})^{n'} (\overline{X_n^{(\nu)}})^{N'-n'} e^{-i(2n'-N')\omega_0 t} \end{aligned}$$

erkennt man daraus:

Auch der nichtlineare Oszillator führt (asymptotisch) eine periodische Bewegung aus, wenn er durch eine monochromatische äußere Kraft angeregt wird. Aber zusätzlich zur Grundfrequenz werden auch alle möglichen Oberschwingungen angeregt.<sup>41</sup>

Für  $\omega_0$  weit unterhalb der Resonanzfrequenz folgt die **lineare** Schwingung quasistatisch der Anregung. Dann gilt für die **nichtlineare** Schwingung mit schwacher Auslenkungen

$$\frac{X_n}{(X_1)^n} \approx \text{unabhängig von } n,$$

wenn  $X_n$  jeweils die Amplitude der  $n$ -ten Harmonischen bezeichnet.

### 1.3.3 Rückkopplung

Siehe (Lindner et al., 1999, Abschnitte 7.3.3 und 7.6).

<sup>40</sup>Eine weitere approximative Lösungsmethode ist z.B. in (Fletcher und Rossing, 1991, Abschnitt 5.1) beschrieben.

<sup>41</sup>Entsprechendes gilt für den nichtlinearen Wahrnehmungsmechanismus im menschlichen Ohr!

## 1.4 Schallausbreitung in Gasen

Der Höreindruck ist **hauptsächlich** durch Luftdruckschwankungen bestimmt, die das Ohr erreichen. Der wahrnehmbare Frequenzbereich liegt etwa zwischen 20 Hz und 20 kHz, wobei die Sensitivität unterhalb etwa 100 Hz sowie oberhalb etwa 10 kHz erheblich abfällt.<sup>42</sup> Es ist also wichtig, die Ausbreitung in Luft in diesem Frequenzbereich zu verstehen.

### 1.4.1 Longitudinale Schallwellen<sup>43</sup>

Die Schallschwingungen eines sonst ruhenden elastischen Mediums lassen durch den sog. **Schallausschlag**  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  beschreiben:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Ortsvektor zur Zeit } t \text{ desjenigen Teils des Mediums,} \\ \text{dessen Ruhelage den Ortsvektor } \mathbf{x} \text{ hat.} \end{cases}$$

Für Gase (unter stationären Bedingungen) genügt der Schallausschlag **in erster Näherung** der Bedingung<sup>44</sup>

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (1.21)$$

und der vektoriellen **Wellengleichung**

$$\boxed{\left(\frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (1.22)$$

mit der **Schallgeschwindigkeit**

$$\boxed{\hat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\langle \kappa \rangle \langle \mu \rangle}}}, \quad (1.23)$$

wobei  $\langle \kappa \rangle$  die mittlere Kompressibilität und  $\langle \mu \rangle$  die mittlere Dichte des Gases bezeichnet.

**Anmerkung:**  $\langle \kappa \rangle$  und  $\langle \mu \rangle$  hängen von dem thermodynamischen Prozeß (insbesondere also auch von Druck und Temperatur) ab, den das Gas aufgrund der Schallschwingung durchläuft!

Version vom 21. November 2009

<sup>42</sup> Die menschliche Sprache nutzt einen Frequenzbereich zwischen ungefähr 100 Hz und 10 kHz (Vokale: 300 Hz — 3 kHz, Konsonanten: > 1 kHz). Die Grundfrequenzen musikalisch brauchbarer Töne liegen zwischen ca. 40 Hz (E<sub>1</sub>, Kontrabaß) und ca. 4,8 kHz (d''''', Piccoloflöte).

<sup>43</sup> Hier werden die Grundgleichungen der Schallausbreitung ohne Begründung angegeben. Bzgl. einer Herleitung siehe Anhang A.2

<sup>44</sup> Allgemein nennt man Lösungen von (1.22) **Longitudinalwellen**, wenn ihre Rotation verschwindet. (1.21) gilt für Medien mit komplizierterem Spannungstensor natürlich i.a. nicht mehr.

Der Schallausschlag bestimmt die **Schallschnelle**

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (1.24)$$

und den **Schalldruck**  $p \stackrel{\text{def}}{=} P - \langle P \rangle$  in erster Näherung zu

$$p(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\langle \kappa \rangle} \operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.25)$$

Spezielle Lösungen von (1.22)/(1.21) sind zum Beispiel (i.a. nicht monochromatische) fortschreitende **ebene Longitudinalwellen**,<sup>45</sup> also Lösungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) &= f'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} - \hat{c}t) \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1 \\ &= -\operatorname{grad} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} - \hat{c}t), \end{aligned} \quad (1.26)$$

mit der **Gruppengeschwindigkeit**<sup>46</sup>  $\hat{c} \mathbf{e}$ .

**Anmerkung:** Mithilfe der 3-dimensionalen Verallgemeinerung von Satz 1.2.3 läßt sich leicht zeigen, daß sich jede (hinreichend gutartige) Lösung von (1.22)/(1.21) als (kontinuierliche) Überlagerung ebener Longitudinalwellen darstellen läßt (Beweis als Übungsvorschlag).

In Luft — als geschlossenes Gleichgewichtssystem mit dem Gesamtvolumen  $V$  unter dem homogenen Druck  $P$  behandelt — gilt

$$PV = \text{const.} \quad \text{für Isotherme}$$

und

$$PV^\gamma = \text{const.} \quad \text{für Adiabaten}$$

mit dem Adiabaten-Exponenten<sup>47</sup>

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} C_P/C_V = 1.4 \quad \text{für 2-atomige Moleküle.}$$

Daraus folgt für adiabatische Prozesse

$$\kappa = \kappa_S = (P \gamma)^{-1}$$

Version vom 21. November 2009

<sup>45</sup>Bzgl. Kugel- und Zylinderwellen siehe A.3

<sup>46</sup>Für die Wellengleichung mit frequenzunabhängigem  $\hat{c}$  fallen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit natürlich zusammen.

<sup>47</sup>Erinnerung:  $\gamma = \frac{f+2}{f}$ ,  $f \stackrel{\text{def}}{=}$  Zahl der angeregten Molekül-Freiheitsgrade.

(siehe Aufgabe 8 von (Lücke, tdst)).

Unter normalen Bedingungen ist in (1.23) die adiabatische<sup>48</sup> Kompressibilität zu verwenden, also

$$\hat{c}^2 = \frac{\gamma \langle P \rangle}{\langle \mu \rangle}$$

in Luft, wobei  $\langle P \rangle$  den mittleren Druck bezeichnet. Mit der idealen Gasgleichung folgt daraus

$$\begin{aligned} \hat{c}(T) &\approx \sqrt{\frac{T}{T_0}} \hat{c}(T_0) \\ &= \sqrt{1 + \frac{T - T_0}{T_0}} \hat{c}(T_0) \\ &\approx \left(1 + \frac{T - T_0}{2T_0}\right) \hat{c}(T_0) \end{aligned}$$

für die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $\hat{c}$  von der absoluten Temperatur  $T$ . Bei normalem Druck<sup>49</sup> und 50% relativer Luftfeuchte<sup>50</sup> gilt

$$\hat{c}(0^\circ \text{ Celsius}) \approx 332 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

und dementsprechend<sup>51</sup>

$$\hat{c}(20^\circ \text{ Celsius}) \approx 344 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## 1.4.2 Maße für die Schallstärke

Das menschliche Ohr hält bis zum  $10^6$ -fachen des Schalldrucks

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar}$$

aus, bei dem die Hörbarkeit für Schwingungen mit einer Frequenz 1 kHz beginnt. Daher verwendet man eine logarithmische Skala für den sog. **Schalldruckpegel**<sup>52</sup>

$$L_p \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{(p^2)_{\text{mM}}}}{p_0} \right) \text{ dB} \quad (1.27)$$

Version vom 21. November 2009

<sup>48</sup>Nur bei Frequenzen um etwa 0.1 Hz ist in Röhren von ca. 20 mm Durchmesser mit guter Wärmeleitung die isotherme Kompressibilität angemessener.

<sup>49</sup>Soweit die ideale Gasgleichung gilt, ist  $\hat{c}$  vom Druck unabhängig.

<sup>50</sup>Bzgl. feuchtigkeitsgesättigter Luft mit CO<sub>2</sub>-Zusatz siehe (Nederveen, 1969, S. 17).

<sup>51</sup>Erinnerung: 0° Celsius = 273,15 K. Eine weitere Temperaturerhöhung auf 26° Celsius würde bei fester Wellenlänge eine Anhebung der Tonhöhe um  $\approx 18$  Cents bewirken.

<sup>52</sup>Mit  $A_{\text{mM}}$  bezeichnen wir jeweils den momentanen zeitlichen Mittelwert einer physikalischen Größe  $A$ .

(dB: **Dezibel**). Der Schalldruckpegel normaler Unterhaltungssprache in 1 m Abstand beträgt  $\approx 1 \mu \text{ bar} \hat{=} 74 \text{ dB}$ .

Da der Lautstärkeindruck, den ein fester Schalldruckpegel hervorruft, von der Schwingungsfrequenz abhängt,<sup>53</sup> führt man dafür eine eigene Einheit, das sog. **Phon**, ein:

Die Lautstärke einer Schallwelle (beliebiger Frequenz) beträgt  $x$  phon, falls sie den gleichen Lautstärkeindruck hervorruft wie eine Schallwelle der Frequenz 1 kHz bei einem Schalldruckpegel von  $x$  dB.

Was ‘gleicher Lautstärkeindruck’ (eigentlich ein rein subjektiver Sachverhalt) meint, ist dabei natürlich durch entsprechende Eichkurven<sup>54</sup> festzulegen.

Aus (1.25), (1.21) und (1.22) erkennt man leicht, daß für die **Schallenergie-dichte**

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \mu \rangle}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \right)^2 + \frac{1}{2\langle \kappa \rangle} (\text{div } \mathbf{d}(\mathbf{x}, t))^2 \\ &\stackrel{(1.21), (1.24)}{=} \frac{\langle \mu \rangle}{2} \left( \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right)^2 + \frac{\langle \kappa \rangle}{2} \left( p(\mathbf{x}, t) \right)^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

und die **Schallintensität** (Energiestromdichte des Schalls)

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.29)$$

konsistenterweise die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.30)$$

gilt (Beweis als Übungsvorschlag).

Analog zum Schalldruckpegel definiert man den **Schallintensitätspegel**<sup>55</sup>

$$L_I \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log_{10} \left( \frac{|\mathbf{j}_{\text{mM}}|}{I_0} \right) \text{ dB}, \quad I_0 \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (1.31)$$

Die gesamte Strahlungsleistung  $\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  eines typischen Musikinstruments beträgt  $\approx 1 \text{ mW}$ . Bei kugelförmiger Ausbreitung entspricht dem ein Schalldruckpegel von

$$\begin{aligned} 79 \text{ dB} &\text{ bei } 1 \text{ m Abstand,} \\ 59 \text{ dB} &\text{ bei } 10 \text{ m Abstand.} \end{aligned}$$

<sup>53</sup>Z.B. muß der Schalldruckpegel einer Schallwelle von 100 Hz etwa 45 dB betragen, um den gleichen Lautstärkeindruck hervorzurufen wie eine Schallwelle von 1 kHz mit einem Schalldruckpegel von 30 dB (Flüstern, die Schmerzgrenze liegt bei  $\approx 120$  phon), der Schalldruck muß also etwa 5,6 mal größer sein.

<sup>54</sup>Siehe z.B. (Ebert, 1967, S. 230, Abb. 1).

<sup>55</sup>Dank des Faktors 20 statt 10 in (1.27) gilt  $L_I \approx L_p$  für fortschreitende monochromatische ebene Wellen (jedoch **nicht** für stehende Wellen).

Die üblichen Wattangaben für Lautsprecher (der Größenordnung 100 W) haben damit wenig zu tun, weil im Normalbetrieb nur wenige Watt genutzt werden (um Übersteuerung des Verstärkers zu vermeiden) und weil nur  $\approx 1\%$  der elektrischen Energie in Schallenergie umgesetzt wird.

### 1.4.3 Komplexe Formulierung

Da  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  reell ist, gilt

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, -\omega) = \overline{\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \omega)}$$

für

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) e^{+i\omega t} dt. \quad (1.32)$$

**Anmerkung:** Falls die Integrale nicht im gewöhnlichen Sinne existieren — wie z.B. für monochromatische Wellen — sind sie im distributionstheoretischen Sinne zu interpretieren; siehe z.B. Abschn. 3.1.1 von (Lücke, ftm).

Gemäß Theorem 1.2.3 folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) + \overline{\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)}, \\ p(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) + \overline{\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{U}(\mathbf{x}, t) + \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{komplexer Schallausschlag}), \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{komplexer Schalldruck}), \\ \mathcal{U}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{komplexe Schallschnelle}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Aufgrund der Rückeindeutigkeit der FOURIER-Transformation sieht man leicht, daß für die komplexen Schallgrößen die gleichen Grundbeziehungen gelten wie für die reellen:

$$\left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.35)$$

$$\text{rot } \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.36)$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(\mathbf{x}, t), \quad (1.37)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\langle \kappa \rangle} \text{div } \mathcal{D}(\mathbf{x}, t). \quad (1.38)$$

Die Verwendung komplexer Schallgrößen ist besonders zweckmäßig für *monochromatische* Schallwellen, d.h. solche der Form

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{2\pi} \left( \mathcal{D}(\mathbf{x}) \delta(\omega - \omega_0) + \overline{\mathcal{D}(\mathbf{x})} \delta(\omega + \omega_0) \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{D}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_0 t}, & \mathcal{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{U}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_0 t} \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_0 t}, & \omega_0 &> 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

und der zeitliche Mittelwert der (reellen) Schallintensität ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dt \\ &\stackrel{(1.29), (1.33)}{=} 2 \Re \left( \mathcal{P}(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x})} \right) \quad \text{im Falle (1.39)}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

**Beweisskizze zu (1.40):**

$$\begin{aligned} &\int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) dt \\ &\stackrel{(1.29), (1.33)}{=} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} 2 \Re \left( \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)} + \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \mathcal{U}(\mathbf{x}, t) \right) dt \\ &= 2 \Re \left( \frac{2\pi}{\omega_0} \mathcal{P}(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{U}(\mathbf{x})} + \mathcal{P}(\mathbf{x}) \mathcal{U}(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} e^{-2i\omega_0 t} dt}_{=0} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 2** Für den Fall

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = \left( \mathcal{R}_+ e^{+i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}} - \mathcal{R}_- e^{-i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}} \right) e^{-i\omega_0 t} \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1,$$

zeige man:<sup>56</sup>

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 \quad \iff \quad |\mathcal{R}_+| = |\mathcal{R}_-|.$$

# Kapitel 2

## Monochromatische Schallwellen in Führungen

### 2.1 Gerade Rohre

#### 2.1.1 Akustischer Widerstand

Wir betrachten – in Zylinderkoordinaten  $\rho, \varphi, h$  – eine in Richtung  $\mathbf{e}_h$  unendlich ausgedehnte, homogene, starre (schallharte), zylindrische<sup>1</sup> Röhre mit (nicht zu geringem) Innenradius  $R$ , die an ihrem Eingang bei  $h = 0$  durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen ist.<sup>2</sup> Wenn die ins Röhreninnere zeigende (ebene, zur Röhrenachse senkrechte) Kolbenfläche zur Zeit  $t$  jeweils die  $h$ -Koordinate  $A(t)$  hat, dann ist

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = A(t - h/\hat{c}) \mathbf{e}_h \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Röhre}$$

eine Lösung von (1.22)/(1.21), die den physikalischen Randbedingungen<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} h = 0 &\implies \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = A(t), \\ \rho = R &\implies \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

genügt.<sup>4</sup> Die (Reaktions-) Kraft  $\mathbf{F}(t)$ , die der Schalldruck im Inneren der Röhre auf den Kolben ausübt, ist für diese Lösung

$$\mathbf{F}(t) = -\pi R^2 p(0, t) \mathbf{e}_h \stackrel{(1.25), (1.23)}{=} -\langle \mu \rangle \hat{c} \pi R^2 \mathbf{u}(0, t) \quad (2.2)$$

---

Version vom 21. November 2009

<sup>1</sup>Eigentlich kommt es hier nur auf die Translationsinvarianz an. Die genaue Querschnittsform spielt erst in 2.1.3 eine Rolle.

<sup>2</sup>Der bewegliche Kolben läßt sich näherungsweise durch eine Lautsprechermembran ersetzen.

<sup>3</sup>Offensichtlich gilt  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = 0$  hier sogar für alle  $\mathbf{x}$ .

<sup>4</sup>Man kann zeigen, daß dies die einzige *kausale* Lösung des Randwertproblems mit  $\mathbf{d} \sim \mathbf{e}_h$  für die unendlich lange Röhre ist, d.h. die einzige Lösung, die der Bedingung

$$A(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \implies \quad \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall t < 0, \mathbf{x} \in \text{Röhre}$$

(no output before input) genügt.

und die Schallschnelle  $\mathbf{u}$  stimmt für  $h = 0$  mit der Kolbengeschwindigkeit überein. Die Schallreaktion entspricht also in diesem Falle einer Reibungskraft mit dem Reibungskoeffizienten  $\langle \mu \rangle \hat{c} \pi R^2$ , den man hier als **Strahlungswiderstand bezeichnet**. Den Strahlungswiderstand pro Flächeneinheit, also  $\langle \mu \rangle \hat{c}$ , bezeichnet man als **charakteristische akustische Resistanz**.<sup>5</sup>

Unter allgemeineren Bedingungen wird der Zusammenhang zwischen Schalldruck und Schallschnelle frequenzabhängig. Z.B. werden bei einer wirklichen Röhre (endliche Länge!) am Röhrenende in aller Regel Wellen reflektiert,<sup>6</sup> so daß im einfachsten monochromatischen Falle die komplexe Schallauslenkung von der Form

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = -\langle \kappa \rangle (\mathcal{R}_+ e^{ik(h-\hat{c}t)} - \mathcal{R}_- e^{-ik(h+\hat{c}t)}) \mathbf{e}_h \quad (2.3)$$

mit geeigneten **komplexen** Koeffizienten  $\mathcal{R}_\pm$  ist.<sup>7</sup> Die zugehörige komplexe Schnelle ist

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{ik}{\langle \mu \rangle \hat{c}} (\mathcal{R}_+ e^{ik(h-\hat{c}t)} - \mathcal{R}_- e^{-ik(h+\hat{c}t)})$$

und der zugehörige komplexe Schalldruck<sup>8</sup> ist

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = ik (\mathcal{R}_+ e^{ik(h-\hat{c}t)} + \mathcal{R}_- e^{-ik(h+\hat{c}t)}) .$$

Für (komplexes)  $\psi$  mit

$$-\mathcal{R}_- / \mathcal{R}_+ = e^{-2\psi} \quad (2.4)$$

ergibt sich für den komplexen Schalldruck

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = 2ik\mathcal{R}_+ e^{-\psi-ik\hat{c}t} \sinh(\psi + ikh) \quad (2.5)$$

und für die zugehörige komplexe Schnelle

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{2ik}{\langle \mu \rangle \hat{c}} \mathcal{R}_+ e^{-\psi-ik\hat{c}t} \cosh(\psi + ikh) . \quad (2.6)$$

Den Quotienten

$$\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}{\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.7)$$

Version vom 21. November 2009

<sup>5</sup>Die Resistanz, auch Wirkwiderstand genannt, entspricht in der Elektrotechnik einem OHM-schen Widerstand.

<sup>6</sup>Entsprechendes gilt für Grenzschichten zwischen Medien unterschiedlicher (charakteristischer akustischer) Resistanz.

<sup>7</sup>Man sieht leicht, daß (2.3) die allgemeinste monochromatische ( $\ddot{\mathcal{D}} = -(k\hat{c})^2 \mathcal{D}$ ) Schallwelle der Form  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}(h, t)$  ist.

<sup>8</sup>Man beachte, daß der komplexe Schalldruck nach (A.12) bereits die Auslenkung  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  eindeutig festlegt, da die zeitlichen Mittelwerte von  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{u}$  voraussetzungsgemäß verschwinden. Deshalb werden wir im folgenden hauptsächlich mit dem komplexen Schalldruck anstelle des Verschiebungsvektors arbeiten, da letzterer in der Regel wesentlich komplizierter ist, wie schon in Abschnitt A.3 anhand der Kugelwellen deutlich wurde.

bezeichnet man als **spezifische akustische Impedanz** an der Stelle  $h$  zur Kreisfrequenz<sup>9</sup>  $k\hat{c}$ . Im Fall (2.3) gilt gemäß (2.5)/(2.6)

$$\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h) = \langle \mu \rangle \hat{c} \tanh(\psi + ikh) \quad (2.8)$$

Die Amplitude von (2.5) ist

$$|\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)| = 2 |k\mathcal{R}_+| e^{-\Re(\psi)} \sqrt{\cosh^2(\Re(\psi)) - \cos^2(\Im(\psi) + kh)}$$

(Beweis als Übungsvorschlag) und ihre  $h$ -Abhängigkeit läßt sich zur Impedanzmessung mithilfe eines kleinen Mikrophons ausnutzen (Morse, 1948, S. 243).

**Erläuterung:** Die Druckamplitude ist minimal für  $\Im(\psi) + kh = 0 \pmod{\pi}$ . Deshalb gilt

$$-\Im(\psi) = kh_{\min} \pmod{\pi}$$

für jede Stelle  $h_{\min}$  minimaler Druckamplitude. Die Druckmaxima haben den Wert  $2 |k\mathcal{R}_+| e^{-\Re(\psi)} \cosh(\Re(\psi))$ , die Druckminima den Wert  $2 |k\mathcal{R}_+| e^{-\Re(\psi)} \sinh(\Re(\psi))$ . Daraus folgt<sup>10</sup>

$$\tanh(\Re(\psi)) = \frac{|\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)|_{\min}}{|\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)|_{\max}}.$$

Gemäß (1.40) ist der zeitlichen Mittelwert der (2.3) entsprechenden Energiestromdichte

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}) \rangle = 2 |\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)|^2 \Re(\mathcal{Z}(h)) \mathbf{e}_h.$$

Die am Rohrende bei  $h = L$  austretende<sup>11</sup> Schallenergie läßt sich also (bei vorgegebenem Maximaldruck) auch dadurch gering halten, daß man die Abschlußresistanz  $\Re(\mathcal{Z}(L))$  entsprechend klein wählt.

**Übungsaufgabe 3** Man zeige, daß  $\langle \mathbf{j} \rangle$  von  $h$  unabhängig ist.

Version vom 21. November 2009

<sup>9</sup>In der Regel gilt  $\mathcal{Z}_{-\omega}(h) = \overline{\mathcal{Z}_{\omega}(h)}$ .

<sup>10</sup>Man beachte, daß gemäß (2.3)  $\Re(\psi) > 0$  gilt.

<sup>11</sup>Wenn der in Richtung  $-\mathbf{e}_h$  laufende Anteil nur durch Reflexion zustande kommt, sollte  $|\mathcal{R}_+| \geq |\mathcal{R}_-|$ , nach (2.4) also  $\Re(\Psi) \geq 0$  und somit nach (2.8)  $\Re(\mathcal{Z}(h)) \geq 0$  gelten. Letzteres folgt aus der bekannten Eigenschaft

$$\Re\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \geq 0 \iff |z| \leq 1$$

der (für  $z \neq -1$  definierten, zu sich selbst inversen) speziellen MÖBIUS-Abbildung  $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ .

### 2.1.2 Ebene Wellen in endlichen Röhren

Man beachte, daß die i.a. komplexe spezifische akustische Impedanz  $\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h)$  der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h)}{\langle \mu \rangle \hat{c}} = ik \left( 1 - \left( \frac{\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h)}{\langle \mu \rangle \hat{c}} \right)^2 \right) \quad (2.9)$$

genügt und damit (bei vorgegebener Kreisfrequenz  $k\hat{c}$ ) bereits durch den Wert an einer einzigen Stelle der Röhre insgesamt eindeutig festgelegt ist. Bei Festlegung der Impedanzen (durch stationäre Betriebsbedingungen) an beiden Röhrenden sind daher in der Regel nur noch bestimmte Frequenzen möglich.

**Erläuterung:** Wenn  $\mathcal{Z}_\omega(0) = f(\omega)$  eine analytische Funktion von  $\omega$  ist, dann auch  $\mathcal{Z}_\omega(L)$  und folglich gilt für analytisch vorgegebenes  $g(\omega)$  dann entweder  $\mathcal{Z}_\omega(L) = g(\omega)$  für alle  $\omega$  oder die Menge  $\{\omega : \mathcal{Z}_\omega(L) = g(\omega)\}$  ist diskret.

An *ideal schallharten* Grenzflächen gilt z.B.  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ , wobei  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  jeweils die Flächennormale der Wand bezeichnet. Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ e^{+ikL} - \mathcal{R}_- e^{-ikL} = 0 &\iff \mathcal{R}_- = \mathcal{R}_+ e^{+2ikL} \\ &\iff e^{-2\psi} = -e^{2ikL} \\ (2.4) & \\ &\iff \psi = -i\left(\frac{\pi}{2} + kL\right) \bmod i\pi \end{aligned}$$

ergibt sich damit<sup>12</sup> im Falle (2.3) für eine bei  $h = L$  (durch eine ebene, zu  $\mathbf{e}_h$  senkrechte, ideal schallharte Wand) *ideal geschlossene Röhre* gemäß (2.8)

$$\mathcal{Z}_\omega(h) = \begin{cases} \infty & \text{für } h = L, \\ -i \langle \mu \rangle \hat{c} \tan\left(\frac{\pi}{2} + kL\right) & \text{für } h = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Die spezifische akustische Impedanz an der Stelle  $h = 0$  besitzt in diesem Falle also (aufgrund der Vernachlässigung von Dämpfung) nur einen Imaginärteil (*Reaktanz*, *Blindwiderstand*).<sup>13</sup>

**Übungsaufgabe 4** Man zeige, daß der Realteil von (2.3) genau dann eine *stehende Welle*, d.h. von der Form

$$d(\mathbf{x}, t) = d(\mathbf{x}) f(t)$$

ist, wenn  $|\mathcal{R}_-| = |\mathcal{R}_+|$ .

Version vom 21. November 2009

<sup>12</sup>Man beachte:

$$\Re\left(\mathcal{R}_+ e^{ik(h-\hat{c}t)} - \mathcal{R}_- e^{-ik(h+\hat{c}t)}\right) = 0 \forall t \iff \mathcal{R}_+ e^{+ikh} - \mathcal{R}_- e^{-ikh} = 0.$$

<sup>13</sup>Für, relativ zur Rohrlänge, große Wellenlängen entspricht  $\mathcal{Z}_\omega(0)$  i.w. der Kompressibilität von Luft und stellt eine akustische Kapazität (siehe 2.3) dar.

Die Bedingung  $\mathbf{d}(h = L, t) = 0$  ist (im Falle (2.3)) übrigens äquivalent zu  $\mathcal{P}'(L) = 0$ . Für stehende Wellen bedeutet das maximale Schalldruckamplitude bei  $h = L$  – eine (z.B. bei *gedackten* Orgelpfeifen erfüllte) Bedingung, die auch für **druckgesteuerte** Rohrenden (z.B. bei Rohrblatt-Holzblasinstrumenten) annähernd gegeben ist.

Die bei  $h = L$  **ideal offene Röhre** ist durch  $\mathcal{Z}(L) = 0$  **definiert**. Sie ist (näherungsweise) durch entsprechende Steuerung der Schallschnelle bei  $h = L$  realisierbar (typisch z.B. für die Verhältnisse am Mundstück einer Querflöte). Hier gilt<sup>14</sup> entsprechend (2.8)

$$\mathcal{Z}_\omega(h) = \begin{cases} 0 & \text{für } h = L, \\ -i \langle \mu \rangle \hat{c} \tan(kL) & \text{für } h = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

**Übungsaufgabe 5** Man zeige, daß die möglichen Wellenzahlen für die auf einer Seite ideal offene, auf der anderen ideal geschlossene<sup>15</sup> Röhre durch

$$k = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

für die beidseitig ideal geschlossene sowie für die beidseitig ideal offene<sup>16</sup> Röhre dagegen durch

$$k = n \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gegeben sind und diskutiere die entsprechenden Partialtonfolgen.

Bei einer offenen Röhre geht die über den Querschnitt gemittelte spezifische akustische Impedanz  $\mathcal{Z}^F$  für  $R \rightarrow \infty$  natürlich in die charakteristische akustische Impedanz  $\langle \mu \rangle \hat{c}$  fortschreitender ebener Wellen über, ist also tatsächlich von Null verschieden. Im Falle  $kR \ll 1$  ist  $\mathcal{Z}^F$  jedoch vernachlässigbar. Für ein mit (unendlich) breitem, schallhartem Flansch versehenes Rohr, dessen Ausgangsfläche durch einen mit der Kreisfrequenz  $k\hat{c}$  oszillierenden, schallharten Kolben ersetzt sei, läßt

---

Version vom 21. November 2009

<sup>14</sup>Aus  $\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(L) = 0$  folgt gemäß (2.8)  $\psi + ikL = 0 \pmod{i\pi}$  und somit

$$\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h) = -i \langle \mu \rangle \hat{c} \tan(k(L - h)) \quad \forall h \in [0, L].$$

<sup>15</sup>Dieser Fall ist (näherungsweise) bei der gedackten Orgelpfeife und der Klarinette, die deshalb jeweils um eine Duodezim ‘überbläst’, realisiert, sowie bei Panflöte, Dudelsack-Baßpfeifen, Krummhorn. Bzgl. tatsächlicher Bohrungen hochwertiger Klarinetten siehe (Gibson, 1994, Abschnitt 9).

<sup>16</sup>Dieser Fall ist (näherungsweise) bei der Querflöte, die deshalb jeweils um eine Oktav ‘überbläst’, realisiert, sowie vielfach bei Blockflöten und Orgelpfeifen.

sich das relativ leicht berechnen (siehe Anhang A.4):<sup>17</sup>

$$\mathcal{Z}^F = \hat{c} \langle \mu \rangle \left( 1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} - i \frac{\mathbf{H}_1(2kR)}{kR} \right). \quad (2.12)$$

Näherungsweise gilt:<sup>18</sup>

$$1 - 2 \frac{J_1(w)}{w} \approx \begin{cases} \frac{w^2}{8} & \text{für } w < 0.5, \\ 1 & \text{für } w > 5. \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}_1(w) \approx \begin{cases} \frac{2w^2}{3\pi} & \text{für } w < 1, \\ \frac{2}{\pi} & \text{für } w > 12. \end{cases}$$

Wenn der Rohrdurchmesser klein gegenüber der Wellenlänge ist, dann stimmt also  $\mathcal{Z}^F$  in guter Näherung mit der Impedanz an der Stelle  $h = L$  für ein ideal offenes Rohr der *effektiven Länge*  $L + \Delta^F$  überein, wobei

$$\Delta^F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8R}{3\pi} \approx 0.85 R.$$

**Begründung:** Aus (2.12)/(2.13) folgt

$$\mathcal{Z}^F \approx -i \hat{c} \langle \mu \rangle \frac{8}{3\pi} kR \quad \text{für } kR < 0.25.$$

Entsprechend Fußnote 14 (mit  $L + \Delta^F$  statt  $L$ ) gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{k\hat{c}}(h) &= -i \langle \mu \rangle \hat{c} \tan(k(L + \Delta^F - h)) \\ &\approx -i \hat{c} \langle \mu \rangle k \Delta^F \quad \text{für } h = L \text{ und } kR \ll 1 \end{aligned}$$

für ein bei  $h = L + \Delta^F$  ideal offenes Rohr. Die Bedingung

$$\mathcal{Z}_{k\hat{c}}(L) \approx \mathcal{Z}^F \quad \text{für } kR \ll 1$$

ist also mit  $\Delta^F = \frac{8}{3\pi} R$  erfüllt. ■

Version vom 21. November 2009

<sup>17</sup>Es gelten die Reihenentwicklungen

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (n+s)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}$$

für die BESSEL-Funktionen und

$$\mathbf{H}_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^{n+1}}{\Gamma(n+3/2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu \nu!}{(2\nu+1)!} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \frac{2^{n+\nu} (n+\nu)!}{(2n+2\nu+1)!} (-1)^\nu z^{2\nu}$$

(beachte:  $\Gamma(n+3/2) = \frac{(2n+1)!}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ ) für die STRUVESchen Funktionen (siehe (Magnus et al., 1966, Sect. 3.10.3)).

<sup>18</sup>Die Abweichungen vom tatsächlichen Wert betragen weniger als 10%.

Die komplizierte Berechnung der Röhre ohne Flansch (siehe (Levin und Schwinger, 1948)) zeigt, daß für kleines  $kR$  die Abschlußresistanz tatsächlich nur halb so groß ist und  $\Delta^F$  durch

$$\Delta^0 \approx 0.61 R$$

zu ersetzen ist.<sup>19</sup>

### 2.1.3 Dämpfung und Kompliziertere Schwingungsmoden

Außerdem erleidet eine Schallwelle natürlich Energieverlust. Hauptursachen sind Viskosität, Wärmeleitung und Energieaustausch zwischen Molekülen. In Musikinstrumenten bleiben die Dämpfungseffekte aber i.w. auf eine  $\approx 0.1$  mm starke Grenzschicht an den Wandungen des Instruments beschränkt, die mit wachsender Frequenz immer dünner wird (siehe (Fletcher und Rossing, 1991, Gl. (6.44))). Dieser (geringfügige) Verlust ließe sich durch einen Dämpfungsfaktor beschreiben (siehe (Fletcher und Rossing, 1991, S. 149 unten)). Im Falle ebener Wellen multipliziert man die einlaufende resp. reflektierte Welle mit einem Faktor

$$e^{-\lambda h} \quad \text{resp.} \quad e^{+\lambda h}$$

( $\lambda > 0$ ), was darauf hinausläuft, daß man in (2.8) einen linear von  $h$  abhängigen Realteil  $\Re(\psi)$  zuläßt.<sup>20</sup>

$$\psi = \psi_0 - \lambda h. \quad (2.14)$$

Außerdem ist die Phasengeschwindigkeit entsprechend abzusenken:

$$\omega = k\check{c}; \quad \check{c} < \hat{c}$$

(vgl. (Fletcher und Rossing, 1991, Sect. 8.2)). Aus den Polstellen resp. Nullstellen von  $\mathcal{Z}_{k\check{c}}(0)$  werden durch diese Korrekturen  $k$ -Werte, an denen  $|\mathcal{Z}_{k\check{c}}(0)|$  nur noch (lokal nahezu) maximal resp. minimal,  $\mathcal{Z}_{k\check{c}}(0)$  aber reell ist (Beweis als Übungsvorschlag, vgl. (Fletcher und Rossing, 1991, Sect. 8.5)).

In A.3 wird gezeigt, daß die allgemeinste (komplexe) Lösung der Wellengleichung (A.15) eine Überlagerung monochromatischer Wellen der Form (A.28)/(A.30) ist. Da die HANKELschen Funktionen  $H_n^{(j)}$  durch die BESSEL-Funktionen  $J_n$  und die NEUMANNschen Funktionen  $N_n$  gemäß

$$H_n^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} J_n + iN_n, \quad H_n^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} J_n - iN_n$$

---

Version vom 21. November 2009

<sup>19</sup>Graphische Darstellungen der  $kR$ -Abhängigkeit der Abschlußimpedanz findet man z.B. in (Fletcher und Rossing, 1991, S. 181/182).

<sup>20</sup>Man beachte allerdings, daß  $\lambda$  proportional zu  $|\omega|^{1/2}$  ist!

definiert sind (siehe (Jahnke et al., 1960, S. 141)) und die  $N_n(z)$  für  $z \rightarrow 0$  divergieren (siehe (Jahnke et al., 1960, S. 141)), ist die allgemeinste gutartige monochromatische Lösung von (A.15) zur Kreisfrequenz  $\omega$  über ganz  $\mathbb{R}$  eine Überlagerung von Wellen der Form

$$J_m(k_\rho \rho) e^{-i(\omega t - k_h h - m\varphi)}, \quad k_\rho^2 + k_h^2 = \left(\frac{\omega}{\hat{c}}\right)^2, \quad (2.15)$$

Innerhalb der Röhre gilt diese Aussage mit folgenden Änderungen:

1. Die  $k_h$  dürfen auch rein imaginär sein.
2. Es kommen nur solche  $k_\rho$  in Betracht, für die die Randbedingungen<sup>21</sup>

$$J'_m(k_\rho R) = 0 \quad \text{für ideal schallharte Rohrwandungen}$$

erfüllt sind, also nur diskrete  $k_\rho = k_{m0}, k_{m1}, k_{m2}, \dots$ , die sich den Tabellen für BESSEL-Funktionen (approximativ) entnehmen lassen:

$$\begin{aligned} k_{00} R &= 0, & k_{01} R &\approx 3.80, & \dots \\ k_{10} R &\approx 1.84, & k_{11} R &\approx 5.33, & \dots \\ k_{10} R &\approx 3.05 & & \dots \\ k_{30} R &\approx 4.20 & & \dots \\ k_{mn} R &\approx n + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} & & \text{für } n \gg 1. \end{aligned}$$

**Beweisskizze:** Für beliebige  $f, g$  aus

$$\{f \in C^2([0, R], \mathbb{C}) : f'(R) = 0\} \subset L^2([0, R], \rho \, d\rho)$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_0^R \overline{g(\rho)} \left( f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) \right) \rho \, d\rho &= + \int_0^R \overline{g(\rho)} (\rho f'(\rho))' \, d\rho \\ &= - \int_0^R \overline{g'(\rho)} f'(\rho) \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\hat{A}_m \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{d}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \frac{m}{\rho} \right)^2$$

auf dem Definitionsbereich  $\{f \in C^2([0, R], \mathbb{C}) : f'(R) = 0\}$  symmetrisch und nicht positiv:

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{A}_m f \rangle &= \int_0^R \overline{f(\rho)} \left( f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) - \left( \frac{m}{\rho} \right)^2 f(\rho) \right) \rho \, d\rho \leq 0 \\ &\quad \forall f \in \{f \in C^2[0, R] : f'(R) = 0\}. \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Bzgl. realistischerer Randbedingungen siehe (Morse, 1948, S. 305-307).

Damit läßt sich zeigen, daß die Eigenzustände von  $\hat{A}_m$  ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Wenn aber  $f_\lambda(\rho) = f(\lambda\rho)$  ein Eigenzustand von  $\hat{A}_m$  zum Eigenwert  $-\lambda^2 \geq 0$  ist, also der Differentialgleichung

$$\hat{A}_m f_\lambda(x) = -\lambda^2 f_\lambda(x)$$

genügt, dann genügt  $f$  der BESSELSchen Differentialgleichung (A.29), ist also eine Linearkombination von  $J_m$  und  $N_m$ . Da die NEUMANNschen Funktionen für  $\rho \rightarrow 0$  divergieren, muß also  $f_\lambda(\rho) \sim J_m(\lambda\rho)$  sein. Für jedes  $m \in \mathbb{Z}_+$  bilden also die Funktionen

$$f_{m,n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} J_m(k_{mn} x)$$

( $n \in \mathbb{Z}$ ) ein vollständigen Orthogonalsystem von  $L^2([0, R], \rho d\rho)$ . Mithilfe FOURIERScher Reihen- resp. Integralentwicklung<sup>22</sup> hinsichtlich  $\varphi$  resp.  $t$  und Entwicklung nach den  $f_{m,n}$  hinsichtlich  $\rho$  läßt sich die Behauptung leicht beweisen. ■

Für  $\omega^2 < \hat{c}^2 k_\rho^2$  wird  $k_h$  imaginär, so daß die Welle (2.15) in entsprechender Richtung exponentiell abfällt. Für die Schwingungsmoden (2.15) mit  $(m, n) \neq (0, 0)$  ist das der Fall, sobald  $R$  kleiner als

$$R_c \stackrel{\text{def}}{=} 1.84 \frac{\hat{c}}{\omega} = \frac{1.84}{2\pi} \hat{\lambda}_\omega \approx 0.293 \hat{\lambda}_\omega$$

ist, wobei  $\hat{\lambda}_\omega$  die freie Wellenlänge zur Kreisfrequenz  $\omega$  bezeichnet. Sie dienen der Anpassung des akustischen Flusses an lokale Gegebenheiten (z.B. Fingerlöcher, Mundstück usw.) und können für Blasinstrumente weitgehend unberücksichtigt bleiben.

## 2.2 Hörner

Unter einem **Horn** sei stets eine seitlich geschlossene Führung verstanden, deren (variable) Querschnittsausdehnung klein gegenüber der Länge ist.

### 2.2.1 Die WEBSTER-Gleichung

Eine zylindrische Bohrung (Rohr) der Länge  $L$  mit dem Radius  $R$  ergibt sich als Grenzfall

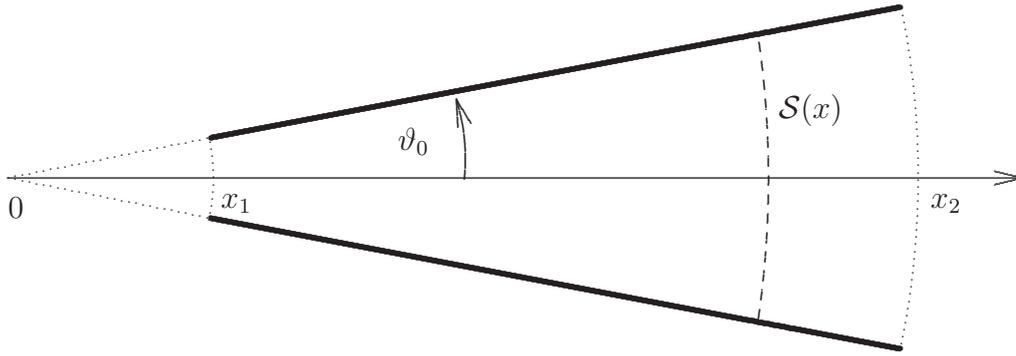
$$x_2 - x_1 = L, \quad \vartheta_0 x_1 = R, \quad x_1 \rightarrow \infty$$

der in Abb. 2.1 skizzierten konischen Bohrung.<sup>23</sup>

Version vom 21. November 2009

<sup>22</sup>Die FOURIERSche Integraltransformation ist im allgemeinen Fall eigentlich im distributions-theoretischen Sinne zu verstehen.

<sup>23</sup>Ausgeprägt konische Bohrung haben Oboe, Fagott, Saxophon, Schalmel, Kornett, Serpent, Tarogato, schottische Tenor-Dudelsackpfeife. Natürlich treten am Eingang und am Ende des Horns stets Abweichungen auf.

Abb. 2.1: Konische Bohrung im Längsschnitt<sup>24</sup>

In diesem Sinne sind Ergebnisse für allgemeine konische Bohrunge auch auf zylindrische Bohrunge anwendbar.<sup>25</sup> Für Schallschwingungen in der konischen Bohrung gilt die **WEBSTER-Gleichung**<sup>26</sup>

$$\frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \frac{\partial}{\partial x} \left( |\mathcal{S}(x)| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \right) = \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{P}(x, t), \quad (2.16)$$

zusammen mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(x, t) = -\frac{1}{\langle \mu \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t), \quad (2.17)$$

**wenn** die Normalkomponente des Schalldruckgradienten auf der Hornwandung verschwindet,<sup>27</sup> wobei

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(x)| &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt des } x \text{ entsprechenden} \\ \text{(orientierten) Kugelflächenausschnitts } \mathcal{S}(x), \end{array} \right. \\ \mathcal{P}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{über } \mathcal{S}(x) \text{ gemittelter} \\ \text{komplexer Schalldruck zur Zeit } t, \end{array} \right. \\ \mathcal{U}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{über } \mathcal{S}(x) \text{ gemittelte Normalkomponente der} \\ \text{komplexen Schallschnelle zur Zeit } t. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Beweisskizze:** Wenn wir mit  $\mathcal{G}_{x,\epsilon}$  jeweils das geschlossene Gebiet bezeichnen, das von<sup>28</sup>  $-\mathcal{S}(x)$ ,  $\mathcal{S}(x + \epsilon)$  und einem entsprechenden Stück der Hornfläche berandet

Version vom 21. November 2009

<sup>24</sup>Bei den druckgesteuerten Blasinstrumenten wird der Schall am engeren, bei der Barockflöte dagegen am offeneren Ende angeregt.

<sup>25</sup>Siehe dazu z.B. (Ayers et al., 1985, Fig. 4).

<sup>26</sup>Bzgl. der ursprünglichen Interpretation siehe (Webster, 1919).

<sup>27</sup>Gemäß (A.12) ist das für ideal schallharte Hornwände garantiert.

<sup>28</sup>Wir benutzen die Schreibweise von (Lücke, ein).

wird, dann können wir schließen:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{P}(x, t) \\
&= \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dS_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.35), (1.38)}{=} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dS_{\mathbf{x}'} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon |\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{G}_{x, \epsilon}} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dV_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon |\mathcal{S}(x)|} \int_{\partial \mathcal{G}_{x, \epsilon}} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&= \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{\mathcal{S}(x+\epsilon)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} - \int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \right).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} &= \left( \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{P}(r, \vartheta, \varphi, t) \right) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right) \Big|_{r=x} \\
&= \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathcal{P}(r, \vartheta, \varphi, t) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right) \Big|_{r=x} \\
&= |\mathcal{S}(x)| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

folgt daraus (2.16). (2.17) folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \mathcal{U}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.37)}{=} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{D}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.35)}{=} \hat{c}^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{D}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.36)}{=} \hat{c}^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} (\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{x}', t)) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.38)}{=} -\hat{c}^2 \langle \kappa \rangle \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} (\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t)) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.23), (2.19)}{=} -\frac{1}{\langle \mu \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß die Gleichungen (2.16) und (2.17) mit (2.18) näherungsweise auch für allgemeinere Hornformen, wie z.B. in Abbildung 2.2 skizziert, gelten, solange die Führung rotationssymmetrisch, schallhart und nicht zu stark gekrümmt ist.

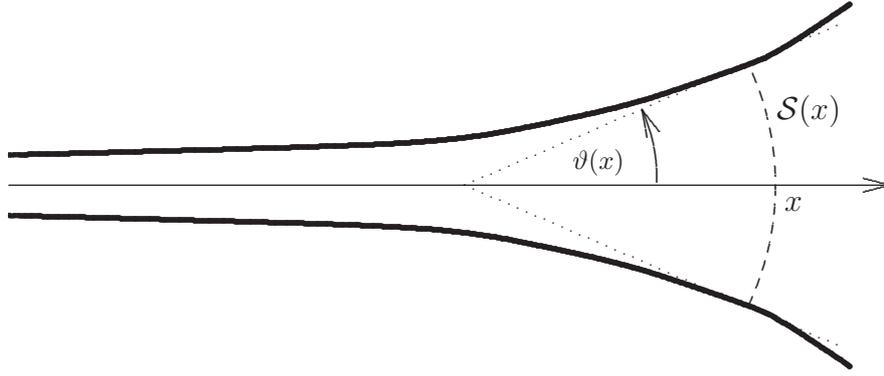


Abb. 2.2: Typische Hornform (Längsschnitt)

**Anmerkung:** Daß exakte Lösungen existieren, für die der Schalldruck im Horninneren auf den Flächen  $\mathcal{S}(x)$  konstant ist, ist nur dann zu erwarten, wenn die Wellengleichung (A.15) (bzw. die HELMHOLTZ-Gleichung (A.32)) in orthogonalen Koordinaten, die diesen Flächen angepaßt sind, separierbar ist. Diese wenigen Koordinatensysteme sind z.B. in (Morse und Feshbach, 1953, Sect. 5.1), (Kratzer und Franz, 1960, §3) und (Moon und Spencer, 1961, Sect. I) abgehandelt.

Mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\mathcal{S}(x)|} \mathcal{P}(x, t) \quad (2.20)$$

und dem effektiven Radius

$$a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|\mathcal{S}(x)|}{\pi}} \quad (2.21)$$

von  $\mathcal{S}(x)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{S}|} \frac{\partial}{\partial x} \left( |\mathcal{S}| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \right) &= \frac{1}{a^2 \pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \pi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Psi}{a \sqrt{\pi}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{a^2 \sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial}{\partial x} \Psi - a' \Psi \right) \\ &= \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi - \frac{a''}{a} \Psi \right). \end{aligned}$$

Die WEBSTER-Gleichung ist also äquivalent zu

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi(x, t) - \frac{a''(x)}{a(x)} \Psi(x, t) = \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi(x, t)$$

bzw., im monochromatischen Falle

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-ik\hat{c}t},$$

zu<sup>29</sup>

$$\boxed{\Psi''(x) + \left(k^2 - \frac{a''(x)}{a(x)}\right) \Psi(x) = 0.} \quad (2.22)$$

Eine reellwertige Funktion  $f(x)$  ist streng **konvex** resp. **konkav**, wenn  $f''(x) > 0$  resp.  $f''(x) < 0$  (vgl. Abschn. 3.1.2.1 von (Lücke, mech)). Eine **reelle** Lösung von (2.22) ist also genau dann streng konvex resp. konkav, wenn die **Hornfunktion**

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a''(x)}{a(x)}$$

größer resp. kleiner als  $k^2$  ist.<sup>30</sup> Dementsprechend bezeichnet man  $\hat{c} \sqrt{F(x)}$  im Falle  $F(x) > 0$  als **Abschneidekreisfrequenz** an der Stelle  $x$ .

### 2.2.2 Spezielle Hornformen

Lösungen von (2.16) in Form fortschreitender Wellen

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{S}(x)|}} e^{-ik(\hat{c}t - \varphi(x))}, \quad 0 \neq \varphi'(x) \text{ reell,}$$

können nur dann existieren, wenn das zugehörige

$$\Psi(x) = \mathcal{A} e^{ik\varphi(x)}$$

der Gleichung (2.22),  $\varphi(x)$  also der Gleichung

$$ik\varphi''(x) - \left(k\varphi'(x)\right)^2 + \left(k^2 - \frac{a''(x)}{a(x)}\right) = 0 \quad (2.23)$$

genügt. Aus dem Verschwinden des Imaginärteils von (2.23) folgt zunächst

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x) = \text{const.} \neq 0 \quad (2.24)$$

und damit aus dem Verschwinden des Realteils von (2.23)

$$F(x) = \frac{a''(x)}{a(x)} = k^2(1 - \tau^2).$$

Version vom 21. November 2009

<sup>29</sup>Man beachte, daß (2.22) die gleiche Struktur hat wie die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V(x)\right) \Psi(x) = E \Psi(x).$$

<sup>30</sup>Man beachte, daß  $1/F(x)$  für geringe Neigung der Hornmeridiane näherungsweise mit dem äußeren Krümmungsradius der Hornwandung an der  $x$  entsprechenden Stelle übereinstimmt.

Fortschreitende Wellen o.a. Form existieren also nur für<sup>31</sup>

$$k^2 > m^2 \stackrel{\text{def}}{=} F(x) = \text{const.}$$

Für kleinere  $k^2$  gehen diese Lösungen<sup>32</sup>

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{S}(x)|}} e^{-i(k\hat{c}t \mp \sqrt{k^2 - m^2} x)}$$

von (2.16) in (in Energiestromrichtung) gedämpfte stehende Wellen über, im Einklang mit der Schlußbemerkung von 2.2.1.

**Spezialfälle konstanter Hornfunktion**  $F(x) = m^2$  :

1. **Konische Hörner** sind durch  $m = 0$  definiert.<sup>33</sup> Hier existieren Konstanten  $x_0, \vartheta_0$  mit

$$a(x) = (x + x_0) \tan \vartheta_0. \quad (2.25)$$

2. **Exponentielle Hörner** sind durch

$$m \neq 0, \quad a(x) = a_0 e^{mx} \quad \text{für geeignetes } a_0 > 0 \quad (2.26)$$

definiert.

3. **Katenoidale Hörner** sind durch

$$m \neq 0, \quad a(x) = a_0 \cosh(mx) \quad \text{für geeignetes } a_0 > 0$$

definiert.<sup>34</sup>

Exponentielle und katenoidale Hörner eignen sich oberhalb der Abschneidefrequenz gut für Lautsprecher.

Eine weitere Klasse von Hörnern, für die sich (2.22) explizit lösen läßt, ist durch die Bedingung<sup>35</sup>

$$a(x) = b x^{-\epsilon}, \quad 0 \neq \epsilon \neq -1, \quad (2.27)$$

mit geeigneten Konstanten  $b, \epsilon$  gegeben. Hier gilt

$$F(x) = \frac{(\epsilon + 1)\epsilon}{x^2}$$

<sup>31</sup>Für  $F < 0$  wäre  $a(x)$  konkav.

<sup>32</sup>Man beachte die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von  $m$ .

<sup>33</sup>Für sie gibt es keine Abschneidefrequenz.

<sup>34</sup>Hier ist glatter zylindrischer Anschluß bei  $x = 0$  möglich.

<sup>35</sup>Für  $\epsilon \rightarrow 0$  geht das Horn in eine zylindrische Röhre, für  $\epsilon \rightarrow -1$  in ein konisches Horn über.

und somit für

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}}$$

gemäß (2.22)

$$\Phi''(x) + \frac{1}{x} \Phi(x) + \left( k^2 - \frac{(\epsilon + 1/2)^2}{x^2} \right) \Phi(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (2.22) für diesen Fall ist also<sup>36</sup>

$$\Psi(x) = \mathcal{A} \sqrt{x} J_{\epsilon+1/2}(kx) + \mathcal{B} \sqrt{x} N_{\epsilon+1/2}(kx). \quad (2.28)$$

Deshalb bezeichnet man die durch (2.27) charakterisierten Hörner als **BESSEL-Hörner**. Sie sind geeignet zur Approximation von Schallführungsteilen, die bei Blasinstrumenten – insbesondere bei den Schallbechern – tatsächlich realisiert sind. Z.B. sind die meisten Blechblasinstrumente etwa über die Hälfte ihrer Länge zylindrisch und gehen danach in ein Horn über, das bei modernen Instrumenten nahezu von BESSELSchem Typ ist.<sup>37</sup> Flügelhorn, Althorn, Tenorhorn und Tuba sind allerdings, von einem zylindrischen Mittelstück und dem Schallbecher abgesehen, konisch.

Durch schnelle Weitung des Schallbeckers (*Stürze*) läßt es sich erreichen, daß die wesentlichsten Frequenzen im Schallbecher gedämpft und folglich (aufgrund der Energieerhaltung) stark genug reflektiert werden, um gute Resonanz zu ermöglichen, während ein angemessener Teil der Schallenergie abgestrahlt wird ('Tunneleffekt').

### 2.2.3 Störungsrechnung

Im folgenden benutzen wir die vereinfachte Schreibweise

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{S}(x)|.$$

Für monochromatische Schalldruckwellen

$$\mathcal{P}(x, t) = \mathcal{P}(x) e^{-ikct}$$

ist die WEBSTER-Gleichung (2.16) dann äquivalent zu dem Eigenwertproblem

$$\hat{A}_S \mathcal{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) = -k^2 \mathcal{P}(x), \quad (2.29)$$

Version vom 21. November 2009

<sup>36</sup>Für halbzahliges  $\nu$  sind  $J_\nu$  und  $N_\nu$  elementare Funktionen, z.B.:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad N_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

(siehe z.B. (Jahnke et al., 1960, S. 142)).

<sup>37</sup>Bei älteren Instrumenten ist der Hornteil fast über seine gesamte Länge konisch.

dessen Formulierung durch Angabe der physikalischen Randbedingungen zu ergänzen ist. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß das Horn bei  $x = x_1$  und  $x_2$  entweder ideal offen oder ideal geschlossen sei.<sup>38</sup> Gemäß (2.17) müssen dann

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$$

existieren, für die  $\mathcal{P}(x)$  in dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{A}_S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathcal{P}(x) \in C^2([x_1, x_2], \mathbb{C}) : \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha_j} \mathcal{P}(x_j) = 0 \text{ für } j = 1, 2 \right\}$$

liegt, bzgl. dessen  $\hat{A}_S$  ein symmetrischer Operator in  $L^2([x_1, x_2], S(x)dx)$  ist:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} \frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) S(x) dx \\ &= \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) dx \\ &= \left( \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) - \frac{d}{dx} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \mathcal{P}(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \overline{\left( S(x) \frac{d}{dx} \hat{\mathcal{P}}(x) \right)} \mathcal{P}(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{|S(x)|} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \hat{\mathcal{P}}(x) \right) \mathcal{P}(x) |S(x)| dx \quad \forall \hat{\mathcal{P}}, \mathcal{P} \in D_{\hat{A}_S}. \end{aligned}$$

Damit läßt sich die übliche quantenmechanische Störungsrechnung anwenden:

Sei  $\mathcal{P}(x)$  der räumliche Anteil einer monochromatischen Lösung der WEBSTER-Gleichung, die die vorgeschriebenen Impedanzwerte aufweist, zur Wellenzahl  $k$ . Die geringfügige Variation  $S \mapsto S + \delta S$  der Hornwandung bewirke die Verschiebung

$$\mathcal{P}(x) \mapsto \mathcal{P}(x) + \delta \mathcal{P}(x), \quad k \mapsto k + \delta k.$$

Zusätzlich zu (2.29) gelte also die Gleichung

$$\left( \hat{A}_S + \delta \hat{A} \right) (\mathcal{P} + \delta \mathcal{P}) = - (k + \delta k)^2 (\mathcal{P} + \delta \mathcal{P}), \quad \delta \hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}_{S+\delta S} - \hat{A}_S, \quad (2.30)$$

d.h.

$$\left( \hat{A}_S + k^2 \right) \delta \mathcal{P} + (\delta \hat{A}) \mathcal{P} = -2k\delta k \mathcal{P} + \text{Terme höherer Ordnung in den Variationen.} \quad (2.31)$$

Da  $\hat{A}$  symmetrisch ist, folgt aus (2.29)

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( (\hat{A}_S + k^2) \delta \mathcal{P} \right) (x) S(x) dx = 0$$

<sup>38</sup>Dabei spielt es keine Rolle, ob das Horn wirklich über den gesamten Bereich  $x_1 \leq x \leq x_2$  realisiert oder nur effektiv fortgesetzt gedacht ist.

und damit aus (2.31)

$$\delta k \approx - \frac{\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( \delta \hat{A} \mathcal{P} \right) (x) S(x) dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 |S(x)| dx},$$

was wegen

$$\begin{aligned} \delta \hat{A} &= - \frac{\delta S}{S^2} \frac{d}{dx} S \frac{d}{dx} + \frac{1}{S} \frac{d}{dx} (\delta S) \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \\ &= \frac{1}{S} \left[ \frac{d}{dx}, \frac{\delta S}{S} \right] S \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \\ &= \left( \frac{d}{dx} \frac{\delta S}{S} \right) \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned} \delta k &\approx - \frac{\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{\delta S(x)}{S(x)} \right) \mathcal{P}'(x) |S(x)| dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 S(x) dx} \\ &= \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta S(x)}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \overline{\mathcal{P}(x)} \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 S(x) dx}, \text{ falls } \delta S(x_1) = \delta S(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

liefert.<sup>39</sup>

Als Beispiel sei eine bei  $x_1 = 0$  ideal geschlossene, bei  $x_2 = L$  ideal offene zylindrische Röhre betrachtet, deren Durchmesser um  $x = L/3$  herum variiert werde. Wegen  $S' = 0$  vereinfacht sich (2.32) hier zu

$$\delta k \approx \frac{\int_0^L \delta S(x) \frac{d}{dx} \left( \overline{\mathcal{P}(x)} \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) dx}{2k \int_0^L |\mathcal{P}(x)|^2 S(0) dx}.$$

Die ungestörten Eigenschwingungen sind entsprechend Übungsaufgabe 5 durch

$$\mathcal{P}(x, t) \sim \cos(k_n x) e^{\mp i k_n \hat{c} t}, \quad k_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

gegeben, woraus

$$\delta k_n \approx - \frac{\int_0^L \frac{\delta |S(x)|}{S(0)} k_n^2 \cos(2k_n x) dx}{2k_n \int_0^L \cos^2(k_n x) dx}$$

folgt. Wegen  $\cos(\pi/3) = 1/2$  erniedrigt sich also der Betrag der Wellenzahl der Grundschwingung ( $n = 1$ ) bei Erweiterung der Röhre um  $x = L/3$  herum. Dagegen erhöht sich der Betrag der Wellenzahl der ersten Oberschwingung ( $n = 2$ ) wegen  $\cos(\pi) = -1$ .

<sup>39</sup>Man sieht leicht, daß  $\mathcal{P}(x)$  bei den vorgegebenen Randbedingungen das Vielfache einer reellwertigen Funktion sein muß.

**Übungsaufgabe 6** Man diskutiere die Variation von  $S(x)$  an anderen Stellen der Röhre.

## 2.3 Akustische Komponenten

### 2.3.1 Akustische Vierpole

Im Hinblick auf die KIRCHHOFFSchen Gesetze für elektrische Ersatzschaltungen (siehe (Beranek, 1954)) verwenden wir im folgenden die *akustische Impedanz*

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{P}}{S\mathcal{U}}, \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \text{Flächeninhalt der entspr. Wellenfront},$$

anstelle der spezifischen akustische Impedanz  $\mathcal{Z}$  und entsprechend den *akustischen Fluß*

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} S\mathcal{U}$$

anstelle der Schnelle  $\mathcal{U}$ .

Wir betrachten zunächst nur den monochromatischen Fall. Da die WEBSTER-Gleichung (2.16) dann eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\mathcal{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(x, 0)$  entspricht und  $\mathcal{J}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}(x, 0) \sim S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x)$  gilt, hängen  $\mathcal{P}(x_2)$  und  $\mathcal{J}(x_2)$  jeweils linear von  $\mathcal{P}(x_1)$  und  $\mathcal{J}(x_1)$  ab, d.h. es existiert eine *akustische Kettenmatrix*  $\hat{M}_{k\hat{c}}(x_1, x_2)$  mit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(x_1) \\ \mathcal{J}(x_1) \end{pmatrix} = \hat{M}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \mathcal{P}(x_2) \\ \mathcal{J}(x_2) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

und dafür gilt offensichtlich

$$\hat{M}(x_1, x_2) \hat{M}(x_2, x_3) = \hat{M}(x_1, x_3). \quad (2.34)$$

Daher läßt sich ein Horn nach beliebiger Unterteilung in Abschnitte als akustische Vierpolkette auffassen. Das erleichtert die Berechnung von Hörnern, deren Verhalten für die einzelnen Teilabschnitte<sup>40</sup> bekannt ist.

<sup>40</sup>Durch hinreichend genaue Approximation der Hornmeridiane durch Polygone ergibt sich z.B. eine brauchbare Ersatzdarstellung als akustische Vierpolkette, deren Glieder konische Hörner sind und deren Kettenmatrix in 2.3.2 bestimmt wird.

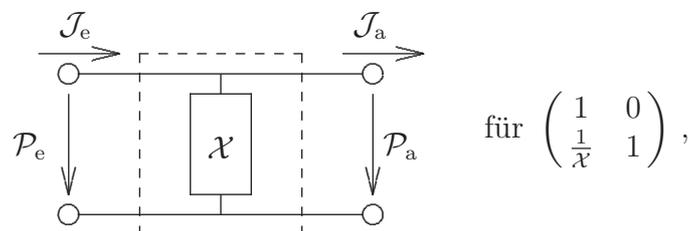
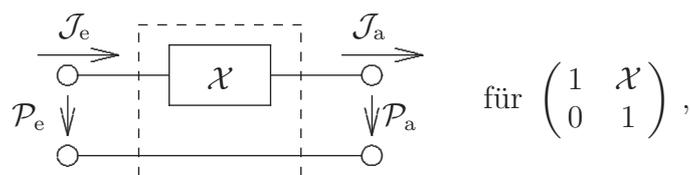
**Übungsaufgabe 7** Man zeige, daß die akustische Kettenmatrix des in 2.1 untersuchten zylindrischen Rohres durch

$$\begin{aligned} \hat{M}(h)^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(kh) & i\frac{\hat{c}(\mu)}{\pi R^2} \sin(kh) \\ i\frac{\pi R^2}{\hat{c}(\mu)} \sin(kh) & \cos(kh) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{c}(\mu)}{\pi R^2} \end{pmatrix}^{-1} e^{ikh \hat{\sigma}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{c}(\mu)}{\pi R^2} \end{pmatrix} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \begin{pmatrix} 1 & \frac{ikh \hat{c}(\mu)}{N \pi R^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{ikh \pi R^2}{N \hat{c}(\mu)} & 1 \end{pmatrix} \right)^N \end{aligned}$$

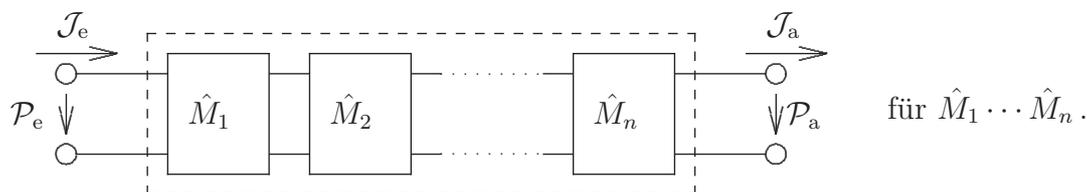
gegeben ist<sup>41</sup> ( $h \hat{=} x$ ), wobei

$$\hat{\sigma}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1. \text{ PAULI-Matrix}) .$$

Um die Analogie der **mathematischen** Struktur zu derjenigen der elektrischen Vierpole zu betonen, verwendet man die entsprechende graphische Darstellung, z.B.



und

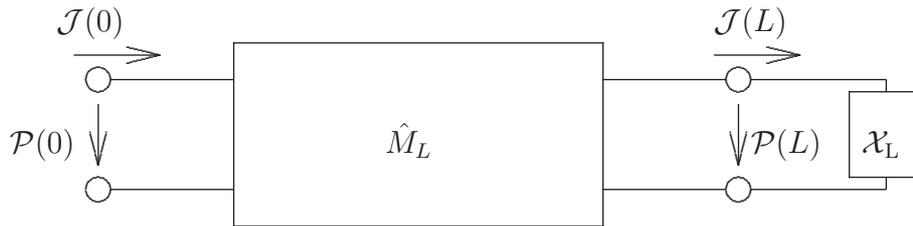


(vgl. Abschn. 3.2.1 von (Lücke, ftm)). Wenn die Abschlußimpedanz  $\mathcal{X}(L)$  eines

Version vom 21. November 2009

<sup>41</sup>Siehe auch (Ichinose und Tamura, 2001).

Horns mit  $x \in [0, L]$  festgelegt ist veranschaulicht man das gemäß



Die Eingangsimpedanz ist dann<sup>42</sup>

$$\mathcal{X}(0) = \frac{M(L)_{11}\mathcal{X}(L) + M(L)_{12}}{M(L)_{21}\mathcal{X}(L) + M(L)_{22}}. \quad (2.35)$$

### Übungsaufgabe 8

- (i) Man zeige, daß ein akustischer Vierpol genau dann **symmetrisch**, also invariant gegen Vertauschung von Ein- und Ausgang ist, wenn

$$M_{11} = M_{22} \quad \text{und} \quad \det \hat{M} = 1$$

(vgl. Übungsaufgabe 44 von (Lücke, ftm)).

- (ii) Man zeige, daß für (nicht triviale) symmetrische akustische Vierpole die Eingangsimpedanz genau dann mit der Ausgangsimpedanz übereinstimmt und endlich ist, wenn man mit dem **Wellenwiderstand**  $\sqrt{\frac{M_{12}}{M_{21}}}$  abschließt.
- (ii) Man bestimme und diskutiere den Wellenwiderstand für das zylindrische Rohr.

### 2.3.2 Die akustische Kettenmatrix strikt konischer Hörner

Für ein strikt konisches Horn gilt (2.22) mit  $a'' = 0$ , gilt also die allgemeine Lösung

$$\Psi(x) = \hat{\mathcal{A}}_+ e^{+ikx} + \hat{\mathcal{A}}_- e^{-ikx}.$$

Wenn die Kegelspitze bei  $x = 0$  liegt, folgt damit aus (2.20)

$$\mathcal{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ikct} \mathcal{P}(x, t) = \mathcal{A}_+ \frac{e^{+ikx}}{x} + \mathcal{A}_- \frac{e^{-ikx}}{x} \quad (2.36)$$

<sup>42</sup>Nach Übungsaufgabe 7 ist das für ein zylindrisches ‘Horn’ im Einklang mit (2.8).

mit geeigneten  $\mathcal{A}_\pm \in \mathbb{C}$  und daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} e^{ik\hat{c}t} \mathcal{U}(x, t) \\ &\stackrel{(2.17)}{=} \frac{1}{ik\hat{c}\langle\mu\rangle} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x) \\ &= \frac{1}{ik\hat{c}\langle\mu\rangle} \left( \frac{ik}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{+ikx} \mathcal{A}_+ - \frac{1}{ik\hat{c}\langle\mu\rangle} \left( \frac{ik}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-ikx} \mathcal{A}_- \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aus (2.37) folgt

$$\left( \frac{ik}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{+ikx} \mathcal{A}_+ = ik\hat{c}\langle\mu\rangle \mathcal{U}(x) + \left( \frac{ik}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-ikx} \mathcal{A}_-,$$

aus (2.36)

$$\mathcal{A}_- = x e^{ikx} \mathcal{P}(x) - \mathcal{A}_+ e^{2ikx}.$$

Beides zusammen liefert

$$\mathcal{A}_\pm = \left( \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2ik} \right) e^{\mp ikx} \mathcal{P}(x) \pm \frac{\hat{c}\langle\mu\rangle x}{2} e^{\mp ikx} \mathcal{U}(x) \quad \forall x > 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1) &\stackrel{(2.36)}{=} \left( \frac{L+x_1}{x_1} \cos(kL) - \frac{\sin(kL)}{kx_1} \right) \mathcal{P}(x_2) - i\hat{c}\langle\mu\rangle \frac{L+x_1}{x_1} \sin(kL) \mathcal{U}(x_2), \\ \hat{c}\langle\mu\rangle \mathcal{U}(x_1) &\stackrel{(2.37)}{=} -i \left( \left( \frac{L+x_1}{x_1} + \left( \frac{1}{kx_1} \right)^2 \right) \sin(kL) - \frac{L}{kx_1^2} \cos(kL) \right) \mathcal{P}(x_2) \\ &\quad + \hat{c}\langle\mu\rangle \frac{L+x_1}{x_1} \left( \cos(kL) + \frac{1}{kx_1} \sin(kL) \right) \mathcal{U}(x_2) \end{aligned}$$

für beliebige zum Hornabschnitt gehörige  $x_1, x_2 > 0$ , wobei  $L \stackrel{\text{def}}{=} x_2 - x_1$  (evtl. negativ). Die entsprechende akustische Kettenmatrix ist also<sup>43</sup>

$$\left( \begin{array}{cc} \left( \frac{x_2}{x_1} \cos(kL) - \frac{\sin(kL)}{kx_1} \right) & -i\hat{c}\langle\mu\rangle \frac{\sin(kL)}{\sqrt{S(x_1)S(x_2)}} \\ \frac{S(x_1)}{i\hat{c}\langle\mu\rangle} \left( \left( \frac{x_2}{x_1} + \left( \frac{1}{kx_1} \right)^2 \right) \sin(kL) - \frac{L}{kx_1^2} \cos(kL) \right) & \frac{x_1}{x_2} \left( \cos(kL) + \frac{1}{kx_1} \sin(kL) \right) \end{array} \right), \quad (2.38)$$

da

$$\frac{L+x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{S(x_2)}{S(x_1)}}.$$

Mit

$$l_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tan^{-1}(kx_j)}{k} \quad \text{für } j = 1, 2$$

<sup>43</sup>Im Grenzfall des zylindrischen Rohres ( $x_1 \rightarrow +\infty$ ) ergibt sich daraus wieder die akustische Kettenmatrix von Übungsaufgabe 7 (mit  $L$  statt  $h$ ).

gilt

$$\cos(kL) \pm \frac{\sin(kL)}{kx_j} = \pm \frac{\sin(k(L \pm l_j))}{\sin(kl_j)}$$

sowie

$$\left(1 + \frac{1}{kx_1 kx_2}\right) \sin(kL) + \left(\frac{1}{kx_2} - \frac{1}{kx_1}\right) \cos(kL) = \frac{\sin(k(L + l_1 - l_2))}{\sin(kl_1) \sin(kl_2)}$$

und somit gemäß (2.35)/(2.38):

$$\mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_1) = \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{S(x_1)} \frac{i \frac{\sin(k(L-l_2))}{\sin(kl_2)} \mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_2) - \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{S(x_2)} \sin(kL)}{-\frac{\sin(k(L+l_1-l_2))}{\sin(kl_1) \sin(kl_2)} \mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_2) - i \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{S(x_2)} \frac{\sin(k(L+l_1))}{\sin(kl_1)}}. \quad (2.39)$$

Hieraus folgt für  $x_1, x_2 > 0$ :

$$\mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_1) = -i \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{S(x_1)} \frac{\sin(k(x_2 - x_1)) \sin(kl_1)}{\sin(k(x_2 - x_1 + l_1))} \quad \text{für } \mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_2) = 0. \quad (2.40)$$

Daraus erkennt man:

1. Die für  $\mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_1) = \mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_2) = 0$  möglichen Wellenzahlen sind

$$k = n \frac{\pi}{x_2 - x_1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wie bei einem zylindrischen Rohr der Länge  $|x_2 - x_1|$  (vgl. Übungsaufgabe 5).

2. Die für  $\mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_1) = \infty$ ,  $\mathcal{X}_{k\hat{c}}(x_2) = 0$  möglichen Wellenzahlen sind<sup>44</sup>

$$k = \frac{n\pi - \tan^{-1}(kx_1)}{x_2 - x_1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(für  $x_2 < x_1$  ebenso wie für  $x_2 > x_1$ ).

Blasinstrumente mit konischer Bohrung überblasen deshalb in die Oktav. Wenn die Schwingungen am weiten Ende erregt werden, dann geschwindigkeitsgesteuert (geringe Eingangsimpedanz, wie bei der Barock-Blockflöte), wenn sie am (hinreichend kleinen) engeren Ende erregt werden, dann druckgesteuert<sup>45</sup> (große Eingangsimpedanz, wie bei Oboe, Fagott und Saxophon).

Version vom 21. November 2009

<sup>44</sup>Da das konische Hornstück für  $x_1 \rightarrow \infty$  in ein zylindrisches Rohrstück übergeht, ist das im Einklang mit der entsprechenden Aussage in Übungsaufgabe 5.

<sup>45</sup>Weil die Schallschnelle bei verschwindender Eingangsimpedanz im Grenzübergang zum (ungedämpften) *vollständigen* Horn (Eingangsquerschnitt  $\rightarrow 0$ ) divergiert (wenn die stehende Welle bei diesem Grenzübergang nicht verschwindet) (Ayers et al., 1985, Fig. 4).

### 2.3.3 Spezielle akustische Komponenten

Eine akustische **Kapazität**<sup>46</sup>

$$\mathcal{X}_\omega = -\frac{1}{i\omega C}, \quad C > 0,$$

stellen wir graphisch detaillierter durch



eine akustische **Induktivität**

$$\mathcal{X}_\omega = -i\omega I, \quad I > 0,$$

durch



und eine akustische Resistanz

$$\mathcal{X}_\omega = R, \quad R > 0,$$

durch



dar. Z.B. gilt nach (2.10) für ein ideal schallhart abgeschlossenes zylindrisches Rohr mit dem Radius  $R$  und der Länge  $L \ll 1/k$

$$\mathcal{X}_\omega(0) \approx -\frac{1}{i\omega \frac{L}{\langle \mu \rangle c^2} \pi R^2},$$

es kann also näherungsweise als akustische Kapazität  $C = \frac{\pi R^2 L}{\langle \mu \rangle c^2} = \langle \kappa \rangle \pi R^2 L$  und

aufgrund dieses Wertes als Luftfeder mit dem Luftvolumen  $\pi R^2 L$  vorstellen, die sich entsprechend der Kompressibilität  $\langle \kappa \rangle$  auf den angreifenden Druck einstellt.<sup>47</sup>

Entsprechend folgt aus (2.11) für ein ideal offen<sup>48</sup> 'abgeschlossenes' zylindrisches Rohr mit dem Radius  $R$  und der Länge  $L \ll 1/k$

$$\mathcal{X}_\omega(0) \approx -i\omega \frac{\langle \mu \rangle L}{\pi R^2}.$$

Man kann es sich also näherungsweise als akustische Induktivität  $I = \frac{\langle \mu \rangle L}{\pi R^2}$  und aufgrund dieses Wertes als starre Masse vorstellen, die sich im Sinne von NEWTON unter

Version vom 21. November 2009

<sup>46</sup>Man beachte, daß wir die periodische Zeitabhängigkeit durch  $e^{-i\omega t}$  statt  $e^{+i\omega t}$  beschreiben.

<sup>47</sup>Deshalb wird im Englischen auch die Bezeichnung *compliance* für akustische Kapazität verwendet.

<sup>48</sup>Man beachte die Ausführungen zu effektiven Rohrlänge am Schluß von 2.1.2.

dem Einfluß der aus den Druckverhältnissen resultierenden Gesamtkraft bewegt.<sup>49</sup> Eine akustische Resistanz läßt sich näherungsweise durch ein mit einem Glaswollpfropfen versehenes Rohrstück realisieren, bzw. als Parallelschaltung extrem dünner Rohre vorstellen, in denen die Luftbewegung bei gegebenem Druck i.w. nur durch die Viskosität bestimmt wird.

**Übungsaufgabe 9** Man zeige, daß sich ein zylindrisches Rohr gemäß Übungsaufgabe 7 näherungsweise als akustische Vierpolkette der Form<sup>50</sup>

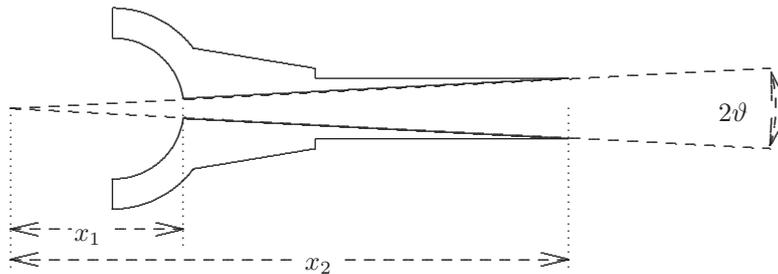


auffassen läßt (in Analogie zu elektromagnetischen Hohlleitern), wobei die akustische Kapazität proportional zum Rohrquerschnitt, die akustische Induktivität dagegen umgekehrt proportional zum Rohrquerschnitt ist.

Entsprechend (2.38) gilt für die akustische Kettenmatrix eines **ungedämpften** konischen Horns mit (i.a. abgeschnittener) Spitze bei  $x = 0$  für  $|(x_2 - x_1)k| \ll 1$

$$\hat{M}_{k\hat{c}}(x_1, x_2) \approx \begin{pmatrix} 1 & -ik\hat{c} \frac{\langle \mu \rangle L}{\sqrt{S(x_1)S(x_2)}} \\ -ik\hat{c} \frac{L \sqrt{S(x_1)S(x_2)}}{\langle \mu \rangle \hat{c}^2} & 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $\vartheta$  den Neigungswinkel der Hornmeridiane gegen die Symmetrieachse bezeichnet. Deshalb läßt sich die akustische Kettenmatrix z.B. eines Trompetenmundstücks

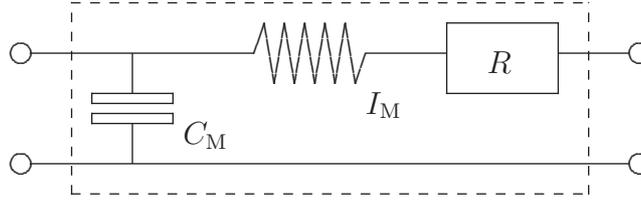


Version vom 21. November 2009

<sup>49</sup>Deshalb wird im Englischen auch die Bezeichnung *inertance* für akustische Induktivität verwendet.

<sup>50</sup>Eigentlich müßte man zusätzlich eine (für nicht zu enge Rohre) geringfügige Resistanz in Serie mit der Induktivität und eine große Resistanz parallel zur Kapazität 'schalten' – entsprechend einer Ersetzung  $k \mapsto k + i\lambda$  ( $\lambda > 0$ , siehe 2.1.3) in den Ausdrücken für die Kettenmatrix-Elemente, wodurch sich deren Nullstellen in die untere komplexe Halbebene verschieben.

näherungsweise durch die Ersatzschaltung



darstellen, wobei<sup>51</sup>

$$C_M = \frac{\text{Mundstückvolumen}}{\langle \mu \rangle \hat{c}^2}, \quad I_M = \langle \mu \rangle \frac{L}{\sqrt{S(x_1) S(x_2)}}.$$

was (näherungsweise) die Änderung

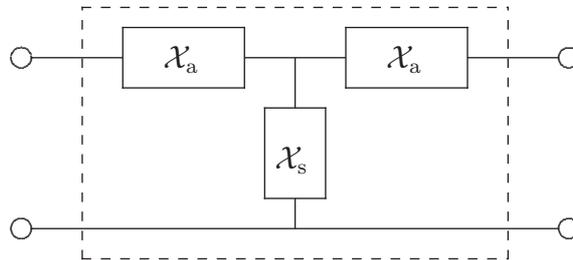
$$\mathcal{Z}_{\text{in}}(\omega) \mapsto \frac{\mathcal{Z}_{\text{in}}(\omega) - i\omega I_M + R}{-i\omega C_M \mathcal{Z}_{\text{in}}(\omega) + 1} \quad \text{für } |(x_2 - x_1)k| \ll 1$$

der Eingangsimpedanz zur Folge hat.

Wenn man in die Seite eines Schallrohres mit der Kettenmatrix  $\hat{M}_{\text{alt}}(x_1, x_2)$  bei  $x = x'$  ein Tonloch einsetzt, dann geht die Kettenmatrix in

$$\hat{M}_{\text{neu}}(x_1, x_2) = \hat{M}_{\text{alt}}(x_1, x') \hat{M}_{\text{Loch}} \hat{M}_{\text{alt}}(x', x_2).$$

über. Dabei entspricht  $\hat{M}_{\text{Loch}}$  näherungsweise der Ersatzschaltung



mit<sup>52</sup>

$$\mathcal{X}_s = \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{\pi R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \times \begin{cases} i \cot(kl^s) & \text{für das abgedeckte Tonloch,} \\ -ikl_o^s & \text{für das offene Tonloch,} \end{cases}$$

$$\mathcal{X}_a = \frac{1}{2} \frac{\langle \mu \rangle \hat{c}}{\pi R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \times \begin{cases} ikl^a & \text{für das abgedeckte Tonloch,} \\ ikl_o^a & \text{für das offene Tonloch,} \end{cases}$$

Version vom 21. November 2009

<sup>51</sup>Der Mundstücksstengel hat das Volumen  $\frac{2}{3}\pi(1 - \cos\vartheta)(x_2^3 - x_1^3) \approx L\sqrt{S(x_1)S(x_2)}$ . Dem ist noch das Volumen des Mundstückkessels (je nach Lippenansatz) hinzuzufügen. Man beachte:

$$\frac{(x_2^3 - x_1^3) - 3x_1x_2(x_2 - x_1)}{(x_2^3 - x_1^3)} = \frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2}{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1} \ll 1 \text{ for } L \ll x_1.$$

<sup>52</sup>Zur ersten Orientierung siehe (Nederveen, 1969, Abschn. 15).

wobei  $R$  den Schallrohrradius bei  $x = x'$  bezeichnet,  $r$  den Tonlochradius und  $l^s, l_o^s, l^a, l_o^a$  in (Keefe, 1982) genau angegebene (auch von  $R$  und  $r$  abhängige) Parameter<sup>53</sup> sind.

<sup>53</sup>Die Parameter  $l_o^s, l_o^a$  sind je nach Tonlochabdeckung unterschiedlich zu wählen.

# Kapitel 3

## Blasinstrumente

### 3.1 Druckgesteuerte Blasinstrumente

#### 3.1.1 Vereinfachte Modelle der Schwingungsgeneratoren<sup>1</sup>.

Wir stellen uns vor, daß sich am Eingang des Horns ein Schwingungsgenerator der in Abbildung 3.1) dargestellten Art befinde.

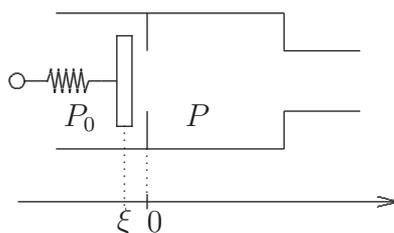


Abb. 3.1: Vereinfachter Schwingungsgenerator für Holzblasinstrumente

Die  $\xi$ -Koordinate für die Ruhelage des Kolbens für  $P_0 = P_e$  sei  $\xi_0 < 0$ . Für (nicht zu große) **konstante**<sup>2</sup> Druckdifferenz  $P_0 - P_e$  gilt dann in der Ruhelage<sup>3</sup>

$$\xi \approx \xi_0 + \lambda (P_0 - P_e), \quad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Kolbenfläche}}{\text{Federkonstante}},$$

solange der Kolben den Horneingang noch nicht ganz verschließt und man die Wirkung der strömungsbedingten lokalen Druckänderungen vernachlässigen kann. Für

Version vom 21. November 2009

<sup>1</sup>Siehe (Fletcher und Rossing, 1991, Chapter 13)

<sup>2</sup>Für  $P_0 - P_e > 0$  muß aufgrund nie ganz vermeidbarer Dämpfung  $\langle P \rangle$  am Horneingang einen höheren Wert haben, als am Hornausgang. Dann liegt im Horn, streng genommen die Überlagerung einer Schallschwingung mit einem konstanten (geringfügigen) Luftstrom vor.

<sup>3</sup>Die stationäre Situation läßt sich z.B. durch Ausfüllen des Horns mit Glaswolle erreichen (vgl. (Benade, 1976, Fig. 21.4)).

$0 < P_0 - P_e \ll P_0$  (und nicht zu großes  $-\xi_0$ ) ist der Luftstrom in das Horn

$$J_{\text{stat}} \approx -\lambda_1 \xi \sqrt{P_0 - P_e}, \quad (3.1)$$

mit einer geeigneten Konstanten  $\lambda_1 > 0$ .

**Begründung:** Wenn nur Druck- und Trägheitskräfte wirken,<sup>4</sup> gilt für die Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  eines ‘Flüssigkeitsteilchens’

$$-\text{grad } P(\mathbf{x}(t), t) = \mu(\mathbf{x}(t), t) \ddot{\mathbf{x}}(t)$$

(siehe Ableitung von (A.12)), woraus nach Bildung des inneren Produktes mit  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  für **stationäre** Strömungen, also im Falle

$$P(\mathbf{x}(t), t) = P(\mathbf{x}(t)), \quad \mu(\mathbf{x}(t), t) = \mu(\mathbf{x}(t))$$

die BERNOULLI-sche Gleichung

$$\frac{2}{\mu(\mathbf{x}(t))} \frac{d}{dt} P(\mathbf{x}(t)) + \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}(t)^2 = 0$$

folgt. Wenn die Luft (lokal) einen adiabatischen Prozeß durchläuft, also  $P \mu^{-\gamma}$  konstant ist (vgl. Abschnitt 1.4.1), ist die BERNOULLI-sche Gleichung äquivalent zu<sup>5</sup>

$$+ \frac{2\gamma P_2^{1/\gamma}}{(\gamma-1)\mu_2} \left( P_2^{1-1/\gamma} - P_1^{1-1/\gamma} \right) + |\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2 = 0,$$

wobei

$$P_j \stackrel{\text{def}}{=} P(\mathbf{x}(t_j)), \quad \mu_j \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\mathbf{x}(t_j)), \quad \mathbf{v}_j \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{x}}(t_j).$$

Mit

$$P_2^{1-1/\gamma} - P_1^{1-1/\gamma} \approx (1 - 1/\gamma) P_2^{-1/\gamma} (P_1 - P_2)$$

und den Identifizierungen

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0, \\ P_2 &= P_e, \\ \mathbf{v}_1 = 0 &= \text{Luftgeschwindigkeit vor dem Eingang zur Eintrittsöffnung,} \\ \mathbf{v}_2 &= \text{Luftgeschwindigkeit an der Austrittsöffnung,} \end{aligned}$$

folgt daraus die Behauptung, da die Fläche der Austrittsöffnung proportional zu  $-\xi$  ist. ■

Für  $P_0 - P_e \in (0, -\xi_0/\lambda)$  ergeben beide Näherungen zusammen

$$J_{\text{stat}} \approx J_{\text{stat}}^{\text{H}} (P_0 - P_e) \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda_1 \xi_0 (P_0 - P_e)^{1/2} - \lambda_1 \lambda (P_0 - P_e)^{3/2}. \quad (3.2)$$

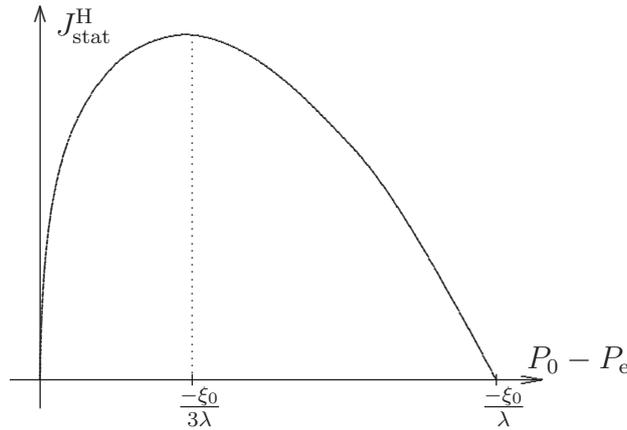
Version vom 21. November 2009

<sup>4</sup>Viskosität bleibt hier also unberücksichtigt!

<sup>5</sup>Denn  $\gamma > 1$  und

$$\frac{2}{\mu(\mathbf{x}(t))} \frac{d}{dt} P(\mathbf{x}(t)) = \frac{2\gamma P^{1/\gamma}(\mathbf{x}(t))}{(\gamma-1)\mu_2} \frac{d}{dt} P^{1-1/\gamma}(\mathbf{x}(t)).$$

Als Funktion von  $P_0 - P_e$  hat  $J_{\text{stat}}$  also etwa folgenden Verlauf:



Für nahezu monochromatischen Schalldruck  $p(t) = P_e(t) - \langle P \rangle$  mit einer Frequenz weit unterhalb der Eigenfrequenz des Kolbens stimmt der zeitabhängige Fluß  $J(t)$  näherungsweise mit dem statischen überein:<sup>6</sup>

$$J(t) \approx J_{\text{stat}} \left( P_0 - P_e(t) \right) \quad (\text{quasistationäre Näherung}).$$

Dann ist die Horn-Eingangsimpedanz näherungsweise<sup>7</sup> durch

$$\mathcal{X}_{\text{lin}}^{\text{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial P} J_{\text{stat}}^{\text{H}} (P_0 - P)_{P=\langle P \rangle} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

gegeben, also nur für  $P_0 - P_e \in \left( -\frac{\xi_0}{3\lambda}, -\frac{\xi_0}{\lambda} \right]$  positiv. Für höhere Frequenzen ist die rechte Seite von (3.3) noch mit einem Phasenfaktor  $e^{i\psi}$  zu multiplizieren, weil sich die Kolbenauslenkung entsprechend verzögert auf den Druck einstellt. Dabei ist  $\psi \in (0, \pi/2)$  unterhalb der Kolben-Eigenfrequenz und  $\psi \in (\pi/2, \pi)$  oberhalb der Kolben-Eigenfrequenz. Da der Realteil der Eingangsimpedanz stets nichtnegativ ist (Passivität des Horns), ist unterhalb der Kolben-Eigenfrequenz<sup>8</sup> nur dann Schwingungserregung möglich, wenn  $P_0 - P_e \in \left( -\frac{\xi_0}{3\lambda}, -\frac{\xi_0}{\lambda} \right)$  ist. Das zeigt auch, daß der Anblasüberdruck einen Mindestwert nicht unterschreiten darf, wenn eine entsprechende stationäre Schwingung möglich sein soll. Dieser Wert läßt sich allerdings durch Ausnutzung der (bis hierher vernachlässigten) BERNOULLI-Kraft noch absenken.<sup>9</sup>

Version vom 21. November 2009

<sup>6</sup>Bei hinreichend kleiner Druckfrequenz stellen sich der Kolben und die einströmende Luft praktisch verzögerungsfrei auf den Druck ein und der vom Kolben direkt bewirkte Luftstrom kann vernachlässigt werden.

<sup>7</sup>Bei stärkeren Schalldruckschwankungen (stärkerer Anblasdruck bei gleichem  $\xi_0$ ) ist die lineare Näherung nicht mehr gerechtfertigt. Dementsprechend treten die Oberschwingungen stärker in Erscheinung und führen u.U. (*Überblasen*) zu einer Änderung der Grundfrequenz.

<sup>8</sup>Die untersten Eigenfrequenzen der tatsächlich (anstelle des Kolbens) verwendeten Rohrblätter liegen wesentlich höher als die Grundfrequenzen der bei normalem Musizieren gewünschten Töne.

<sup>9</sup>Vgl. (Benade, 1976, Fig. 21.4).

Ein völlig anderes Bild ergibt sich für die in Abbildung 3.2 dargestellte Konfiguration.

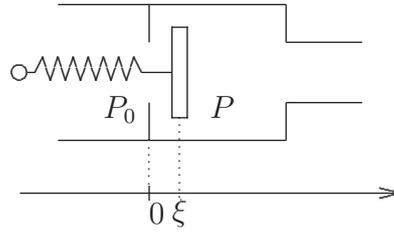
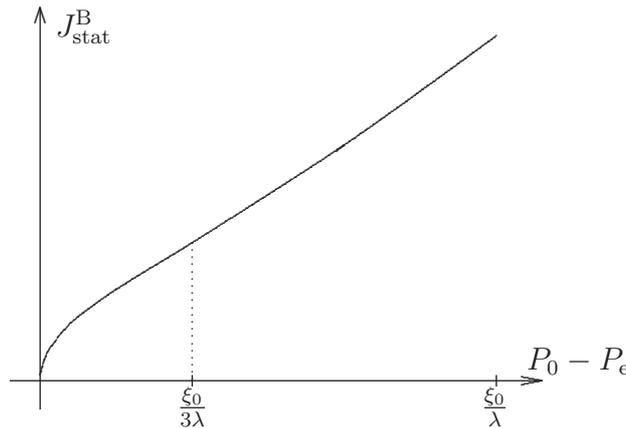


Abb. 3.2: Vereinfachter Schwingungsgenerator für Blechblasinstrumente

Hier wird das Ventil durch den Anblasdruck  $P_0$  geöffnet, statt geschlossen und statt (3.2) gilt nun

$$J_{\text{stat}} \approx J_{\text{stat}}^{\text{B}}(P_0 - P_e) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 \xi_0 (P_0 - P_e)^{1/2} + \lambda_1 \lambda (P_0 - P_e)^{3/2} \quad \text{für } P_0 - P_e \geq -\xi_0/\lambda. \quad (3.4)$$

mit  $\xi_0 > 0$ . Für positive Argumente hat  $J_{\text{stat}}^{\text{B}}$  etwa folgenden Verlauf:



Die linear genäherte Horn-Eingangsimpedanz

$$\mathcal{X}_{\text{lin}}^{\text{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial P} J_{\text{stat}}^{\text{B}}(P_0 - P)_{P=\langle P \rangle} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

für nahezu monochromatischen Schalldruck mit einer Frequenz weit unterhalb der Eigenfrequenz des Kolbens ist nun für  $P_0 > P_e$  stets negativ. Ein Schwingungsgenerator gemäß Abbildung 3.2 kann daher für  $P_0 > P_e$  an keinem Horn periodische Schwingungen in einem Frequenzbereich anregen, für den die quasistatische Näherung nicht zu schlecht ist. Ein solcher Schwingungsgenerator, der grob vereinfacht die Funktion der Lippen eines Blechbläusers beschreibt, kann aber – bei geeigneter Horngeometrie – in einem Bereich oberhalb seiner Eigenfrequenz Schwingungen anregen, weil dann die Phasenverschiebung der Kolbenposition gegenüber der Gesamtkraft zu einem positiven Realteil der Eingangsimpedanz führt.

### 3.1.2 Wirkliche Rohrblatt-Holzblasinstrumente<sup>10</sup>

Eine realistischere Bewegungsgleichung für das Rohrblatt an einem Klarinettenmundstück (siehe Abbildung 3.3)

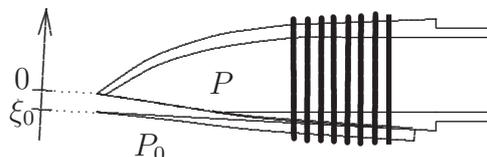


Abb. 3.3: Rohrblatt auf einem Klarinettenmundstück

ist nach (Schumacher, 1981)

$$m_r \ddot{\xi}(t) + \rho_r \dot{\xi}(t) + D_r (\xi(t) - \xi_0) = P_0(t) - P(t) - \frac{1}{2} \frac{\langle \mu \rangle}{B} \frac{J(P_0(t) - P(t), \xi(t))^2}{\xi(t) \tan \theta S_r}, \quad (3.6)$$

wobei die hier eingeführten Größen folgende Bedeutung haben:<sup>11</sup>

- $\rho_r$  = Dämpfungs‘konstante’ des Blattes,
- $D_r$  = Feder‘konstante’ des Blattes,
- $m_r$  = effektive Blattmasse,
- $B$  = Breite der Blattspitze,
- $\theta$  = Öffnungswinkel der Mundstückspitze ( $\approx 30^\circ$ ),
- $S_r$  = effektive Blattfläche.

Der letzte Term in (3.6) entspricht der BERNOULLI-Kraft.

#### Anmerkungen:

- Die Dämpfung wird hauptsächlich durch die Lippen bestimmt, die das Blatt andrücken.
- Die niedrigste Eigenfrequenz ist etwa 10- bis 20-mal so groß wie die Grundfrequenz des gespielten Tones.<sup>12</sup> Deshalb ist der Wert der effektiven Blattmasse nicht so wesentlich (vgl. Übungsaufgabe 1).
- Die Federkonstante des feuchten Blattes ist nur etwa halb so groß wie die des trockenen Blattes, die Eigenfrequenz entsprechend niedriger.
- Die effektive Blattfläche verkleinert sich bei erhöhtem Lippendruck, weil das Blatt über eine größere Strecke fest auf die Bahn gedrückt wird. Sie schwankt zwischen  $0,2 B^2$  und  $2 B^2$ , wobei  $B$  die Breite der Blattspitze ( $\approx 1,4$  cm) bezeichnet.

Version vom 21. November 2009

<sup>10</sup>Zur Entwicklung der Klarinette siehe (Restle und Fricke, 2004).

<sup>11</sup>Da auf der rechten Seite von (3.6) ein Druck statt einer Kraft steht, haben  $\rho_r$ ,  $D_r$  und  $m_r$  natürlich andere physikalische Dimension als die entsprechenden Größen  $\rho$ ,  $D$  und  $m$  in Übungsaufgabe 1.

<sup>12</sup>Man beachte in diesem Zusammenhang die Ausführungen zum Schluß von 1.3.2.

Der reelle Luftvolumenstrom

$$J = J_f + S_r \dot{\xi} \quad (3.7)$$

setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich dem Strom  $J_f$  durch den Schlitz zwischen Blatt und Mundstück und dem mit der Blattschwingung verbundenen akustischen Fluß  $S_r \dot{\xi}$ . Eine realistischere Version von (3.1) ist

$$J_{\text{stat}} \approx \lambda_1 |\xi|^{2/q} (P_0 - P)^{1/q} \quad \text{für } \xi < 0; \quad q = 3/2, \quad (3.8)$$

also

$$P_0 - P \approx \frac{J_{\text{stat}}^q}{\lambda_1^q \xi^2},$$

mit einer experimentell (siehe (Backus, 1963)) bestimmten positiven Konstanten  $\lambda_1$ .

**Erläuterung:** Die Abweichung von (3.1) wird i.a. grob folgendermaßen erklärt:

1. Bei vorgegebenem  $P_0$  läßt sich  $|\xi|$  durch Ansatzänderung variieren. Dabei hängt aber die Fläche des seitlichen Teils der Eintrittsöffnung nichtlinear von  $|\xi|$  ab.
2. Bei vorgegebenem  $|\xi|$  ist die Fläche der Eintrittsöffnung eine monoton wachsende Funktion von  $P_0$ , weil der Lippendruck bei höherem  $P_0$  geringer sein muß und das Blatt deshalb nicht so weit auf der Bahn aufliegt.

Der erste Anteil von  $J$  genügt deshalb in guter Näherung der Gleichung

$$M_e \dot{J}_f = P_0 - P - \frac{J_f^q}{\lambda_1^q \xi^2}, \quad (3.9)$$

wobei

$$M_e = \frac{\text{effektive Masse der Luft in der Eintrittsöffnung}}{\text{Eintrittsfläche}^2}$$

die akustische Induktivität (*akustische Masse*) der Eintrittsöffnung bezeichnet, die Werte zwischen  $3000 \text{ kg/m}^4$  und  $1000 \text{ kg/m}^4$  annimmt, wenn der zeitliche Mittelwert von  $-\xi$  zwischen  $0.1 \text{ mm}$  und  $1 \text{ mm}$  liegt.

**Anmerkung:** Die Anwendung der Betrachtungen von Anhang A.4 auf eine schmale Rechteckmembran anstelle der kreisförmigen Membran (Kolbenoberfläche) würde

$$H \ll B \implies M_e \approx \frac{\langle \mu \rangle}{B} \left( \frac{L}{H} + \frac{1}{\pi} \left( 1 + 2 \ln \frac{2B}{H} \right) \right)$$

für eine Röhre der Länge  $L$  mit rechteckigem Querschnitt der Seitenlängen  $B$  und  $H$  zeigen (vgl. (Sivian, 1935, Note II), (Backus, 1963, Gleichung (18)) und (2.8)).

Glücklicherweise scheint der Einfluß der akustischen Masse auf die Blattschwingung nicht wesentlich zu sein, so daß deren genaue Kenntnis nicht so wichtig ist.

Im Prinzip sollte es möglich sein, aus den Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.9) (bei Kenntnis aller Kenngrößen)  $J(t)$  als Funktional von  $P_0(\cdot) - P(\cdot)$  zu bestimmen.

Die (nahezu) möglichen Schwingungen des Instruments zu vorgegeben Anblasdruck  $P_0(t)$  wären dann durch diejenigen Funktionen  $p(t) \hat{=} P(t) - \langle P \rangle$  charakterisiert, für die

$$\begin{aligned} p(t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{X}_\omega \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int J[P_0 - P](t') e^{i\omega t'} dt' \right) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{X}_\omega e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right) J[P_0 - P](t') dt' \end{aligned}$$

gilt, wobei  $\mathcal{X}_\omega$  die frequenzabhängige Eingangsimpedanz der Bohrung (Horn) bezeichnet (vgl. (Schumacher, 1981)).

**Anmerkung:** Aus Kausalitätsgründen (vgl. Abschn. 3.1.2 von (Lücke, ftm)) sollte die *Greensche Funktion*

$$G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{X}_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

des Bohrungseingangs für negative  $t$  verschwinden.

Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeiten ist eine allgemeine Lösung kaum zu erarbeiten. Deshalb sei auch hier der Fall fastperiodischer Schwingung in linearer Näherung betrachtet, was natürlich nur bei sanftem Anblasen gerechtfertigt ist, aber doch schon charakteristische Aussagen für das Instrument liefert:

Zunächst vereinfachen wir (3.6), indem wir den BERNOULLI-Term und (entsprechend Teil c) von Übungsaufgabe 1)  $m_r$  vernachlässigen. Mit den Definitionen

$$\hat{\xi}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_0 + \frac{P_0 - \langle P \rangle}{D_r} \quad (3.10)$$

und

$$\xi_{\text{osz}} \stackrel{\text{def}}{=} \xi - \hat{\xi}_0 \quad (3.11)$$

ergibt sich dann für **konstantes**<sup>13</sup>  $P_0 > \langle P \rangle$

$$\rho_r \dot{\xi}_{\text{osz}} + D_r \xi_{\text{osz}} \approx -p. \quad (3.12)$$

Weiterhin definieren wir

$$J_0 \stackrel{\text{def}}{=} J_{\text{stat}}(p_0) \stackrel{(3.8)}{=} \lambda_1 \left| \hat{\xi}_0 \right|^{2/q} p_0^{1/q}, \quad p_0 \stackrel{\text{def}}{=} P_0 - \langle P \rangle \quad (3.13)$$

und

$$J_{\text{osz}} \stackrel{\text{def}}{=} J_f - J_0 \quad (3.14)$$

sowie

$$J_{\text{ak}} \stackrel{\text{def}}{=} J - J_0 \stackrel{(3.7),(3.14)}{=} J_{\text{osz}} + S_r \dot{\xi}_{\text{osz}}. \quad (3.15)$$

<sup>13</sup>Die Schalldruckschwankungen von  $P_0$  ließen sich durch Addition der (relativ kleinen) akustischen Impedanz der Mundhöhle zu der des Bohrungseingangs berücksichtigen (siehe (Fletcher und Rossing, 1991, Abschn. 13.3)).

Gemäß der Annahme

$$0 < J_0 \gg J_{\text{osz}} , \quad 0 < -\hat{\xi}_0 \gg -\xi_{\text{osz}}$$

(kleine Schwingungen) verwenden wir die (TAYLOR-) Näherungen

$$J_f^q \approx J_0^q + q J_0^{q-1} J_{\text{osz}}$$

und

$$\xi^{-2} \approx \hat{\xi}_0^{-2} - 2 \hat{\xi}_0^{-3} \xi_{\text{osz}} .$$

Setzt man diese Näherungen in (3.9) ein und berücksichtigt nur Terme erster Ordnung in  $J_{\text{osz}}, \xi_{\text{osz}}$  so erhält man

$$M_e \dot{J}_{\text{osz}} \approx p_0 - p - \frac{1}{\lambda_1^q \hat{\xi}_0^2} \left( J_0^q \left( 1 - \frac{2 \xi_{\text{osz}}}{\hat{\xi}_0} \right) + q J_0^{q-1} J_{\text{osz}} \right) . \quad (3.16)$$

Mit (3.13), also

$$p_0 \approx \frac{J_0^q}{\lambda_1^q \hat{\xi}_0^2} ,$$

und (3.15) ergibt sich daraus

$$p \approx 2 p_0 \frac{\xi_{\text{osz}}}{\hat{\xi}_0} - q \frac{p_0}{J_0} \left( J_{\text{ak}} - S_r \dot{\xi}_{\text{osz}} \right) - M_e \left( \dot{J}_{\text{ak}} - S_r \ddot{\xi}_{\text{osz}} \right) . \quad (3.17)$$

Im fastmonochromatischen Falle

$$p(t) \approx \mathcal{P} e^{-i\omega t} + \overline{\mathcal{P}} e^{+i\omega t} , \quad J_{\text{ak}}(t) \approx \mathcal{J} e^{-i\omega t} + \overline{\mathcal{J}} e^{+i\omega t} , \quad \xi_{\text{osz}}(t) \approx \mathcal{A} e^{-i\omega t} + \overline{\mathcal{A}} e^{+i\omega t}$$

vereinfachen sich (3.12) und (3.17) zu

$$\mathcal{A} \approx \frac{\mathcal{P}}{i\omega \rho_r - D_r}$$

und

$$\mathcal{P} \approx 2 p_0 \frac{\mathcal{A}}{\hat{\xi}_0} - \left( q \frac{p_0}{J_0} - i\omega M_e \right) (\mathcal{J} + i\omega S_r \mathcal{A}) .$$

Einsetzen des Ausdrucks für  $\mathcal{A}$  in die letzte Gleichung und Division durch  $\mathcal{P}$  liefert schließlich für die Bohrungs-Eingangsimpedanz  $\mathcal{X}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}/\mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{X}_\omega)^{-1} &\approx \frac{2 p_0 / \hat{\xi}_0 - (i\omega \rho_r - D_r)}{(i\omega \rho_r - D_r) (q p_0 / J_0 - i\omega M_e)} - \frac{i\omega S_r}{i\omega \rho_r - D_r} \\ &= \frac{\frac{2 p_0}{-\hat{\xi}_0 D_r} - \left( 1 - i \frac{\omega \rho_r}{D_r} \right)}{\left( 1 - i \frac{\omega \rho_r}{D_r} \right) \left( 1 - i \frac{\omega M_e J_0}{q p_0} \right)} \frac{J_0}{q p_0} + i \frac{\omega S_r}{\left( 1 - i \frac{\omega \rho_r}{D_r} \right) D_r} , \end{aligned} \quad (3.18)$$

Größe:	$\omega$	$M_e$	$J_0$	$p_0$	$S_r$	$1/D_r$	$\Re(\mathcal{Y}_\omega)$
SI-Maßzahl:	1000	2000	$10^{-4}$	2000	$\frac{1}{2} \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-8}$	$18 \times 10^{-9}$

Tabelle 3.1: Typische Werte für die Klarinette nach (Nederveen, 1969, S. 33)

vorausgesetzt natürlich, daß die monochromatische Schwingung tatsächlich (näherungsweise) möglich ist.

Für realistische Werte (siehe Tabelle 3.1) gilt

$$\frac{\omega M_e J_0}{q p_0} < 1/10, \quad \frac{\omega \rho_r}{D_r} < 3/10.$$

und damit

$$\Re(\mathcal{Y}_\omega) \approx \left( \frac{2p_0}{-\hat{\xi}_0 D_r} - 1 \right) \frac{J_0}{q p_0} \quad (3.19)$$

sowie<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \Im(\mathcal{Y}_\omega) &\approx \Re(\mathcal{Y}_\omega) \left( \frac{\omega \rho_r}{D_r} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2p_0}{-\hat{\xi}_0 D_r} - 1} \right) + \frac{\omega M_e J_0}{q p_0} \right) + \frac{\omega S_r}{D_r} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \Re(\mathcal{Y}_\omega) \left( \frac{\omega \rho_r}{D_r} \frac{\hat{\xi}_0 - \xi_0}{\hat{\xi}_0 - \frac{3}{2}\xi_0} + \frac{\omega M_e J_0}{q p_0} \right) + \frac{\omega S_r}{D_r}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da der Realteil von der akustischen Eingangs-Leitfähigkeit  $\mathcal{Y}_\omega$  positiv sein muß, folgt aus (3.19) die Bedingung

$$\frac{2p_0}{D_r} > -\hat{\xi}_0 \stackrel{(3.10)}{=} -\xi_0 - \frac{p_0}{D_r},$$

also

$$p_0 > -\frac{\xi_0 D_r}{3}.$$

Wiederum mit (3.10) folgt daraus

$$-\hat{\xi}_0 < -\frac{2}{3}\xi_0.$$

Die mittlere Auslenkung der Blattspitze muß also größer  $-\xi_0/3$  sein.

<sup>14</sup>Für realistische Werte folgt aus (3.19) und (3.20):

$$0 < \Im(\mathcal{Y}_\omega) < \Re(\mathcal{Y}_\omega).$$

Aus (3.10), (3.13) und (3.19) folgt

$$\begin{aligned}\Re(\mathcal{Y}_\omega) &\approx \left( \frac{2(\hat{\xi}_0 - \xi_0)}{-\hat{\xi}_0} - 1 \right) \frac{\lambda_1}{q} \left| \hat{\xi}_0 \right|^{\frac{2}{q}} D_r^{\frac{1}{q}-1} \left| \hat{\xi}_0 - \xi_0 \right|^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \left( 3\hat{\xi}_0 - 2\xi_0 \right) \frac{\lambda_1}{q} \left| \hat{\xi}_0 \right|^{\frac{2}{q}-1} D_r^{\frac{1}{q}-1} \left| \xi_0 \right|^{\frac{1}{q}-1} \left| 1 - \frac{\hat{\xi}_0}{\xi_0} \right|^{\frac{1}{q}-1}\end{aligned}$$

und somit

$$\Re(\mathcal{Y}_\omega) \approx \frac{2\lambda_1}{q} D_r^{\frac{1}{q}-1} \left| \xi_0 \right|^{\frac{3}{q}-1} w_q(\hat{\xi}_0/\xi_0), \quad (3.21)$$

wobei

$$w_q(\hat{\xi}_0/\xi_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left( 1 - \frac{3\hat{\xi}_0}{2\xi_0} \right) \left| \frac{\hat{\xi}_0}{\xi_0} \right|^{\frac{2}{q}-1} \left| 1 - \frac{\hat{\xi}_0}{\xi_0} \right|^{\frac{1}{q}-1}.$$

Die Ableitung der Funktion

$$\ln(w_{3/2}(x)) = \ln\left(1 - \frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

verschwindet über dem Intervall  $[0, 2/3]$  nur an der Stelle  $x = (2 - \sqrt{2})/3$  an. Das gleiche gilt folglich für die Funktion  $w_{3/2}(x)$  selbst und somit:

$$\sup_{x \in [0, 2/3]} w_{3/2}(x) = w_{3/2}\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{3}\right) \approx 0,441.$$

Da  $|\xi_0|$  für die Klarinette maximal nur etwa 1 mm sein kann und die SI-Maßzahl von  $\lambda_1$  (nach (Nederveen, 1969, S. 34)) etwa 0,3 ist, folgt damit aus (3.21) (und  $1/D_r \approx 4 \times 10^{-8}$  entsprechend Tabelle 3.1) in etwa

$$0 < \Re(\mathcal{Y}_\omega) < 0,62 \times 10^{-6} \times \text{SI-Einheit}.$$

Die obere Schranke entspricht etwa dem Kehrwert des (in Übungsaufgabe 8 eingeführten) Wellenwiderstandes  $\frac{\pi R^2}{(\mu)\hat{c}}$  ( $R \approx 7,5$  mm), ist also außerordentlich klein. Trotzdem beträgt sie etwa das 50-fache des tatsächlichen Realteils der akustischen Eingangsleitfähigkeit.<sup>15</sup>

Um überhaupt einen leisen Ton zu produzieren, paßt der Bläser  $\Re(\mathcal{Y}_\omega)$  den tatsächlichen Gegebenheiten an, indem er durch seinen Lippenansatz und -druck  $\xi_0$  (und den genauen Wert von  $D_r$ ) festlegt und den Anblasdruck  $P_0$  so weit ansteigen läßt, daß  $|\xi_0|^{\frac{3}{q}-1} w_q(\hat{\xi}_0/\xi_0)$  den entsprechenden Wert erreicht. Die Frequenz der erzeugten fastmonochromatischen Schwingung entspricht grob derjenigen, für die (bei der gewählten Griffweise) der Betrag der Eingangsimpedanz maximal ist. Zur Feinabstimmung der Tonhöhe muß dann noch  $\Im(\mathcal{Y}_\omega)$  passend eingerichtet werden (siehe (Nederveen, 1969, S. 34/35)).

<sup>15</sup>Der entsprechend große Realteil (beachte Fußnote 14) der Eingangsimpedanz für die Resonanzfrequenzen entsteht, wie in 2.1.3 erläutert, durch die unvermeidliche, wenn auch geringfügige, Dämpfung aus der sonst rein imaginären Impedanz.

Typisch für Holzblasinstrumente sind

1. Ein Anblas‘ventil’ (Einfach- oder Doppelrohrblatt), dessen Öffnung durch den Anblasüberdruck verringert wird.
2. Starke Rückwirkung der schwingenden Luftsäule auf den Schwingungserreger.
3. Verwendung vieler Tonlöcher zur Erzeugung einer Tonleiter.<sup>16</sup>

Sie haben – mit Ausnahme der modernen Flöte und des Saxophons – eine lange Evolution hinter sich und sind daher nicht nach einem vollständigen logischen Plan konstruiert.

Die Kraft auf das Blatt setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

1. Lippen- und Auflagekraft.
2. Anblas-Überdruck
3. Strahlungsreaktionskraft ( $\mathcal{Z}$ -Schnelle) auf beiden Blattseiten.
4. BERNOULLI-Kraft.

Das Rohrblatt hat u.a. folgende Einflüsse auf die Resonanz-Frequenzen:

1. Die Resonanzfrequenzen werden abgesenkt und liegen grundsätzlich unterhalb der Eigenfrequenz des frei (ohne Mundstückhohlraum) schwingenden Rohrblatts.
2. Eine Änderung der Eigenfrequenz (durch Änderung des Lippendrucks entsprechend der Bahnkrümmung) beeinflusst die Resonanzfrequenzen, die weit unterhalb der Eigenfrequenz des Rohrblatts liegen, nahezu gleichartig. Der Einfluß auf die höheren Frequenzen (z.B. ‘kurze Töne’) ist größer.
3. Die Dämpfung durch die Lippen reduziert die oben beschriebenen Einflüsse.

Die Klarinette ist das am besten berechnete Instrument. Die Blattbewegung wird durch eine Integro-Differentialgleichung beschrieben, die analytisch kaum zu beherrschen ist, aber auf dem Computer numerisch berechnet wurde (Schumacher, 1981). Die Ergebnisse zeigten gute Übereinstimmung mit tatsächlichen Meßdaten.

Plitnik und Strong (1979) (Zitate siehe (Fletcher und Rossing, 1991, S. 425)) haben die Ersatzschaltung für die Oboe mit der gemessenen Strahlungsimpedanz und

<sup>16</sup>Im Gegensatz zur Orgel, die für jeden Ton eine andere Pfeife verwendet. Allerdings sind z.B. auch Kornett und Serpent Tonlöcher vorhanden.

den Daten von Keefe (1982a) für die Tonlöcher durchgerechnet und ziemlich genaue Übereinstimmung mit den tatsächlichen akustischen Eigenschaften der zur Berechnung vermessenen Oboe gefunden (Fletcher und Rossing, 1991, S. 404, 3. Absatz).

- Aus der WEBSTER-Gleichung (insbesondere in der Form (2.22)) erkennt man leicht, daß benachbarte Schwingungsmaxima und Schwingungsminima i.a. nur bei konstanter Hornfunktion alle gleiche Abstände haben.
- Als **Register** bezeichnet man den Tonbereich, der zwischen zwei Schwingungsmoden liegt (Duodezime bei zylindrischer Bohrung, Oktave bei konischer Bohrung). Benutzt werden i.d. Regel nur *tiefes*, *mittleres* und *hohes* Register.
- Damit Zwischentöne durch Öffnen geeigneter Tonlöcher erzielt werden, muß die Abschneidefrequenz durch die offenen Löcher entsprechend erhöht werden, was natürlich nur für die untersten Register möglich ist.
- Bei den ‘kurzen’ Tönen entweicht Schallenergie durch mehr Tonlöcher, die Schallreflexion in der Röhre und damit die Resonanz ist also geringer. Die ‘langen’ Töne (diejenigen mit vielen abgedeckten Tonlöchern) klingen deshalb besser und sind daher i.d. Regel stabiler.
- Die Bahnkrümmung des Klarinettenmundstücks bestimmt die Art der Nichtlinearität der Blattschwingung,<sup>17</sup> die wichtig ist, um durch Rückkopplung mit dem Schallrohr und der Mundhöhle jeweils (abhängig vom Luft- und Ansatzdruck, evtl. auch vom Sitz der Blattklammer) die richtige Grundfrequenz zu stabilisieren (vgl. Benade, S. 259).

Die einfachste Messung der Eingangsimpedanz benutzt zwei versetzte Mikrophone, zur näherungsweise Bestimmung des Schallgradienten und damit der Schnelle, und eine Eingangsschallquelle.

Als Referenzebene für die Eingangsimpedanz der Klarinette benutzt man meist die Stelle, an der das Mundstück aufgesetzt wird. Backus (1974) bezog sich allerdings auf die Blattfläche.

Die Form der Mundstückspitze hat einen großen Einfluß auf die BERNOULLI-Kraft und damit auf die Lautstärke des Instruments. Das nutzten die alten Jazz-Musiker aus, ihren Instrumenten eine ohrenbetäubende Lautstärke zu verleihen, indem sie Kaugummi geschickt in der Mundstückspitze anbrachten.

---

Version vom 21. November 2009

<sup>17</sup>Der genaue Zeitablauf der Schwingung gegebener Periode bestimmt die Amplitudenverhältnisse der Oberschwingungen. Vorsicht: Die Grundfrequenz der natürlichen Blattschwingung ist wohl schon höher als die gewünschten Töne?

Bei Harmonium, Mundorgel und Akkordeon werden die schwingenden Blätter durch den Anblasdruck geöffnet, statt geschlossen (man kann sie auch durch Ansaugen zum Schwingen bringen).

Bei Einzel- oder Doppelrohrblättern wird die Frequenz druckgesteuert, deshalb sind die Druckschwankungen am Mundstück maximal, was in etwa dem ideal schallharten Abschluß entspricht. Ein Luftblatt (bei der Flöte) gleicht dagegen jede Druckschwankung durch Ausweichbewegung aus, so daß am Mundstück die Geschwindigkeitsschwankungen maximal sind, was in etwa der Bedingung idealer Offenheit entspricht.

Wegen der Tonlöcher — deren Öffnen eine effektive Verkürzung des Schallkörpers bewirkt — sollte die Form bei Kürzung und entsprechender Reskalierung wieder in sich übergehen. Das zeichnet die BESSEL-Hörner mit  $x \in [0, L]$  aus, von denen die Röhre und das konische Horn (mit Spitze bei  $x = 0$ ) wegen der harmonischen Anordnung der Resonanzfrequenzen bevorzugt sind.

Tiefer klingende konische Blasinstrumente werden in der Regel ‘gefaltet’, damit die Tonlöcher in die Nähe der Finger gelangen.<sup>18</sup>

Die Theorie der Tief- und Hochpaßfilter (die auch bei Schalldämpfern Verwendung finden, vgl. (Skudrzyk, 1954, S. 352)) macht folgendes verständlich:

Abgesehen von Querflöte und Saxophon haben die Tonlöcher einen charakteristischen Einfluß auf den Klangcharakter eines Instruments.<sup>19</sup> Geschlossene Tonlochreihen unterdrücken hohe Frequenzen, und prägen dadurch besonders den Klang der Oboe. Offene Tonlochreihen sondern dagegen die tieferen Töne aus und strahlen die hohen Frequenzen mit enger Richtungscharakteristik aus.<sup>20</sup> Zur Angleichung des Klangcharakters der ‘langen’ Töne ist deshalb ein Schallbecher geeigneter Form nötig.

Für die Anordnung der Tonlöcher ist folgende Regel von Lord RAYLEIGH zu beachten:

Das Verhältnis des Volumens eines geschlossenen Tonlochs zum Volumen des Bohrungsteil zwischen den Nachbarlöchern muß für alle Tonlöcher gleich sein.

Deshalb werden die Tonlöcher zum Schallbecher hin größer.<sup>21</sup>

---

Version vom 21. November 2009

<sup>18</sup>Bzgl. der gekrümmten Bohrungsteile siehe (Nederveen, 1969, Abschn. 37).

<sup>19</sup>Eine Klarinette ohne Bohrlöcher hätte einen dumpfen, unspezifischen Klang.

<sup>20</sup>Bei Flöte und Saxophon werden die Frequenzen so abgestrahlt, als kämen sie alle i.w. aus einem einzigen Tonloch.

<sup>21</sup>Die Querflöte bildet auch hier wieder eine Ausnahme.

### 3.1.3 Blechblasinstrumente

Typisch für Blechblasinstrument sind

1. Ein Anblas‘ventil’ (gebildet durch die Lippen des Bläasers), dessen Öffnung durch den Anblasüberdruck vergrößert wird.
2. Geringe Rückwirkung der schwingenden Luftsäule auf den Erregungsmechanismus (die Lippen des Bläasers).
3. Die Verwendung von Ventilen anstelle von Tonlöchern, um die effektive Rohrlänge – durch Hinzu- oder Abschalten von Rohrstücken – zur Erzeugung von Zwischentönen zu variieren.

Die Lippen bilden **auch** einen dehnbaren Abschluß des Mundstück-Kessels. Die Luftmasse des Schallkörpers hat nur geringe Rückwirkung auf die große Lippenmasse. Daher müssen bei Blechblasinstrumenten die ersten Impedanz-Maxima durch spezielle Mundstückform verstärkt werden.

Hornisten variieren die Form des Schallbeckers bewußt durch *Stopfhand*. Trompeter benutzen spezielle Schalldämpfer.

Das Schallrohr einer Trompete ist etwa 140 cm lang.

Bzgl. Impedanzmessungen siehe Benade, Sp. d. Wiss.

## 3.2 Flöten und Flöten-Orgelpfeifen

Für Orgelpfeifen werden auch quadratische Querschnitte verwendet. Dabei ist jedoch auf hinreichende Wandstärke zu achten, um Klangbeeinträchtigung zur Wandschwingungen zu vermeiden. Bei ausreichender Steife und Glätte, hat die Art des Wandmaterials keinen Einfluß auf die akustischen Eigenschaften.<sup>22</sup>

Zur Theorie der Tonerzeugung siehe ([Schlosser, 1979](#)).

# Anhang A

## A.1 Die schnelle FOURIER-Transformation (FFT)

Mit  $\Delta_T(t)$  sei jeweils die *Abtastfunktion*

$$\Delta_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \delta(t - \nu T) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

zur Periode  $T > 0$  bezeichnet, deren FOURIER-Transformierte

$$\tilde{\Delta}_T(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T}\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

ist.

**Beweisskizze:**<sup>1</sup> Aus (1.4) und Regel (F5) für die FOURIER-Transformation folgt<sup>2</sup>

$$\tilde{\Delta}_T(\omega) \stackrel{(1.4)(F5)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\nu=-n}^{+n} (e^{+i\omega T})^\nu,$$

und damit auch

$$\tilde{\Delta}_T(\omega) = \tilde{\Delta}_T\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-n}^{+n} (e^{+i\omega T})^\nu &= e^{-in\omega T} \frac{1 - e^{+i(2n+1)\omega T}}{1 - e^{+i\omega T}} \\ &= \frac{\sin\left((n+1/2)\omega T\right)}{\omega} \frac{\omega}{\sin(\omega T/2)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \pi \delta(\omega) \quad \text{für } \omega \in \tilde{J}_T \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{\pi}{T}, +\frac{\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

folgt daraus (A.2). ■

Version vom 21. November 2009

<sup>1</sup>Ein exakter distributionstheoretischer Beweis von (A.2) ist z.B. in (Lighthill, 1966, Satz26) angegeben.

<sup>2</sup>Die Konvergenz ist im distributionstheoretischen Sinne zu verstehen.

Sei  $f(t)$  eine hinreichend gutartige periodische Funktion mit der Periode  $T_0$  :

$$f(t) = f(t - T_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.3})$$

Für die konkrete Darstellung ihres Graphen (z.B. auf dem Computer-Bildschirm) genügt dann die Kenntnis ihrer Abtastung<sup>3</sup>

$$f_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{\frac{T_0}{N}}(t) f(t) \quad (\text{A.4})$$

$$\stackrel{(\text{A.1}), (\text{A.3})}{=} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(j \frac{T_0}{N}\right) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - (j + \nu N) \frac{T_0}{N}\right) \quad (\text{A.5})$$

für hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$ .  $f_N(t)$  hat natürlich ebenfalls die Periode  $T_0$  und läßt sich dementsprechend in eine FOURIER-Reihe entwickeln:

$$f_N(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{c}_k(f_N) e^{-i\nu \frac{2\pi}{T_0} t},$$

$$\hat{c}_k(f_N) \stackrel{(\text{1.2})}{=} \frac{1}{\sqrt{T_0}} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\epsilon}^{T_0 - \epsilon} f_N(t) e^{+ik \frac{2\pi}{T_0} t} dt \quad (\text{A.6})$$

$$\stackrel{(\text{A.5})}{=} \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(j \frac{T_0}{N}\right) e^{ik \frac{2\pi}{N} j}. \quad (\text{A.7})$$

Diese FOURIER-Reihe ist offensichtlich durch die  $N$  Abtastwerte  $x_0, \dots, x_{N-1}$  festgelegt, wobei

$$x_j \stackrel{\text{def}}{=} f\left(j \frac{T_0}{N}\right) \stackrel{(\text{A.3})}{=} x_{j-N} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.8})$$

Die Abbildung<sup>4</sup>

$$\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}_N} \mapsto \left\{ \tilde{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{ik \frac{2\pi}{N} j} \right\}_{k \in \mathbb{Z}_N} \quad (\text{A.9})$$

bezeichnet man als **diskrete FOURIER-Transformation**.

**Anmerkung:** Die Umkehrung von (A.9) ist gemäß

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik \frac{2\pi}{N} m} = \frac{1 - e^{i 2\pi m}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{N} m}} = 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, N-1\}$$

Version vom 21. November 2009

<sup>3</sup>An den Singularitätsstellen  $\nu T_0/N$  von  $f_N(t)$  wähle man als Ordinate des Graphen jeweils die ‘Stärke’  $f(\nu T_0/N)$  der entsprechenden  $\delta$ -Singularität.

<sup>4</sup>Wir verwenden hier die übliche Schreibweise  $\mathbb{Z}_N \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \dots, N-1\}$ .

durch

$$\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N} \mapsto \left\{ x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_k e^{-ik \frac{2\pi}{N} j} \right\}_{j \in \mathbb{Z}_N}.$$

gegeben (vgl. Abschnitt 2.2.2 von (Lücke, qip)).

Mit (A.8) und (A.9) gilt also

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &\stackrel{(A.7)}{=} \sqrt{\frac{T_0}{N}} \hat{c}_k(f_N) \\ &\stackrel{(A.6)}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int (\chi_{[-\epsilon, T_0 - \epsilon]}(t) f_N(t)) e^{i\omega t} \right)_{\omega = k \frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

und somit unter Beachtung von (A.4)

$$\tilde{x}_k = \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \tilde{f}_{N,0} \left( k \frac{2\pi}{T_0} \right) = \tilde{x}_{k+N}$$

für

$$f_{N,0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta_{\frac{T_0}{N}}(t) \chi_{[-\epsilon, T_0 - \epsilon]}(t) f(t).$$

Dabei beachte man, daß

$$\tilde{f}_{N,0}(\omega) \approx \frac{N}{T_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_0} f(t) e^{+i\omega t} dt \quad \forall \omega \in \left( -\frac{\pi N}{T_0}, +\frac{\pi N}{T_0} \right)$$

gilt, wenn man  $N$  groß genug wählt.

**Beweisskizze:** Aus Regel (F10) folgt

$$\tilde{f}_{N,0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \tilde{\Delta}_{\frac{T_0}{N}}(\omega') \tilde{g}_\epsilon(\omega - \omega') d\omega'$$

mit

$$g_\epsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{[-\epsilon, T_0 - \epsilon]}(t) f(t)$$

und daraus mit (A.2)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{N,0}(\omega) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{N}{T_0} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_\epsilon \left( \omega - \mu 2\pi \frac{N}{T_0} \right) \\ &\approx \frac{N}{T_0} \tilde{g}_0(\omega) \quad \forall \omega \in \left( -\frac{\pi N}{T_0}, +\frac{\pi N}{T_0} \right), \end{aligned}$$

wenn man  $N$  hinreichend groß wählt. ■

Daraus ergibt sich folgendes Verfahren, für die konkrete (approximative) graphische Darstellung des FOURIER-Spektrums einer (hinreichend gutartigen) Funktion  $g(t)$  ( $\hat{=} \chi_{[0, T_0]}(t) f(t)$ ), die nur im Intervall  $[0, T_0]$  von Null verschieden ist:

1. Man wähle  $N \in 2\mathbb{N}$  groß genug und bestimme die

$$x_j = g\left(j \frac{T_0}{N}\right) \quad \text{für } j = 0, \dots, N-1.$$

2. Man berechne dazu die diskrete FOURIER-Transformation (A.9) und wähle an der Stelle  $k \frac{\pi}{T_0}$  (für  $k = -N/2, \dots, +N/2$ ) jeweils  $\frac{T_0}{\sqrt{2\pi N}} \tilde{x}_k$  als Ordinate.

Die  $\tilde{x}_k$  direkt anhand ihrer Definition aus den  $x_j$  zuberechnen, würde für große  $N$  zu lange dauern. Deshalb bringt man die diskrete FOURIER-Transformation in eine äquivalente Form, die als **schnelle FOURIER-Transformation** (FFT für „fast FOURIER transform“) bezeichnet wird. Diesbezüglich sei auf (Nussbaumer, 1982, Abschnitt 4.2) und Abschn. 2.2.2 von (Lücke, qip) verwiesen.<sup>5</sup>

## A.2 Ableitung der Schallwellengleichung

Wir betrachten das Schwingungsmedium (auch wenn es sich hier meist um Luft handelt) als einen ideal elastischen Körper, dessen Körperpunkte  $\underline{P}$  im **Gleichgewichtszustand** die **karthesischen** Koordinaten  $\mathbf{q}(\underline{P})$  haben.<sup>6</sup> Die entsprechenden Koordinaten im zur Zeit  $t$  vorliegenden deformierten Zustand seien

$$\mathbf{x}(\underline{P}, t) = \mathbf{q}(\underline{P}) + \mathbf{d}(\underline{P}, t), \quad (\text{A.10})$$

wobei  $\mathbf{d}(\underline{P}, t)$  den sog. **Verschiebungsvektor** des Körperpunktes  $\underline{P}$  zur Zeit  $t$  bezeichnet.

Wir beschreiben die Verhältnisse des deformierten Zustandes gemäß LAGRANGE mithilfe der Ortskoordinaten  $\mathbf{q}$  der Körperpunkte im Gleichgewicht.<sup>7</sup> Dementspre-

Version vom 21. November 2009

<sup>5</sup>Siehe auch (Brigham, 1992, Kapitel 10) und (Brigham, 1997).

<sup>6</sup>Wir schreiben  $\mathbf{q}$  statt  $\mathbf{x}$  oder  $\mathbf{y}$ , weil die Komponenten von  $\mathbf{q}$  für den **deformierten** Körper i.a. **krummlinige** Koordinaten darstellen.

<sup>7</sup>Gemäß EULER beschreibt man dagegen die Verhältnisse des deformierten Zustand mithilfe der tatsächlichen Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$ .

chend schreiben wir auch

$$\mathbf{d}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{d}(\underline{P}, t) \quad \text{für } \mathbf{q} = \mathbf{q}(\underline{P}). \quad (\text{A.11})$$

Dabei interessieren wir uns allerdings nur für solche zeitabhängigen Deformationen (kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage), für die

$$\mathbf{x}(\underline{P}, t) \approx \mathbf{q}(\underline{P})$$

gilt, was natürlich z.B. nicht heißen muß, daß auch jeweils die Geschwindigkeit  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{q}, t)$  (des Körperpunktes mit dem Gleichgewichts-Ortsvektor  $\mathbf{q}$ ) klein ist.

**Vereinbarung:** Wir betrachten nur solche Medien (wie ideale Flüssigkeiten und Gase) für die Scherkräfte<sup>8</sup> und (abgesehen von Trägheitskräften) Volumenkräfte vernachlässigt werden können.<sup>9</sup> Auch Viskositätskräfte werden, sofern nicht ausdrücklich anders gesagt, stets vernachlässigt.

Für den Druck  $P$  und die Massendichte  $\mu$  sei die EULERSche Beschreibung verwendet:

$$P(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Druck im deformierten Körper} \\ \text{an der Stelle } \mathbf{x} \text{ zur Zeit } t, \end{cases}$$

$$\mu(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Massendichte im deformierten Körper} \\ \text{an der Stelle } \mathbf{x} \text{ zur Zeit } t, \end{cases}$$

dann gilt nach NEWTON für jeden Vektor  $\mathbf{e}$  und für jedes Gebiet  $\mathcal{G}$  des deformierten Körpers<sup>10</sup>

$$-\int_{\partial\mathcal{G}} P(\mathbf{x}', t) \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} = \int_{\mathcal{G}} \mu(\mathbf{x}', t) \left( \mathbf{e} \cdot \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t) \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}', t)} dV_{\mathbf{x}'}.$$

Dividiert man durch das Volumen  $|\mathcal{G}|$  von  $\mathcal{G}$  und zieht  $\mathcal{G}$  um den beliebigen Punkt  $\mathbf{x}$  zusammen, so erhält man

$$-\text{div}(P(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}) = \mu(\mathbf{x}, t) \left( \mathbf{e} \cdot \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t) \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)},$$

Version vom 21. November 2009

<sup>8</sup>Bzgl. beliebig großer Deformationen mit auftretenden Scher- und Volumenkräften siehe (Lücke, 1977).

<sup>9</sup>Insbesondere beschränken wir uns also auf solche Bereiche in denen die Schwerkraft keine wesentlichen Druckänderungen bewirkt.

<sup>10</sup>Wir verwenden die Schreibweise

$$\dot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{q}, t), \quad \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{d}(\mathbf{q}, t).$$

also

$$-\text{grad } P(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t)|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}$$

und somit in brauchbarer **Näherung**

$$\boxed{-\text{grad } P(\mathbf{x}, t) = \langle \mu \rangle \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{A.12})$$

wobei  $\langle \mu \rangle$  die Massendichte im (globalen) Gleichgewichtszustand bezeichnet. Wir nehmen an, daß die zeitabhängige Zustandsänderung **lokal** stets einem quasistationären thermodynamischen Prozeß bestimmten Typs (z.B. adiabatisch oder isotherm) entspricht, für den die Massendichte allein vom (lokalen) Druck abhängt:

$$\mu(\mathbf{x}, t) = \mu(P(\mathbf{x}, t)).$$

Für die zugehörige **Kompressibilität** <sup>11</sup>

$$\kappa(P) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu(P) \frac{d}{dP} \frac{1}{\mu(P)} \quad (\text{A.13})$$

gilt dann an der Stelle  $\mathbf{x}$  des deformierten Körpers:

$$\kappa(P(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\mu(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\mu(\mathbf{x}, t)}.$$

Für ‘kleine’ Schwingungen um die Gleichgewichtslage und ‘nahezu’ konstante Kompressibilität folgt daraus in brauchbarer Näherung **Näherung**

$$\boxed{\langle \kappa \rangle \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{A.14})$$

wobei  $\langle \kappa \rangle$  die entsprechende Kompressibilität im Gleichgewichtszustand bezeichnet.

**Begründung:** Für die Massendichte gilt definitionsgemäß

$$\frac{1}{\mu(\mathbf{x}, t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{|\mathcal{G}_\epsilon|}{\text{Gesamtmasse innerhalb } \mathcal{G}_\epsilon}$$

für hinreichend gutartige Gebiete  $\mathcal{G}$ , die sich für  $\epsilon \rightarrow 0$  um  $\mathbf{x}$  zusammenziehen, und

Version vom 21. November 2009

<sup>11</sup>Die Definition (A.13) entspricht z.B. der Definition

$$\kappa_S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{V} \left( \frac{\partial}{\partial P} V \right)_{|_S}$$

für die **adiabatische Kompressibilität** eines geschlossenen thermodynamischen Systems, dessen Gleichgewichtszustände durch den Druck  $P$  und die Entropie  $S$  eindeutig charakterisiert sind.

somit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(\mathbf{x}, t)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\int_{\mathcal{G}_\epsilon} dV_{\mathbf{x}}}{\langle \mu \rangle \int_{\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{G}_\epsilon} dV_{\mathbf{q}}} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\int_{\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{G}_\epsilon} \left| \det \left( \frac{\partial x^j(\mathbf{q}, t)}{\partial q^k} \right) \right| dV_{\mathbf{q}}}{\langle \mu \rangle \int_{\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{G}_\epsilon} dV_{\mathbf{q}}} \\
&= \frac{1}{\langle \mu \rangle} \left| \det \left( \frac{\partial x^j(\mathbf{q}, t)}{\partial q^k} \right) \right| \\
&= \frac{1}{\langle \mu \rangle} \det \left( \delta_k^j + \frac{\partial d^j(\mathbf{q}, t)}{\partial q^k} \right) \quad \text{für } \frac{\partial d^j}{\partial q^k} \ll 1 \\
&\approx \frac{1}{\langle \mu \rangle} \prod_{j=1}^3 \left( 1 + \frac{\partial d^j(\mathbf{q}, t)}{\partial q^j} \right) \\
&\approx \frac{1}{\langle \mu \rangle} \left( 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial d^j(\mathbf{q}, t)}{\partial q^j} \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\mu(\mathbf{x}, t)} \approx \frac{1}{\langle \mu \rangle} \left( \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, t) \right)_{|\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)},$$

falls die Geschwindigkeiten der Körperpunkte nicht zu stark von deren Gleichgewichtskoordinaten abhängen, und daraus die Näherung (A.14). ■

**Vereinbarung:** Im folgenden werden stets nur solche Situationen betrachtet, in denen die Näherungen (A.12) und (A.14) sinnvoll sind.

Aus (A.12) und (A.14) ergibt sich unmittelbar die **Wellengleichung**

$$\left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 P - \Delta P = 0, \quad \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{\langle \kappa \rangle \langle \mu \rangle}} \quad (\text{A.15})$$

(als lineare Näherung) für den Druck  $P$ . Aus (A.14) folgt durch zeitliche Integration<sup>12</sup>

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle P \rangle - \frac{1}{\langle \kappa \rangle} \operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{d}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t), \quad (\text{A.16})$$

wobei  $\langle P \rangle$  den Druck im Gleichgewichtszustand bezeichnet, und daraus mit (A.12)

$$\langle \kappa \rangle \langle \mu \rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{A.17})$$

<sup>12</sup>Die Integrationskonstanten sind durch die Bedingungen  $\langle p \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$  festgelegt; vgl. Fußnote 8 von Kapitel 2.

$\mathbf{d}$  besitzt also ein Skalarpotential<sup>13</sup>  $\Phi$ ,

$$\boxed{\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t)}, \quad (\text{A.18})$$

und damit folgt weiter

$$\begin{aligned} \langle \kappa \rangle \langle \mu \rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) &= -\text{grad} \left( \text{div} \left( \text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t) \right) \right) \\ &= -\text{grad} \left( \Delta \Phi(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \Delta \mathbf{d}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Damit gilt also auch die vektorielle Wellengleichung

$$\boxed{\left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{d} - \Delta \mathbf{d} = 0} \quad (\text{A.19})$$

für den Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$ .

Für ebene Longitudinalwellen gilt

$$(1.26) \implies p = \mp \langle \mu \rangle \hat{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.20})$$

(Beweis als Übungsvorschlag), wobei für Luft unter Normaldruck bei absoluter Temperatur  $T$

$$\langle \mu \rangle \hat{c} \approx 428 \left( 1 - \frac{T - T_0}{2T_0} \right) \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}.$$

Für einen Schalldruck von  $10^2 \mu\text{bar}$ <sup>14</sup> bedeutet das

$$|\mathbf{u}|_{\max} \approx 0.24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{bei } 20^\circ \text{ Celsius},$$

und somit z.B.  $|\mathbf{d}|_{\max} \approx 0.38 \text{ mm}$  bei einer Frequenz von 100 Hz, die einer Wellenlänge von  $\approx 3,44 \text{ m}$  entspricht. Solche Schwingungsamplituden sind schon außerordentlich extrem.

### A.3 Kugel- und Zylinderwellen

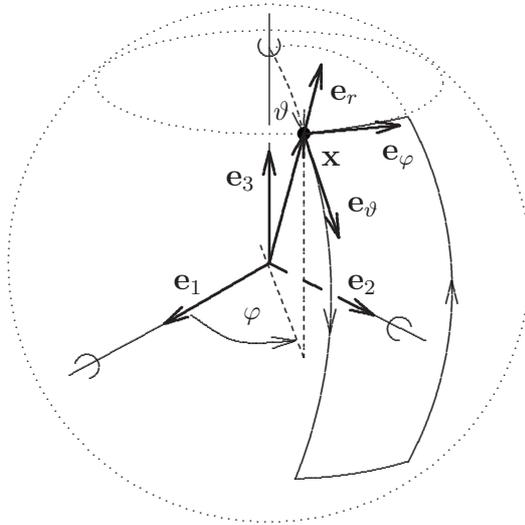
Version vom 21. November 2009

<sup>13</sup>Allgemein nennt man Lösungen von (A.19) *Longitudinalwellen*, wenn ihre Rotation verschwindet. (A.18) gilt für Medien mit komplizierterem Spannungstensor natürlich i.a. nicht mehr.

<sup>14</sup>'Normale' (Maximal-) Werte für den *Schalldruck*  $p \stackrel{\text{def}}{=} P - \langle P \rangle$  liegen zwischen  $10^{-4}$  und  $10^2 \mu\text{bar}$ . Zur Erinnerung:  $1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 1 \text{ atm}$  (siehe z.B. (Ebert, 1967, S. 27)).

In sphärischen Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ ,

$$\mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + r \cos \vartheta \mathbf{e}_3$$



$$r \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{x}| = R, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r,$$

gilt bekanntlich (siehe z.B. Übungsaufgaben 66–69 von (Lücke, ein))

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \Phi)^r &= \frac{\partial}{\partial r} \Phi, \\ (\text{grad } \Phi)^\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi, \\ (\text{grad } \Phi)^\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

sowie

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j^r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta j^\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi \quad (\text{A.22})$$

und somit

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 (r \Phi(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(\mathbf{x}, t) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Damit sieht man leicht, daß auch einlaufende (+) bzw. auslaufende (–) **longitudinale Kugelwellen**

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{g'(r \pm \hat{c}t)}{r} - \frac{g(r \pm \hat{c}t)}{r^2} \right) \mathbf{e}_r \quad (\text{A.24})$$

(für  $r \neq 0$ ) den Gleichungen (A.17) und (A.18) (mit einem geeigneten Skalarpotential  $\Phi$ ) genügen und damit Lösungen von (A.19) sind. Auch hier liegt eine (jetzt

kugelförmige) Ausbreitung mit einer Geschwindigkeit vom Betrag  $\hat{c}$  vor. Für den Schalldruck gilt<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) - \langle p \rangle &= -\frac{1}{\langle \kappa \rangle} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r g'(r \pm \hat{c}t) - g(r \pm \hat{c}t)) \\ &= -\frac{1}{\langle \kappa \rangle} \frac{g''(r \pm \hat{c}t)}{r} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\stackrel{(1.24)}{=} \pm \hat{c} \left( \frac{g''(r \pm \hat{c}t)}{r} - \left( \frac{g'(r \pm \hat{c}t)}{r^2} \right) \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{\mp 1}{\langle \mu \rangle \hat{c}} \left( p(\mathbf{x}, t) - \langle p \rangle - \frac{1}{r^2} \int_0^r \hat{r}' ((p(\mathbf{x}', t) - \langle p \rangle)) dr' \right) \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Anders als bei den fortschreitenden ebenen Wellen sind also Schalldruck und Schnelle (vom Limes  $r \rightarrow \infty$  abgesehen) nicht mehr 'in Phase' miteinander.

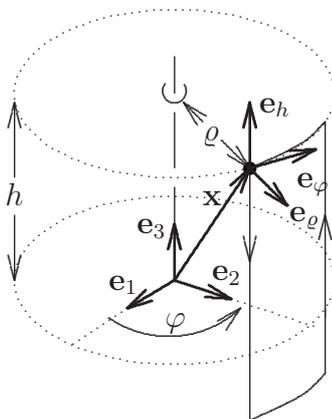
**Übungsaufgabe 10** Man bestimme diejenige auslaufende longitudinale Kugelwelle, die zu gegebenem  $a$  und  $Q(t)$  der Randbedingung

$$|\mathbf{x}| = a \implies \dot{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi a^2} \mathbf{e}_r(\mathbf{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

genügt, die auf der Oberfläche einer radial mit der Geschwindigkeit  $Q(t)$  schwingenden Kugel mit dem Radius  $a$  erfüllt sein muß.

In *Zylinderkoordinaten*  $\rho, \varphi, h$ ,

$$\mathbf{x}(\rho, \varphi, h) = \rho \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_2 + h \mathbf{e}_3,$$



$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho, \quad \rho = R,$$

Version vom 21. November 2009

<sup>15</sup>Aufgrund der Singularität bei  $r = 0$  sind solche Wellen natürlich nicht über den gesamten  $\mathbb{R}^3$  realisierbar, kommen also nur dann in Frage, wenn sich bei  $r = 0$  eine Strahlungsquelle befindet. Durch geeignete Überlagerung solcher Wellen läßt sich aber die Singularität beheben; denn z.B. ist ja

$$\frac{e^{-ik(\hat{c}t-r)}}{r} - \frac{e^{-ik(\hat{c}t+r)}}{r} = 2i \frac{\sin(kr)}{r} e^{-ik\hat{c}t}$$

frei von Singularitäten.

gilt

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \Phi)^\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi, \\(\operatorname{grad} \Phi)^\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi, \\(\operatorname{grad} \Phi)^h &= \frac{\partial}{\partial h} \Phi\end{aligned}\tag{A.25}$$

sowie

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho j^\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} j^\varphi + \frac{\partial}{\partial h} j^h\tag{A.26}$$

und somit

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(\mathbf{x}, t) \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi(\mathbf{x}, t) + \left( \frac{\partial}{\partial h} \right)^2 \Phi(\mathbf{x}, t).\tag{A.27}$$

Nach den Sätzen 1.2.1 und 1.2.3 lassen sich hinreichend gutartige Schallwellen in Zylinderkoordinaten als Überlagerung komplexer **monochromatischer** Schalldruckwellen der Form

$$\mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) e^{-i(\omega t - k_h h - m\varphi)}\tag{A.28}$$

schreiben, die gemäß (A.15) und (A.27) der Gleichung

$$\left( - \left( \frac{\omega}{\hat{c}} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( \frac{m}{\rho} \right)^2 + k_h^2 \right) \mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) = 0$$

genügen müssen.<sup>16</sup> Letzteres ist äquivalent dazu, daß

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{m, k_h} \left( \frac{x}{\sqrt{\left( \frac{\omega}{\hat{c}} \right)^2 - k_h^2}}, \omega \right)$$

Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) f(x) = 0\tag{A.29}$$

Version vom 21. November 2009

<sup>16</sup>Eigentlich ist nur

$$\square \Re \left( \mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) e^{-i(\omega t - k_h h - m\varphi)} \right) = 0, \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \Delta,$$

verlangt, da nur der Realteil des komplexen Schalldrucks physikalisch relevant ist. Wegen

$$\square \Re \left( \mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) e^{-i(\omega(t+t') - k_h h - m\varphi)} \right) = \Re \left( e^{-i\omega t'} \square \mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) e^{-i(\omega(t) - k_h h - m\varphi)} \right)$$

ist das aber äquivalent zu  $\square \mathcal{P}_{m, k_h}(\rho, \omega) e^{-i(\omega(t) - k_h h - m\varphi)} = 0$ .

ist. Da für jeweils festes  $m$  die HANKELschen BESSEL-Funktionen<sup>17</sup>  $H_m^{(1)}$  und  $H_m^{(2)}$  der Ordnung  $m$  unabhängige Lösungen von (A.29) sind, muß also

$$\mathcal{P}_{m,k_h}(\rho, \omega) = A(m, k_h, \omega) H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + B(m, k_h, \omega) H_m^{(2)}(k_\rho \rho), \quad k_\rho = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\hat{c}}\right)^2 - k_h^2}, \quad (\text{A.30})$$

mit geeigneten (i.a. komplexwertigen) Funktionen  $A, B$  gelten.

Damit sieht man leicht, daß auch die einlaufende ( $j = 1$ ) bzw. auslaufende ( $j = 2$ ) *monochromatischen longitudinale Zylinderwelle*

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) &= -\langle \kappa \rangle \frac{1}{\rho} \left( \int_0^\rho \rho' H_0^{(j)}(k\rho') d\rho' \right) \mathcal{P}_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_\rho \\ &= -\frac{\langle \kappa \rangle}{k} H_1^{(j)}(k\rho) \mathcal{P}_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_\rho, \quad \omega = k\hat{c}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

(bzgl. der zweiten Zeile siehe (Jahnke et al., 1960, S. 154)) für jeden komplexen Druck  $\mathcal{P}_0$  (und  $\rho \neq 0$ ) den Gleichungen (A.17) und (A.18) (mit einem geeigneten Skalarpotential  $\Phi$ ) genügt und damit Lösungen von (A.19) ist. Das asymptotische Verhalten folgt aus

$$H_m^{(j)}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{+i(x - \frac{1}{2}m\pi) - \frac{1}{4}\pi i} & \text{für } j = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{1}{2}m\pi) - \frac{1}{4}\pi i} & \text{für } j = 2 \end{cases}$$

(siehe z.B. (Sneddon, 1963, § 37)). Der zugehörige Schalldruck ist<sup>18</sup> nach (A.16)

$$p(\mathbf{x}, t) = H_0^{(j)}(k\rho) \mathcal{P}_0 e^{-i\omega t}.$$

## A.4 Strahlung durch die Öffnung einer schallharten Wand

Für hinreichend gutartige (komplexwertige) Skalarfelder  $\mathcal{P}$ ,  $g$  und Gebiete  $\mathcal{G}$  gilt bekanntlich die 2. GREENSche Identität

$$\int_{\mathcal{G}} (\mathcal{P}(\mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}'} g(\mathbf{x}') - g(\mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}')) dV_{\mathbf{x}'} = \int_{\partial \mathcal{G}} (\mathcal{P}(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} g(\mathbf{x}') - g(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}')) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}$$

(vgl. Gl. (1.18) von (Lücke, edyn)). Für  $g(\mathbf{x}') = K(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  und Lösungen  $\mathcal{P}$  der HELMHOLTZ-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\mathcal{P} = 0 \quad (\text{A.32})$$

Version vom 21. November 2009

<sup>17</sup>Siehe z.B. (Jahnke et al., 1960, S. 131).

<sup>18</sup>Lösungen von (A.15) der Form  $p(\mathbf{x}, t) = p(\rho - ct) f(\rho)$  gibt es nicht, da das HUYGENSsche Prinzip nur für ungerade Raumdimension gilt (siehe z.B. (Courant und Hilbert, 1962, § 6 Nr. 7)).

ist das äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) \int_{\mathcal{G}} \mathcal{P}(\mathbf{x}') K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \\ &= \int_{\partial\mathcal{G}} (\mathcal{P}(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}')) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}. \end{aligned}$$

Für

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

ergibt sich daraus mit

$$(\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) \int_{\mathcal{G}} \mathcal{P}(\mathbf{x}') K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin \bar{\mathcal{G}} \\ -\mathcal{P}(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{G}} \end{cases}$$

(Beweis als Übungsvorschlag) und

$$\nabla_{\mathbf{x}'} K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left( -ik + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} K(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}') + \left( ik - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathcal{P}(\mathbf{x}') \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin \bar{\mathcal{G}} \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{G}} \end{cases} \quad \text{für Lösungen von (A.32)} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{e^{-ik(\hat{c}t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}') + \left( ik - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathcal{P}(\mathbf{x}') \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin \bar{\mathcal{G}} \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-ik\hat{c}t} & \text{falls } \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{G}} \end{cases} \quad \text{für Lösungen von (A.32)}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Wenn  $\mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-ik\hat{c}t}$  sich für asymptotisch wie eine auslaufende Welle  $f(\vartheta) \frac{e^{-ik(\hat{c}t - |\mathbf{x}|)}}{4\pi |\mathbf{x}|}$  verhält, dann kann man (A.34) auch auf den Fall

$$\mathcal{G} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : h = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x} \geq 0 \}$$

anwenden, weil dann das Flächenintegral über den Rand im Unendlichen (natürlich als Grenzwert aufgefaßt) nicht beiträgt. Für bzgl.  $\mathbf{e}_3$  rotationssymmetrisches  $\mathcal{P}$  und  $\mathbf{x} \in \underline{\mathcal{G}}$  gilt dann insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{e^{-ik(\hat{c}t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}') + \left( ik - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{-\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathcal{P}(\mathbf{x}') \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\ &= \int_{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_3 = 0} \frac{e^{-ik(\hat{c}t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}') - \left( ik - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathcal{P}(\mathbf{x}') \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \end{aligned}$$

und somit

$$(A.32) \implies \mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-ik\hat{c}t} = \int_{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0} \frac{e^{-ik(\hat{c}t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \quad \forall \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{G}}, \quad (A.35)$$

falls sich  $\mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-ik\hat{c}t}$  asymptotisch (in  $\mathcal{G}$ ) wie eine auslaufende Welle verhält.

Da nach (A.12)

$$\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{x}) = -ik\hat{c} \langle \mu \rangle \mathcal{U}(\mathbf{x})$$

gilt, läßt für (A.35) auch schreiben:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = k\hat{c} \langle \mu \rangle \int_{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{2\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathcal{U}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}.$$

Speziell für den oszillierenden Kolben in der Wand gilt also

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = k\hat{c} \langle \mu \rangle \mathcal{U}(0) \int_{\substack{\mathbf{x}' \in U_R(0) \\ \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{2\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}|. \quad (A.36)$$

Daraus folgt

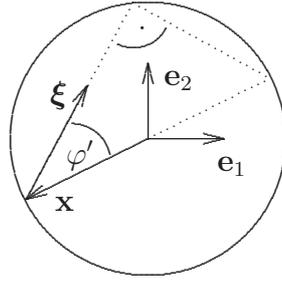
$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} &= \frac{k\hat{c} \langle \mu \rangle}{\pi R^2} \mathcal{U}(0) \int_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U_R(0) \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_h = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{2\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}| |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}| \\ &= 2 \frac{k\hat{c} \langle \mu \rangle}{\pi R^2} \mathcal{S}(0) \int_{\substack{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}| \leq R \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_h = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{2\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}| |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}| \end{aligned} \quad (A.37)$$

für den mittleren Strahlungsreaktionsdruck  $\bar{\mathcal{P}}$  auf die Kolbenoberfläche. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}| \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_h = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}| &= \int_{\substack{\mathbf{x}' \in U_{|\mathbf{x}|}(0) \\ \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}| \\ &= \int_{\substack{\boldsymbol{\xi} \in U_{|\mathbf{x}|}(0) - \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_h = 0}} \frac{e^{ik|\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{\xi}|} |d\mathbf{S}_{\boldsymbol{\xi}}| \\ &\stackrel{\text{Abb. A.1}}{=} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left( \int_0^{2|\mathbf{x}| \cos \varphi'} e^{ik\rho'} d\rho' \right) d\varphi'. \end{aligned}$$

Da für die **BESSEL-Funktionen**

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi \quad \text{für } \Re(z) > -\frac{1}{2} \quad (A.38)$$

Abb. A.1: Integrationsgebiet für  $\xi$ 

(siehe (Jahnke et al., 1960, S. 145)) und für die STRUVESchen *Funktionen*

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi \, d\varphi \quad \text{für } \Re(z) > -\frac{1}{2} \quad (\text{A.39})$$

(siehe (Jahnke et al., 1960, S. 253)), wegen

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

(siehe (Jahnke et al., 1960, S. 7)) insbesondere also

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(z \cos \varphi) \, d\varphi; \quad \mathbf{H}_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(z \cos \varphi) \, d\varphi$$

gilt, folgt daraus

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} \frac{e^{i\pi k |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |\mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}| = \frac{1}{ik} (J_0(2k|\mathbf{x}|) - 1 + i\mathbf{H}_0(2k|\mathbf{x}|))$$

und somit wegen

$$\int_0^x J_0(x') x' \, dx' = x J_1(x), \quad \int_0^x \mathbf{H}_0(x') x' \, dx' = x \mathbf{H}_1(x) \quad (\text{A.40})$$

(siehe (Sneddon, 1963, Gl. (32.1)) bzw. (Jahnke et al., 1960, S. 154) und (Skudrzyk, 1954, Gl. (12,140))) für (A.37)

$$\bar{\mathcal{P}} = \hat{c} \langle \mu \rangle \left( 1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} - i \frac{\mathbf{H}_1(2kR)}{kR} \right) \mathcal{U}(0).$$

und somit (2.12).

Für große Abstände vom Kolben und

$$\mathbf{x} = r (\cos \vartheta \mathbf{e}_3 + \sin \vartheta \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{x}' = \rho' (\cos \varphi' \mathbf{e}_1 + \sin \varphi' \mathbf{e}_2)$$

folgt mit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{r^2 - 2r\rho' \sin \vartheta \cos \varphi' + \rho'^2} \\ &\approx r - \rho' \sin \vartheta \cos \varphi' \end{aligned}$$

aus (A.36)

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) \approx k\hat{c}\langle\mu\rangle \mathcal{U}(0) \int_{\rho'=0}^R \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{ik(r-\rho' \sin \vartheta \cos \varphi')}}{2\pi i r} d\varphi' \rho' d\rho'.$$

Mit

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi'} d\varphi'$$

und (A.40) ergibt sich somit<sup>19</sup>

$$(A.36), |\mathbf{x}| \gg R \implies \mathcal{P}(\mathbf{x}) \approx -ik\hat{c}\langle\mu\rangle R^2 \mathcal{U}(0) \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \frac{J_1(kR \sin \vartheta)}{kR \sin \vartheta}. \quad (A.41)$$

<sup>19</sup>Für  $kR \ll 1$  (und  $|\mathbf{x}|^2 \gg |\mathbf{x}| \gg R$ ) ist die Strahlung also nahezu isotrop!

# Literaturverzeichnis

- Ayers, R. D., Eliason, L. J., und Mahgerefteh, D. (1985). The conical bore in musical acoustics. *Am. J. Phys.*, 53:528–537. [42](#), [54](#)
- Backus, J. (1963). Small-vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35:305–313. [64](#)
- Benade, A. H. (1976). *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press. [3](#), [9](#), [59](#), [61](#), [72](#)
- Beranek, L. L. (1954). *Acoustics*. McGraw-Hill Book Company, Inc. [50](#)
- Boehm, T. (1964). *The Flute and Flute-Playing*. Dover Publications Inc., New York. Translated by Dayton C. Miller.
- Brigham, E. O. (1992). *FFT Schnelle Fourier-Transformation*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien. [76](#)
- Brigham, E. O. (1997). *FFT-Anwendungen*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien. [76](#)
- Brüderlin, R. (1990). *Akustik für Musiker*. Gustav Bosse Verlag, Regensburg. [17](#)
- Carleson, L. (1966). On convergence and growth of partials sums of Fourier series. *Acta Math.*, 116:135157. [8](#)
- Courant, R. und Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics*, Band II Partial Differential Equations. John Wiley & Sons. [84](#)
- Ebert, H. (1967). *Physikalisches Taschenbuch*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. [21](#), [30](#), [80](#)
- Fleischhauer, G., Lustig, M., Ruf, W., und Zschoch, F., Herausgeber (1997). *Stimmungen im 17. und 18. Jahrhundert*, Band 52 von *Michaelsteiner Konferenzberichte*. Stiftung Kloster Michaelstein.
- Fletcher, N. H. und Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag. [3](#), [26](#), [39](#), [59](#), [65](#), [69](#), [70](#)

- Gibson, O. L. (1994). *Clarinet Acoustics*. Indiana University Press. 37
- Helmholtz, H. (1870). *Die Lehre von den Tonempfindungen, als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 3. umgearbeitete Auflage. 3, 9
- Ichinose, T. und Tamura, H. (2001). The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bounds. *Commun. Math. Phys.*, 217:489–502. 51
- Jackson, J. D. (2002). *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter. 21
- Jahnke, E., Emde, F., und Lösch, F. (1960). *Tafeln höherer Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 40, 47, 84, 87
- Jeans, J. (1968). *Science & Musik*. Dover Publications, Inc., New York. 3
- Keefe, D. H. (1982). Theory of the single woodwind tone hole. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72:676–687. 58
- Kollmeier, B. (2002). Cocktail-Partys und Hörgeräte: Biophysik des Gehörs. *Physik Journal*, 1(4):39–45.
- Kratzer, A. und Franz, W. (1960). *Transzendente Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig. 44
- Lamb, H. (1960). *The Dynamical Theory of Sound*. Dover Publications, Inc., New York, 2. Auflage.
- Lawson, C., Herausgeber (2001). *The Cambridge Companion to the Clarinet*. Cambridge University Press.
- Levenson, T. (1997). *Measure for Measure*. Oxford University Press. A Musical History of Science.
- Levin, H. und Schwinger, J. (1948). On the radiation of sound from an unflanged pipe. *Phys. Rev.*, 73:383–406. 39
- Lighthill, M. J. (1966). *Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen*, Band 139 von *B-I-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim. 73
- Lindner, H., Brayer, H., und Lehmann, C. (1999). *Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag. 26
- Lücke, W. (edyn). Elektrodynamik  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf>. 84

- Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf>. 8, 11, 20, 22, 24, 42, 81
- Lücke, W. (ftm). Mathematische Methoden der Physik: Funktionentheoretische Methoden.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ftm.pdf>. 24, 31, 51, 52, 65
- Lücke, W. (mech). Klassische Mechanik  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/mech.pdf>. 45
- Lücke, W. (qip). Introduction to quantum information processing.  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/qip.pdf>. 75, 76
- Lücke, W. (SS 1977). Einführung in die Theorie der idealen Elastizität (endliche deformationen, Skript. Clausthaler Spezialvorlesung. 77
- Lücke, W. (tdst). Thermodynamik und Statistik  
<http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/tdst.pdf>. 29
- Magnus, M., Oberhettinger, F., und Soni, R. P. (1966). *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York. 38
- Meinke, H. H. (1965). *Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen*, Band 1156/1156a von *Sammlung Göschen*. Walter de Gryther & Co. 21
- Moon, P. und Spencer, D. E. (1961). *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, Berlin·Göttingen·Heidelberg. 44
- Morse und Feshbach (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York. 44
- Morse, P. (1948). *Vibration and Sound*. McGraw-Hill. 35, 40
- Nederveen, C. J. (1969). *Acoustical Aspects of Woodwind Instruments*. Uitgeverij Frits Knuf, Amsterdam. Dissertation. 29, 57, 67, 68, 71
- Nussbaumer, H. J. (1982). *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Band 2 von *Springer Series in Information Sciences*. Springer-Verlag. 76
- Olson, H. F. (1967). *Music, Physics, and Engineering*. Dover Publications, Inc., New York, 2. Auflage. 3, 9
- Pierce, J. R. (1989). *KLANG Musik mit den Ohren*. Spektrum DER WISSENSCHAFT. 3
- Rayleigh, J. (1945). *The Theory of Sound, I & II*. Dover Publications, New York.

- Restle, C. und Fricke, H., Herausgeber (2004). *Faszination Klarinette*. Prestel Verlag, München · Berlin · London · New York. **63**
- Rigden, J. S. (1985). *Physics and the Sound of Music*. John Wiley & Sons, 2. Auflage. **3**
- Roederer, J. G. (2000). *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*. Springer-Verlag. **8, 9**
- Schlosser, E.-G. (1979). Tonerzeugung und Toncharakteristika bei Labialpfeifen. *Acustica*, 43:177–187. **72**
- Schumacher, R. (1981). Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acustica*, 48:71–85. **63, 65, 69**
- Sivian, L. J. (1935). Acoustic impedance of small arifices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 7:94–101. **64**
- Skudrzyk, E. (1954). *Die Grundlagen der Akustik*. Springer-Verlag, Wien. **11, 18, 71, 87**
- Sneddon, I. (1963). *Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik*. Bibliographisches Institut, Mannheim. **84, 87**
- Stevens, S. (1980). *Schall und Gehör*, Band 15 von *Das farbige Life-Bildsachbuch*. Rowohlt. **7**
- Webster, A. G. (1919). Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 5:275–282. **42**
- Zeraschi, H. (1978). *Die Musikinstrumente unserer Zeit*. VEB Deutscher Verlag für Musik, Leipzig.

# Index

- absolutes Gehör, 17
- Amplitude, 9
- Ausgleichsvorgänge, 11
- Cent, 12
- Dissonanz, 10
- Dreiklang, 16
  - Dur-, 16
  - Moll-, 16
  - übermäßiger, 18
  - verminderter, 18
- Druck, 28, 77–79
- Dur, 16
- eklemisch, 12
- EULERSche
  - Zustandsbeschreibung, 76
- EULERSche
  - Zustandsbeschreibung, 77
- FOURIER
  - Entwicklungskoeffizienten, 8
  - Reihenentwicklung, 8
  - Transformierte, 10
- Frequenz
  - Abstand, 12
  - Bereich
    - wahrnehmbarer, 26
  - Spektrum, 12
  - Kreis-, 9
- Geräusch, 12
- Geschwindigkeit
  - Gruppen-, 27
- Gleichgewichtszustand, 76, 78, 79
- Gleichung
  - WEBSTER-, 42
- Gruppengeschwindigkeit, 27
- Halbton, 13
  - kleiner, 12
- Horn, 41
- Kammerton, 17
- Klang
  - Drei-, 16
  - übermäßiger, 18
  - verminderter, 18
- Komma
  - pythagoreisches, 17
  - syntonisches, 17
- Kompressibilität, 36, 78
  - adiabatische, 78
- Konsonanz, 10, 12
- Koordinaten
  - karthesische, 76
  - krummlinige, 76
  - Zylinder-, 82
- Kreisfrequenz, 9
- LAGRANGESche
  - Zustandsbeschreibung, 76
- Massendichte, 77
- Moll, 16
- monochromatisch, 31
- Oktave, 13, 16
- Partialtonfolge, 13
- Phase, 9
- Prime, 13, 16
- Psychoakustik, 7
- pythagoreisches Komma, 17

- Quarte
  - reine, 13, 16
- Quinte
  - reine, 13, 16
  - temperierte, 17
- Quintenzirkel, 17
- Register, 70
- reine Stimmung, 13, 17
- Satz
  - kleiner Modulations-, 10
- Schall
  - Ausschlag, 26
  - komplexer, 30
  - Druck, 27
  - komplexer, 30
  - Geschwindigkeit, 27
  - Intensität
    - zeitlicher Mittelwert, 31
  - Schnelle, 27
  - komplexe, 30
  - Wellen
    - monochromatische, 31
- Schwingungs
  - Medium, 76
- Septime
  - große, 12, 16
  - kleine, 12
- Sexte
  - große, 12, 16
  - kleine, 12
- Stimmung
  - reine, 13, 17
  - temperierte, 13, 17
- Suchtonmethode, 10
- syntonisches Komma, 17
- temperierte Stimmung, 13, 17
- Terz
  - große, 13, 16
  - kleine, 13
- Ton, 8
  - Höhe, 12
  - Höhenempfindung, 9
  - Intervalle, 12
    - übermäßige, 18
    - verminderte, 18
  - Leiter, 16
    - erweiterte, 18
  - Ganz-
    - großer, 13, 16
    - kleiner, 13
  - Halb-, 13
    - kleiner, 12
  - Kammer-, 17
  - Partial-, 9
    - Folge, 13
  - Sinus-, 8
  - Such-, 10
- Tritonus, 12
- Verschiebungsvektor, 76
- WEBSTER-Gleichung, 42
- Welle
  - Longitudinal-
    - ebene, 27
- Wellen
  - Gleichung, 79
    - vektorielle, 27, 80
  - Longitudinal-, 26, 80
- Zustands
  - Beschreibung
    - nach EULER, 76
    - nach EULER, 77
    - nach LAGRANGE, 76
- Zylinderkoordinaten, 82