Spezielle Relativitätstheorie

Technische Universität Clausthal
WS 1980/81 – WS 1999/00

W. Lücke

Vorwort

Heute **muß** die Spezielle Relativitätstheorie in der Praxis bereits vielfach berücksichtigt werden (Beschleuniger, Raumfahrt, Astronomie, Kerntechnik usw.), gehört also mittlerweile gewissermaßen zum 'alltäglichen' Erfahrungsbereich des Physikers.

Trotzdem scheint ihr Verständnis immer noch vielfach große Schwierigkeiten zu bereiten. Das liegt vermutlich an psychologischen Barrieren, die daher rühren, daß die Spezielle Relativitätstheorie oft als **prinzipiell** unvereinbar mit der NEWTONschen Raum-Zeit-Vorstellung deklariert und anhand scheinbar sensationeller Sachverhalte (Zwillingsparadoxon, $m = \gamma_{\mathbf{v}}\, m_0\,,\ E = m\, c^2$ usw.) 'erläutert' wird.

Daher soll in dieser Vorlesung auf vielleicht etwas provozierende Weise vorgegangen werden:

Zunächst werden die Transformationsgesetze der Speziellen Relativitätstheorie **auf Grundlage der naiven Äther-Theorie** aus der Erfahrungstatsache abgeleitet werden, daß mit bisher verfügbaren Meßmethoden keine Abhängigkeit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem nachweisbar ist. Damit soll klar werden, daß die NEWTONsche Raum-Zeit-Vorstellung **im Hinblick auf Bezugssystemwechsel** zwar praktisch wertlos, aber keineswegs unvereinbar mit der Speziellen Relativitätstheorie ist.[1] Erst danach wird das Relativitätsprinzip, von dem EINSTEIN sich leiten ließ, diskutiert.

Literaturempfehlungen: (Born, 2001), (Einstein, 1956), (French, 1971), (Rindler, 1969)

Version vom 26. März 2009

[1] Der wesentliche Punkt ist nur der, daß sich die **relativistische** Kinematik – im Gegensatz zur NEWTONschen Theorie nicht auf ideale, sondern auf **reale** Maßstäbe und Uhren bezieht.

Inhaltsverzeichnis

I Relativistische Kinematik **7**

1 Ableitung der Lorentz-Transformation **9**
1.1 Grundsätzliches zur Raum-Zeit-Vorstellung . . . 9
1.1.1 Idealisierungen in der Klassischen Mechanik . . . 9
1.1.2 Naive Äther-Theorie . . . 10
1.1.3 Kontraktionshypothese . . . 11
1.2 Problematik der Uhren-Synchronisation . . . 13
1.2.1 Zeitdilatation . . . 13
1.2.2 Für absolute Synchronisation ungeeignete Verfahren . . . 14
1.2.3 Scheinbare Auswege . . . 15
1.3 Die speziellen Lorentz- Transformationen . . . 17
1.3.1 Meßvorschriften der Speziellen Relativitätstheorie . . . 17
1.3.2 Zweidimensionale Koordinatentransformationen . . . 19
1.3.3 Vierdimensionale Koordinatentransformationen . . . 21

2 Grundphänomene relativistischer Kinematik **23**
2.1 Bedeutung der Lorentz-Gruppe . . . 23
2.1.1 Gruppeneigenschaften . . . 23
2.1.2 Physikalische Interpretation . . . 25
2.1.3 Lichtgeschwindigkeit als obere Schranke . . . 26
2.1.4 Partielle Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme . . . 26
2.2 Einstein's Interpretation . . . 27
2.2.1 Spezielles Relativitätsprinzip . . . 27
2.2.2 Kausalitätsprinzip . . . 29
2.2.3 Zwillingsparadoxon . . . 31
2.3 Passive und Aktive Transformationen . . . 32
2.3.1 Dreier- und Vierervektoren . . . 32
2.3.2 Lorentz-Boosts . . . 34
2.3.3 Vektorielle Darstellung der speziellen Lorentz-Transformationen 35
2.4 Weitere kinematische Effekte . . . 37
2.4.1 Allgemeinere Überlagerung von Geschwindigkeiten . . . 37
2.4.2 Aberration des Lichtes und Superschnappschüss' . . . 39
2.4.3 Thomas-Präzession . . . 41

2.4.4 Die eingeschränkte Lorentz-Gruppe 43

II Relativistische Dynamik 47

3 Dynamik der Massenpunkte 49
3.1 Beschleunigung eines Massenpunkten 49
3.1.1 Eigenzeit 49
3.1.2 Vierer-Geschwindigkeit und -Beschleunigung 50
3.2 Der relativistische Impuls von Massenpunkten 53
3.2.1 Idealisierte Streuexperimente 53
3.2.2 Vierer-Impuls 55
3.2.3 Relativistische Massenpunkt-Modelle 56
3.2.4 Schwerpunktsystem 57
3.3 Kraft und Leistung 58
3.3.1 Additivität der Dreier-Kraft 58
3.3.2 Leistung 60
3.3.3 Vierer-Kraftdichte 61

4 Elektrodynamik 63
4.1 Der elektromagnetische Feldtensor 63
4.1.1 Makroskopische Strom-Ladungs-Verteilungen 63
4.1.2 Kraftwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes 64
4.1.3 Elektrisches Feld und magnetische Kraftflußdichte 65
4.2 Die mikroskopischen Feldgleichungen 66

A Bondi's K-Kalkül 69

B Lorentz-Tensoren 71

Literaturverzeichnis 73

Teil I

Relativistische Kinematik

Kapitel 1

Ableitung der speziellen LORENTZ-Transformation

1.1 Grundsätzliches zur Raum-Zeit-Vorstellung

1.1.1 Idealisierungen in der Klassischen Mechanik

Jede physikalische Theorie ist auf vereinfachende Annahmen (Idealisierungen) angewiesen. Idealisierungen schränken aber andererseits den Gültigkeitsbereich einer Theorie grundsätzlich ein und können sich somit unter Umständen als hemmend für die Weiterentwicklung einer Theorie erweisen. Man sollte als Physiker daher stets bereit sein, gewohnte nützliche Idealisierungen durch realistischere Annahmen zu ersetzen. Einige typische Idealisierungen der Klassischen Mechanik:

absolut starrer Maßstab
Massenpunkt
absolut gleichförmige Bewegung
absolut periodischer Vorgang
Zeitpunkt
absoluter Raumpunkt
absolute Raumrichtung
absolute Gleichzeitigkeit
Euklidische Geometrie des physikalischen Raumes

Keinem dieser Begriffe läßt sich ohne Voraussetzung mindestens eines der übrigen eine **konkrete** Bedeutung beimessen!

Da uns jedoch der kritiklose Umgang mit diesem (offenbar in sich widerspruchsfreien!) Begriffssystem allzu vertraut ist, wollen wir über dessen Problematik **zunächst** hinwegsehen[1] und von den zugehörigen 'Vorstellungen' ausgehend versuchen,

Version vom 26. März 2009

[1] Zumal die meisten der obigen Idealisierungen **notwendiger** Bestandteil auch der Speziellen Relativitätstheorie sind.

das Geschehen bei praktischen Raum-Zeit-Messungen zu 'verstehen'.

1.1.2 Naive Äther-Theorie

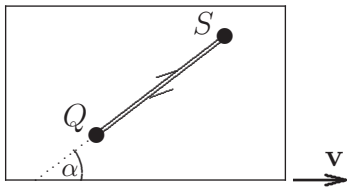
Mit dem Siegeszug der Wellen-Theorie des Lichtes im 19. Jahrhundert über die Korpuskulartheorie verfestigte sich die Vorstellung von einem alle Materialien durchdringenden, homogenen, isotropen, elastischen Medium, dem sog. ***Äther***, in dem sich die **Transversal**-Schwingungen des Lichtes ausbreiten.

Nach dieser Vorstellung müßte das Licht im (nur vom Äther ausgefüllten) leeren Raum (***Vakuum***) eine konstante, vom Bewegungszustand der Lichtquelle unabhängige Geschwindigkeit c **relativ zum Äther** haben.[2]

Die Äther-Vorstellung hat gleichzeitig den **scheinbaren** Vorzug, den in 1.1.1 aufgeführten Begriffen eine konkretere Bedeutung zu verleihen.[3] Die Schwierigkeit ist nur die, daß es vermutlich **prinzipiell** kein reales Verfahren gibt, die Geschwindigkeit z.B. der Erde relativ zum Äther zu bestimmen (vgl. 2.2.1).

Auf den ersten Blick mag diese Aussage unsinnig erscheinen, wenn man z.B. folgender bekannten Überlegung von Michelson (1981) nachgeht, die den Vorzug hinreichend genauer experimenteller Überprüfbarkeit besitzt:

Man betrachte folgende nach üblichen Maßstäben **starre** Anordnung, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} \sim \overrightarrow{QS}_2$ relativ zum Äther bewege:



Man berechnet die Zeit $t(\alpha)$, die ein Lichtsignal benötigt, um von Q nach S und wieder zurück nach Q zu gelangen, leicht zu[4]

$$t(\alpha) = 2\frac{|\overrightarrow{QS}|}{c}\gamma_v^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\sin\alpha\right)^2}\,, \tag{1.1}$$

wobei:

$$\boxed{\gamma_{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}/c)^2}}\,.} \tag{1.2}$$

Version vom 26. März 2009

[2] In **neuerer** Zeit durch Beschleunigerexperimente sehr genau bestätigt; vgl. (French, 1971, Abschn. 3.6.3).

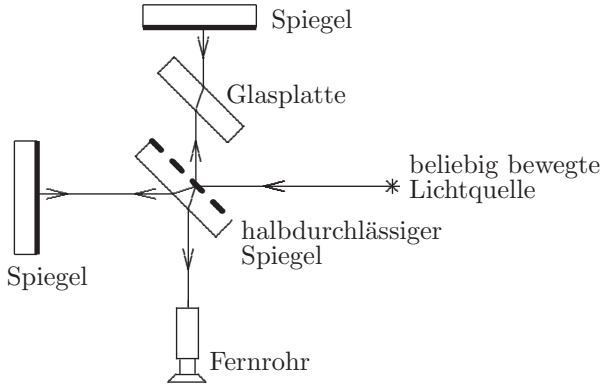
[3] Z.B.: absoluter Raumpunkt $\hat{=}$ feste Stelle im Äther.

[4] Siehe Übungsaufgabe 7 zur *Einführung in die Theoretische Physik I*, WS 1994/95. Mit v bezeichnen wir stets den Betrag der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, mit c den Betrag der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Die längste resp. kürzeste Laufzeit ergibt sich somit für $\alpha = 0$ resp. $\alpha = \pi/2$:

$$t(0) = \frac{2}{c}\gamma_{\mathbf{v}}^2 \left|\overrightarrow{QS}\right| , \quad t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{c}\gamma_{\mathbf{v}} \left|\overrightarrow{QS}\right| \tag{1.3}$$

Zur Überprüfung dieses Laufzeitunterschiedes diente das berühmte Experiment von Michelson und Morley, das vom Prinzip her folgendermaßen aufgebaut war:[5]



(im Ruhesystem der Apparatur betrachtet).

Experimentelles Ergebnis:

Die bei Drehung der Apparatur entspr. (1.1) zu erwartende Verschiebung der Interferenzstreifen stellt sich **nicht** ein!

Anmerkung: c wurde bereits 1676 von Olaf Römer durch Beachtung des Doppler-Effekts bei Beobachtung der Jupitermonde näherungsweise bestimmt (vgl. (Born, 2001, S. 78/79)): $c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Die Erde sollte sich mindestens einmal im Jahr relativ zum Äther mit einer Geschwindigkeit bewegen, deren Betrag nicht unter demjenigen ihrer Relativgeschwindigkeit zur Sonne, etwa $30\frac{\text{km}}{\text{s}}$, liegt. Dann ist $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$. Trotz dieses extrem kleinen Wertes müßte dann beim Michelson-Versuch eine Interferenzverschiebung nachweisbar sein, wie sich durch entspr. Abschätzungen zeigen läßt.

1.1.3 Kontraktionshypothese

Zum negativen Ausgang des Michelson-Morley-Experiments gab es mehrere **Erklärungsversuche:**

(i) Erde im Äther ruhend (Ptolemäus, 150 n. Chr.)
— Äußerst unwahrscheinlich und im Widerspruch zu der von Bradley (1727) beobachteten Aberration des Sternenlichtes (vgl. 2.4.2).

[5] Vgl. (French, 1971, Abschnitte 2.6 und 2.7).

(ii) Totale Äther-Mitführung (MICHELSON)
— Dagegen sprechen die Resultate hinsichtlich **nur** partieller Lichtmitführung in bewegten optischen Medien.[6]

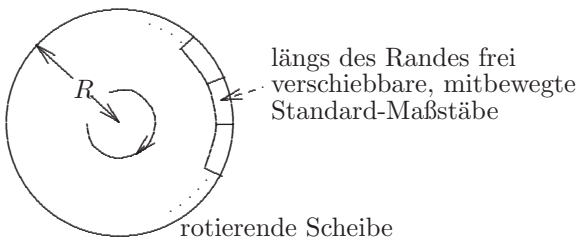
(iii) LORENTZ-Kontraktion (FIZGERALD, LORENTZ, 1892)
Danach erfahren **alle** Gegenstände, die üblicherweise als starr betrachtet werden, in Wirklichkeit eine Verkürzung um den Faktor $\frac{1}{\gamma_v}$ in Richtung ihrer Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ zu Äther.
— Dafür sprechen elektrodynamische Gleichgewichtsbetrachtungen, die LORENTZ anstellte (Lorentz, 1904).
— Dagegen spricht höchstens unsere vorgefaßte Meinung!

Daß die Kontraktionshypothese den negativen Ausgang des MICHELSON-MORLEY-Experiments vollständig (also für jede Stellung der Apparatur relativ zum Ätherwind) erklärt,[7] erkennt man aus (1.1) zusammen mit der Tatsache, daß sich die **kontrahierte** Länge $|\overrightarrow{QS}|$ aus der Ruhelänge $|\overrightarrow{QS}|_0$ gemäß

$$|\overrightarrow{QS}| = \frac{|\overrightarrow{QS}|_0}{\gamma_v \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\sin\alpha\right)^2}} \tag{1.4}$$

berechnet.[8]

Eine solche Kontraktion ist (leider nur) im Prinzip tatsächlich experimentell nachweisbar, wie das folgende Gedankenexperiment von EINSTEIN (Einstein, 1956, S. 39) (vgl. auch (T. E. Phipps, 1980)) zeigt:



Die Zahl der Standard-Maßstäbe, die sich in einer geschlossenen Kette um den Rand legen lassen, hängt bei festem Radius R von der Drehgeschwindigkeit der Scheibe

[6] Z.B. von AIRY und FIZEAU; vgl. (Born, 2001, S. 115–122) bzw. – hier mit Vorsicht – (French, 1971, Abschnitte 2.4 und 2.5).

[7] Eine zusätzliche Ähnlichkeitstransformation würde daran nichts ändern, jedoch dem noch zu besprechenden Relativitätsprinzip (siehe 2.2.1) widersprechen.

[8] (1.4) folgt aus

$$|\overrightarrow{QS}|_0^2 = \left(|\overrightarrow{QS}|\sin\alpha\right)^2 + \left(\gamma_v|\overrightarrow{QS}|\cos\alpha\right)^2 = \left(\gamma_v|\overrightarrow{QS}|\right)^2 + \left(|\overrightarrow{QS}|\sin\alpha\right)^2\left(1-\gamma_v^2\right)$$

mit $\left(1-\gamma_v^2\right) = -\left(\frac{v}{c}\right)^2\gamma_v^2$.

ab (Versagen der Euklidischen Geometrie in beschleunigten Bezugssystemen!).

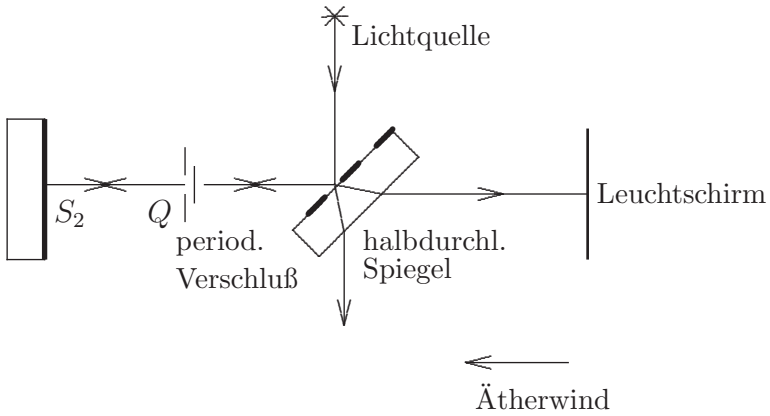
Verabredung: Im Folgenden sei stets angenommen, daß sowohl die naive Äther-Theorie als auch die LORENTZ'sche Kontraktionshypothese richtig sei.[9]

Die LORENTZ-Kontraktion liefert den ersten Hinweis darauf, daß die (aus gutem Grunde!) üblicherweise benutzten Verfahren der Raum-Zeit-Messung **prinzipiell** nicht ideal im Sinne von NEWTON sind!

1.2 Problematik der Uhren-Synchronisation

1.2.1 Zeitdilatation

Prinzip der näherungsweisen **Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit n. Fizeau** (1849; vgl. (Gerthsen, 1963, VI §17)):



(im Ruhesystem der Apparatur betrachtet)
Die Laufzeit t entnimmt man den Verschlußfrequenzen $\nu = \frac{N}{t}$, für die der Leuchtschirm erhellt wird.

Formel (1.1) gilt natürlich auch hier unter der Voraussetzung, daß t, $\mathbf{v}$ und $|\mathbf{QS}|$ mit Uhren und Maßstäben gemessen werden, die relativ zum Äther ruhen. Mit der Definition

$$\|\overrightarrow{QS}\|_{\mathrm{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Zahl der im Labor ruhenden Meterstäbe, die} \\ \text{in eine Reihe zwischen } Q \text{ und } S \text{ passen} \end{cases}$$

und (1.4), also unter Voraussetzung der LORENTZ-**Kontraktion**, folgt daraus:

$$T = \frac{2}{c}\gamma_v \|\overrightarrow{QS}\|_{\mathrm{L}} \cdot \text{Meter} \tag{1.5}$$

[9] Quantenphänomene, die der Wellentheorie widersprechen, seien bewußt außer Acht gelassen.

Somit gibt es für den Äther nur eine Chance, sich **prinzipiell** auch der Beobachtung durch konkrete Laufzeitmessungen zu entziehen, nämlich die sog.

Zeitdilatation:[10] Alle Uhren, die üblicherweise als gleichlaufstabil angesehen werden,[11] zeigen in Wirklichkeit um den Faktor $\frac{1}{\gamma_v}$ zu kleine Zeitintervalle an (laufen also langsamer), wenn sie sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zum Äther bewegen.

Für die Zeitdilatation spricht **heutzutage** z.B. die entsprechende Geschwindigkeitsabhängigkeit der Zerfallszeiten instabiler Elementarteilchen (siehe (French, 1971, Abschn. 4.6)).

Verabredung: Im Folgenden sei stets auch die Zeitdilatation als physikalische Realität angenommen.

1.2.2 Für absolute Synchronisation ungeeignete Verfahren

Trotz Zeitdilatation und LORENTZ-Kontraktion wäre das Äther-Ruhesystem bestimmbar, wenn man räumlich getrennte Uhren absolut synchronisieren könnte: Ein 'starrer' Körper würde sich genau dann relativ zum Äther in Ruhe befinden, wenn seine in einem festen Bezugssystem gemessene Länge maximal wäre. EINSTEIN schloß daraus — indem er die Nichtnachweisbarkeit des Äthers zum Prinzip erhob — daß es **grundsätzlich** kein reales Verfahren zur absoluten Synchronisation räumlich getrennter Uhren gibt, das nicht auf ein anderes solches zurückgreift (womit der Begriff der absoluten Gleichzeitigkeit dann auch absolut inhaltslos ist).

Nun werden aber Längen bewegter Körper i.w. so bestimmt, daß man Anfangs- und Endpunkt zur vermeintlich gleichen Zeit im Labor markiert und dann die Entfernung der Markierungen im Labor mit darin ruhenden Maßstäben ausmißt. Es leuchtet daher sofort ein, daß die ermittelte Länge je nach Synchronisation von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängt. Damit wird der quantitative Begriff des räumlichen Abstandes relativiert.

Die also offensichtlich folgenschwere Problematik der Uhrensynchronisation sei zunächst an einigen Beispielen verdeutlicht:

(i) Uhren-Transport:

Verrückt man von zwei ursprünglich **am gleichen Ort** absolut synchronisiert im Labor ruhenden Standard-Uhren z.B. nur die eine um die Strecke s in Richtung von $\mathbf{v}$, dann wird danach die verrückte Uhr gegenüber der unverrückten

[10] Die Zeitdilatation erklärt auch den negativen Ausgang des Experiments von KENNEDY und THORNDIKE (Kennedy und Thorndike, 1932) (siehe (French, 1971, Abschn. 3.6.2)).

[11] Man beachte, daß sich auch die FIZEAU-Apparatur als eine solche (Licht-) Uhr verwenden läßt!

— im Ruhesystem des Äthers gemessen — aufgrund der Zeitdilatation mindestens um das Zeitintervall $\frac{s\,v}{c^2}\gamma_v$ nachgehen.[12]

Um die Fehlanzeige zu korrigieren, müßte man also die Relativgeschwindigkeit zum Äther kennen!

Entsprechend den Ausführungen von 1.2.1 ließe sich das höchstens durch **absolute** Laufzeitmessungen an **Ein**weg-Lichtsignalen feststellen. Dazu müßte jedoch das Synchronisationsproblem bereits gelöst sein.

(ii) Zeitsignale endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit (z.B. Lichtsignale):

Hier müßte man die endliche (i.a. richtungsabhängige) Laufzeit berücksichtigen und dazu die Signalgeschwindigkeit relativ zum Äther bestimmen — was aber wieder **vorherige** Lösung des Synchronisationsproblems voraussetzt.

(iii) Signalgebung mit 'starren' Körpern:
Man könnte auf den ersten Blick meinen, mithilfe nach üblichen Kriterien als starr angesehener Körper Signale beliebig kleiner Laufzeit erzeugen und damit das Synchronisationsproblem lösen zu können, z.B. mithilfe stoßender Stangen.

Bei genauerer Betrachtung wird sich das jedoch stets als Irrtum herausstellen. Z.B. breitet sich ein Stoß über eine Stange stets wellenförmig mit Unterlichtgeschwindigkeit aus.

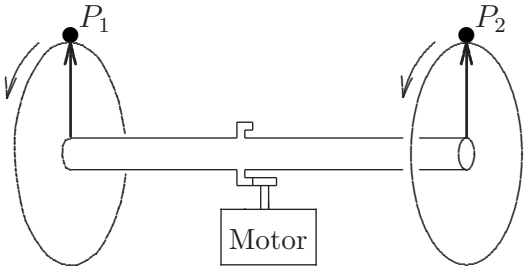
1.2.3 Scheinbare Auswege

Einige besonders kluge Lehrbuchautoren haben erkannt, daß die Synchronisationsverfahren des in 1.2.2 beschriebenen Typs an der universellen Beschränkung der Signalgeschwindigkeiten scheitern und mit Hinweis darauf ihre Verwunderung darüber geäußert, daß nicht schon vor Einstein jemand die Unmöglichkeit absoluter Synchronisation bemerkt habe. Deshalb soll hier gezeigt werden, daß durchaus Verfahren denkbar sind, die keine Signale verwenden und deren Scheitern nur durch äußerst eigenartige Effekte erklärt werden kann:

[12] Der Nachweis reicht offensichtlich für **gleichförmige** Verrückungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}'$ relativ zum Äther. Dann ergibt sich für die Differenz Δt der Zeitanzeige beider Uhren:

$$\Delta t = \left(\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\frac{s}{v'-v} \underset{\text{Mittelwerts.}}{=} -\frac{s\,\hat{v}}{c^2}\gamma_{\hat{v}} \quad \text{für geeignetes } \hat{v} \in [v, v']\,.$$

(iv) Man betrachte folgende Apparatur (vgl. etwa (Marinov, 1980)):

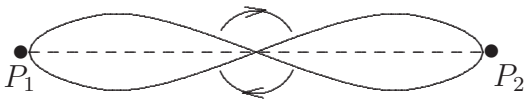


Die Punkte P_1, P_2 ruhen im Laborsystem. Hält der Motor in einer bestimmten Stellung an, so zeigen die Markierungen der Endscheiben auf P_1 bzw. P_2.

Man sollte meinen. daß dann **im Prinzip** auch bei gleichförmig drehendem Motor die Markierungen stets **absolut** gleichzeitig auf P_1 bzw. P_2 zeigen.

Das prinzipielle Versagen dieser Methode läßt sich nur dadurch erklären, daß nach üblichen Kriterien als starr angesehene Zylinder eine von ihrer Relativgeschwindigkeit zum Äther abhängige Verdrillung erfahren, wenn man sie in gleichförmige Rotation versetzt!

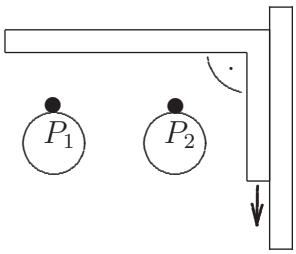
(v) Man verwende einen Propeller, dessen Drehachse genau zwischen P_1 und P_2 liegt und dessen Flügelenden in der Ausgangsruhelage diese Punkte berühren:



Nach einer festgelegten Zahl von Umdrehungen werde die Rückkehr der Propellerspitzen zu ihren Ausgangspositionen als gleichzeitig festgelegt.

Das prinzipielle Versagen dieser Methode läßt sich nur dadurch erklären, daß ein nach üblichen Kriterien als starr anzusehende Propeller eine von der Relativgeschwindigkeit seines Schwerpunktes zum Äther abhängige Deformation[13] erfährt, wenn man sie in gleichförmige Rotation versetzt!

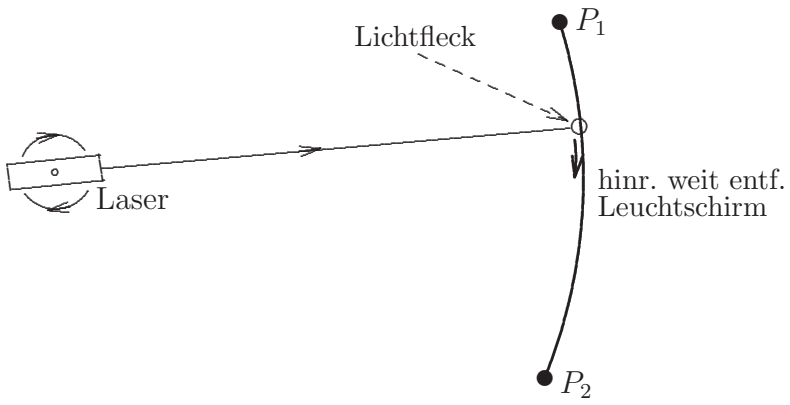
(vi) Ein **vom Labor aus 'gesehen'** stets zu $\overrightarrow{P_1P_2}$ paralleler Schieber löse die bei P_1 resp. $P-2$ befindlichen Startknöpfe der zu synchronisierenden Uhren aus:



[13] Man denke sich den Propeller zu einer Scheibe ergänzt und studiere die Auswirkungen der LORENTZ–Kontraktion.

Das prinzipielle Versagen dieser Methode läßt sich nur dadurch erklären, daß der Schieber in Wirklichkeit (also vom Äthersystem aus beurteilt) eine von seiner Relativgeschwindigkeit zum Äther abhängige Neigung erfährt, wenn man ihn in gleichförmige Bewegung relativ zum Labor versetzt — weshalb er einen der Punkte tatsächlich früher als den anderen berührt.

(vii) Man verwende anstelle eines Signals einen mit hinreichend hoher Geschwindigkeit[14] wandernden Lichtfleck zur beliebig genauen Synchronisation:



Diese Methode versagt aus ähnlichen Gründen wie die in (vi) vorgestellte (vgl. (de A. Martins, 1982)).

1.3 Die speziellen Lorentz- Transformationen

1.3.1 Meßvorschriften der Speziellen Relativitätstheorie

Wenn man nicht feststellen kann, mit welcher Geschwindigkeit sich ein Labor relativ zum Äther bewegt, hat es angesichts der Lorentz-Kontraktion auch wenig Sinn, nach **absoluten** Längen zu fragen. Stattdessen ist es natürlich, den Abstand zweier fester Punkte P_1, P_2 im Labor mit der Länge eines ebenfalls im Labor ruhenden Meterstabs zu vergleichen. Man bezeichnet dann die Größe[15]

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|_{\mathrm{L}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|\overrightarrow{P_1P_2}\|_{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{Meter}$$

als den ***Abstand der Punkte*** P_1, P_2 ***im Laborsystem***.

Entsprechendes gilt angesichts der Zeitdilatation für Zeitabstände, solange man sich auf Ereignisse beschränkt, die an einundderselben Laborstelle stattfinden.

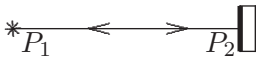
Version vom 26. März 2009

[14] Die Geschwindigkeit eines solchen Lichtflecks läßt sich in vollem Einklang mit der Relativitätstheorie beliebig hoch einrichten!

[15] Man beachte die Definition über (1.5).

Somit läßt sich der **mittlere** Geschwindigkeitsbetrag $\overline{v}_{\mathrm{L}}$ für ein von P_1 nach P_2 ausgesandtes und von P_2 nach P_1 reflektiertes Signal auf übliche Weise — vom Labor abhängig! — definieren:

$$\overline{v}_{\mathrm{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2|\overrightarrow{P_1P_2}|}{\text{Labor-Zeitabst. zw. Signal-Aussendung und -Rückkehr}}$$



(P_1, P_2 im Labor ruhend)

Speziell für Lichtsignale muß sich aufgrund von LORENTZ-Kontraktion und Zeitdilatation für **jedes** Laborsystem der gleiche Wert $\overline{v}_{\mathrm{L}} = c$ ergeben.[16]

Die entsprechend einzuführende mittlere Geschwindigkeit des Signals auf nur **einem** Wege von P_1 nach P_2 hängt dagegen davon ab, wie man den Laborzeitabstand für räumlich getrennte Ereignisse **definiert** — eine Bestimmung des 'absoluten' Zeitabstands ist ja offenbar nicht möglich! Will man nun nicht völlig willkürlich durch eine solche Definition eine Anisotropie der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Labor einführen, so gibt es allerdings nur eine Möglichkeit, nämlich die von EINSTEIN (1905) vorgeschlagene [17]

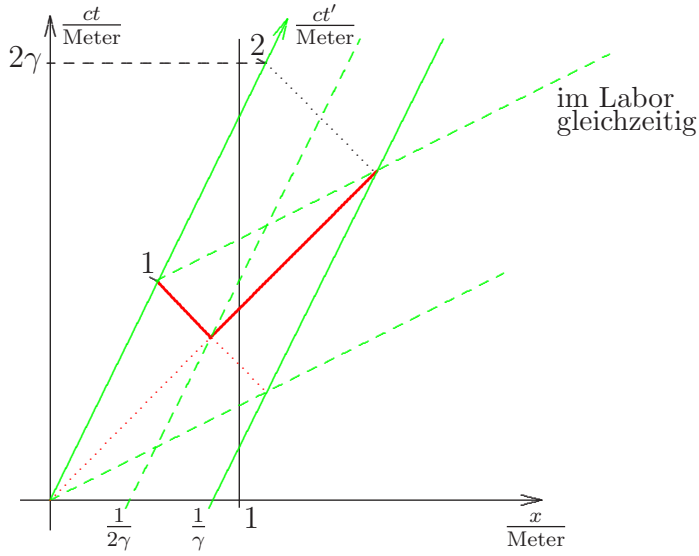
> **Verabredung:** Zwei Ereignisse an den festen Laborpunkten P_1 resp. P_2 sollen genau dann als ***gleichzeitig im Labor*** angesehen werden, wenn sie mit der Ankunft eines auf halber Strecke zwischen P_1 und P_2 ausgesandten Lichtblitzes bei P_1 resp. P_2 zusammenfallen.

Für die Endpunkte P_1, P_2 eines Meterstabs ließe sich das Synchronisationsverfahren im Ruhesystem des 'Äthers' folgendermaßen graphisch darstellen, **wenn** man die (in x-Richtung angenommene) Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Labors relativ zum Äther

[16] Vgl. 1.2.1.

[17] Man kann zeigen, daß die 1.2.2 und 1.2.3 besprochenen Synchronisationsverfahren alle dazu äquivalent sind.

bestimmen könnte:



Nun ist klar, wie ***Zeitabstände im Labor*** für räumlich getrennte Ereignisse zu definieren sind: Man identifiziert sie mit den entsprechenden Zeitabständen zu ihnen 'gleichzeitiger' Ereignisse an einundderselben Laborstelle.

Man sieht sofort, daß sich als Folge dieser Meßvorschriften auch für die Labor-bezogene **Ein**weg-Geschwindigkeit des Lichtes (im Vakuum) unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Wert c ergibt.[18]

Klar ist nun auch, wie man den ***Abstand im Labor zu einem festen Labor-Zeitpunkt*** für zwei beliebig bewegte Massenpunkte P_1', P_2' definiert, nämlich so wie bereits zu Beginn von 1.2.2 beschrieben: Man identifiziert ihn mit dem Labor-Abstand der beiden festen Laborstellen P_1, P_2 an denen sich P_1', P_2' zum betreffenden Labor-Zeitpunkt befinden.

1.3.2 Zweidimensionale Koordinatentransformationen

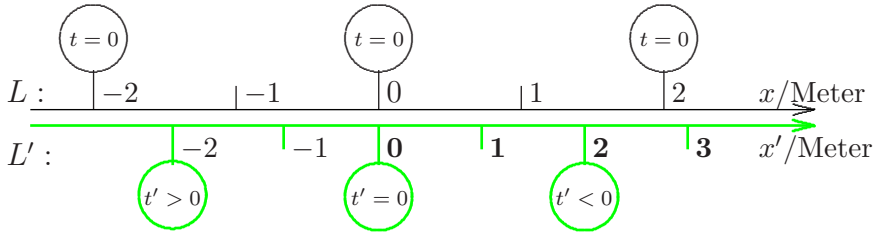
Es liegt nun die Frage nahe, wie die in 1.3.1 definierten Labor-Größen **räumlicher und zeitlicher Abstand, Geschwindigkeit usw.** vom (stets absolut gleichförmig angenommenen[19]) Bewegungszustand des Labors abhängen.

Seien also L und L' zwei Laborsysteme, von denen das erste (also L) relativ zum Äther ruhe, das zweite sich relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ be-

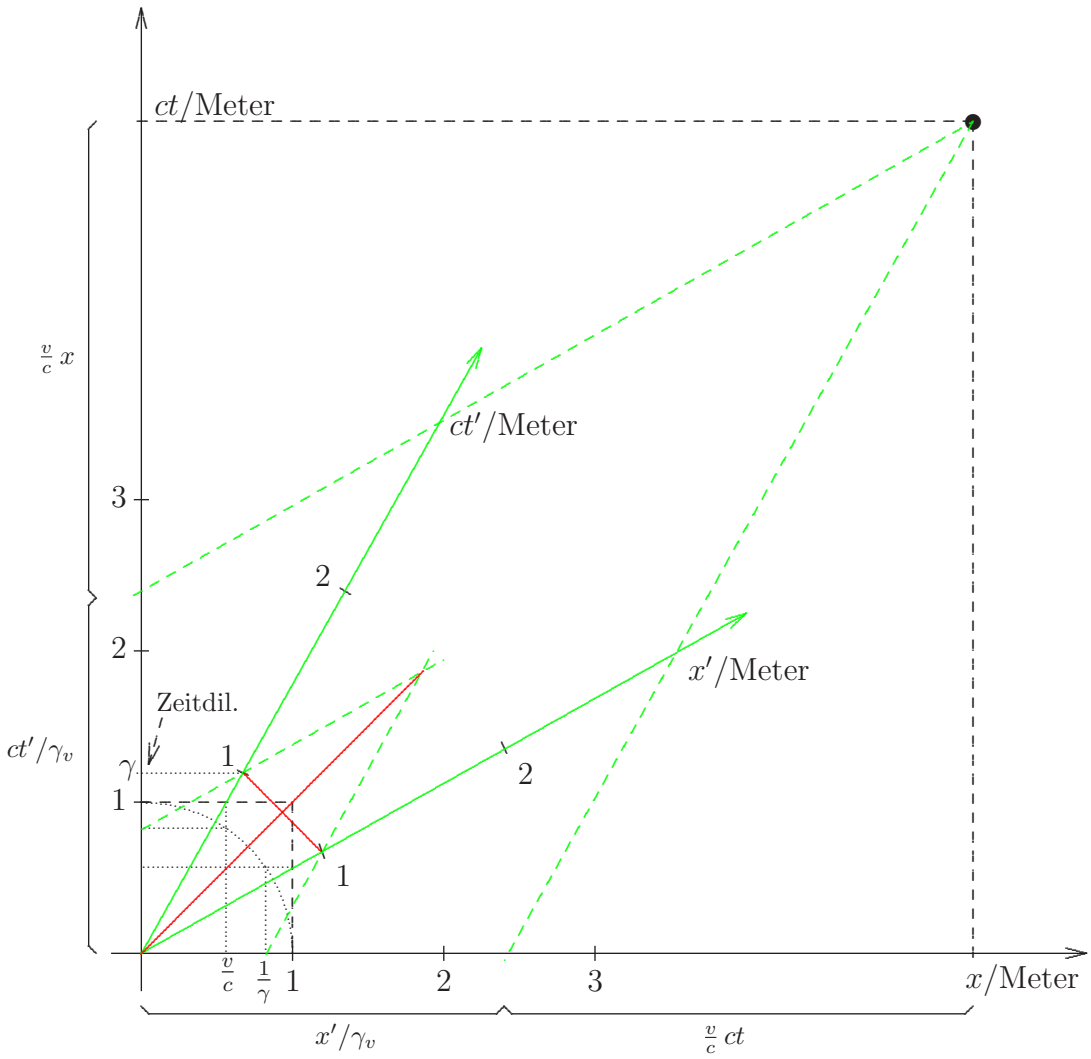
[18] Sei in der Mitte zwischen P_1 und P_2 ein halbdurchlässiger Spiegel aufgestellt. Dann erreicht der durchgehende Anteil eines von P_1 ausgesandten Lichtblitzes P_2 definitionsgemäß zur gleichen Zeit, zu der der reflektierte Anteil zu P_1 zurückkehrt. Folglich stimmt die Einweg-Lichtgeschwindigkeit mit der mittleren Zweiweg-Lichtgeschwindigkeit c überein.

[19] Man überlege sich, wie der Begriff 'gleichförmige Bewegung' von der Gleichzeitigkeitsdefinition abhängt.

wege.[20] Sowohl die x-Achse von L als auch die x'-Achse von L' sei parallel zu $\mathbf{v}$. Die Nullpunkte beider raumzeitlicher Koordinatensysteme mögen übereinstimmen:



Den Zusammenhang zwischen den L-Koordinaten t, x und den L'-Koordinaten t', x' für beliebige Ereignisse auf der x-Achse ($= x'$-Achse) entnimmt man dann mühelos dem folgenden 2-dim. Raum-Zeit-Diagramm:



[20] Dann würden die räumlichen und zeitlichen Labor-Abstände in L mit den absoluten Längen und Zeitintervallen übereinstimmen!

Er ist gegeben durch die ***spezielle*** LORENTZ-***Transformation***[21]

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - \frac{v}{c}ct) \\ ct' &= \gamma_v(ct - \frac{v}{c}x) \end{aligned}} \tag{1.6}$$

und die (gleichstrukturierte!) Umkehrformel

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma_v(x' + \frac{v}{c}ct') \\ ct &= \gamma_v(ct' + \frac{v}{c}x') \end{aligned}} \tag{1.7}$$

1.3.3 Vierdimensionale Koordinatentransformationen

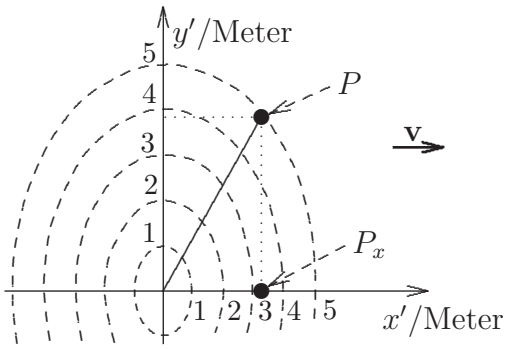
Seien L und L' die bereits in 1.3.2 betrachteten Laborsysteme. Dabei sollen zum Zeitpunkt $t = 0$ in L auch die y-Achse mit der y'-Achse und die z-Achse mit der z'-Achse übereinstimmen.

Es soll der Zusammenhang zwischen den L'-Koordinaten (t', x', y', z') und den L-Koordinaten (t, x, y, z) für ein Ereignis bestimmt werden, das nicht notwendig auf der x-Achse stattfindet.

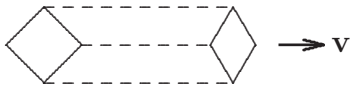
Man macht sich leicht klar, daß man die (durch LORENTZ-Kontraktion bedingte) Abhängigkeit der Gestalt eines üblicherweise als starr angesehenen Körpers von dessen (gleichförmig angenommenen) Bewegungszustand nicht dadurch feststellen kann, daß man ihn mit relativ zu ihm ruhenden ruhenden Standard-Maßstäben vermißt. Folglich stellt auch der Labor-Abstand in L' eine euklidische Norm dar:

Momentanposition von L' in L :

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2_{L'} = \|\overrightarrow{OP_x}\|^2_{L'} + \|\overrightarrow{P_xP}\|^2_{L'}$$

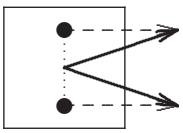


Dabei ist der zugehörige Orthogonalitätsbegriff natürlich Labor-abhängig. So 'erscheint' (beachte in diesem Zusammenhang jedoch 2.4.2) z.B. ein in L' ruhender Würfel von L aus beurteilt i.a. nicht mehr rechtwinklig:



[21] Man beachte die Dualität beider Gleichungen: die eine geht jeweils aus der anderen hervor, wenn man x mit ct und gleichzeitig x' mit ct' vertauscht.

Die x'-, y'- und z'-Achse erscheinen aber auch in L' paarweise orthogonal (aufgrund der speziellen Ausrichtung). Da außerdem L'-Synchronisation von L'-Uhren mit gleicher x'-Koordinate mit der L-Synchronisation (entspr. bewegter Uhren) übereinstimmt, fällt das ***Ereignis***[22] mit den L'-Koordinaten $(t', x', 0, 0)$ mit dem durch die L-Koordinaten $(t, x, 0, 0)$ charakterisierten Ereignis zusammen:[23]



Daher gelten die Formeln (1.6), (1.7) auch für Ereignisse, die nicht auf der x-Achse stattfinden!

Da Einheitsmaßstäbe senkrecht zur Bewegungsrichtung keine Längenänderung erfahren, gilt im übrigen

$$\boxed{y' = y\ , \quad z' = z\ .} \tag{1.8}$$

[22] Wir identifizieren i.a. Ereignisse mit den Raum-Zeitpunkten, an denen sie stattfinden.

[23] Obwohl wir nur vorausgesetzt haben, daß die L'-Koordinaten (t', x', y', z') und die L-Koordinaten (t, x, y, z) einunddemselben Ereignis zukommen.

Kapitel 2

Grundphänomene relativistischer Kinematik

2.1 Folgerungen aus Gruppeneigenschaften der LORENTZ-Transformationen

2.1.1 Gruppeneigenschaften

In Matrix-Form läßt sich die spezielle LORENTZ-Transformation folgendermaßen darstellen:[1]

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{spez. LT}} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v \left(ct - \frac{v_x}{c} x \right) \\ \gamma_v (x - \frac{v_x}{c} ct) \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

wobei:

$$\boxed{\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v \frac{v_x}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma_v \frac{v_x}{c} & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{2.2}$$

Aus (2.2) und der Definition von γ_v in (1.2) ergibt sich[2]

$$\Lambda_{u_x}^{\text{spez.}} \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} = \Lambda_{v_x \hat{+} u_x}^{\text{spez.}} \tag{2.3}$$

Version vom 26. März 2009

[1] Vgl. (1.6)–(1.8). v_x bezeichnet jetzt die (als einzige von 0 verschiedene) Komponente von $\mathbf{v}$ in Richtung der positiven x-Achse. Dann gelten (2.1) und (2.2) auch für den Fall $v_x < 0$ ($v = |v_x|$).

[2] Wegen $\left(1 + \frac{v_x u_x}{c^2}\right) \gamma_v \gamma_u \underset{(1.2)}{=} \gamma_{|v_x \hat{+} u_x|}$.

mit[3]

$$v_x \hat{+} u_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_x + u_x}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}} \tag{2.4}$$

Die Menge aller speziellen LORENTZ-Transformationen zu **fest vorgegebener x-Richtung** $L_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}\right\}$ bildet daher hinsichtlich der gewöhnlichen Matrix-Multiplikation eine Gruppe; d.h.:

1. $\Lambda_{u_x}^{\text{spez.}} \left(\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} \Lambda_{w_x}^{\text{spez.}}\right) = \left(\Lambda_{u_x}^{\text{spez.}} \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}\right) \Lambda_{w_x}^{\text{spez.}} \in L_x$ (***Assoziativität***)
2. $\Lambda_0^{\text{spez.}} \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} = \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} \Lambda_0^{\text{spez.}} = \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}$ (Existenz des ***neutralen*** Elements $\Lambda_0^{\text{spez.}}$)
3. $\Lambda_{-v_x}^{\text{spez.}} \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} = \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} \Lambda_{-v_x}^{\text{spez.}} = \Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}$ (Existenz des zu $\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}$ ***inversen*** Elements $\Lambda_{-v_x}^{\text{spez.}}$)

Mit der ***Zeitspiegelung***soperation

$$T \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

der ***Raumspiegelung***soperation

$$P \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

und der 180°-Drehung um die z-Achse

$$P_3 \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ergibt sich folgende nützliche Darstellung der Umkehrtransformation:

$$\Lambda_{-v_x}^{\text{spez.}} = M \left(\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}} M\right) \quad \text{für } M \in \{T, P, P_3\} \tag{2.8}$$

Im übrigen beachte man die Symmetrie[4] der Matrix $\Lambda_{v_x}^{\text{spez.}}$.

[3]Eine systematische Bestimmung der allgemeinen Überlagerung relativistischer Geschwindigkeiten erfolgt in 2.4.1.

[4]Die Matrizen von Drehungen im 3-dim. euklidischen Raum sind dagegen antisymmetrisch!

2.1.2 Physikalische Interpretation

Gegeben seien folgende vier Laborsysteme, deren Koordinatenachsen zum L-Zeitpunkt 0 zusammenfallen:

Laborsystem	x-Komp. der Geschw. rel. z. Äther	Koordinaten einunddess. Ereignisses
L	0	(ct, x, y, z)
L'	v_x	(ct', x', y', z')
$\hat{L}$	u_x	$(c\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
$\hat{L}'$	$w_x = u_x \hat{+} v_x$	$(c\hat{t}', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$

Dann besagt (2.3), daß sich die $\hat{L}'$-Koordinaten aus den L'-Koordinaten nach den gleichen Regeln ergeben, wie die $\hat{L}$-Koordinaten aus den L-Koordinaten. Somit erscheint ein Meterstab, der in $\hat{L}'$ ruht, in $\hat{L}$ mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_x in x-Richtung bewegt[5] und um den Faktor $1/\gamma_v$ verkürzt. Entsprechend zeigt eine Standard-Uhr, die in $\hat{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_x in x-Richtung bewegt erscheint, Zeitintervalle an, die nur das $1/\gamma_v$-fache der entspr. $\hat{L}$-Zeitintervalle betragen. Da, wie in 2.1.3 gezeigt wird, zu gegebenen u_x , $w_x \in (-c, +c)$ stets ein $v_x \in (-c, +c)$ mit $w_x = U_x \hat{+} v_x$ existiert, folgern wir:

> LORENTZ-Kontraktion und Zeitdilatation treten also als Scheineffekte in jedem ***Inertialsystem*** ('absolut' gleichförmig bewegtes Labor mit den entsprechenden Labor-eigenen Meßvorschriften) auf.[6]

Das ist natürlich nur aufgrund der Labor-Abhängigkeit der Uhren-Synchronisation möglich![7]

Solange man freilich nicht die Geschwindigkeit eines Intertialsystems relativ zum Äther feststellen kann, läßt sich auch nicht konkret entscheiden, ob LORENTZ-Kontraktion und Zeit-Dilatation bzgl. dieses Systems 'wirklich' oder nur vorgetäuscht sind!

Version vom 26. März 2009

[5] Da $\hat{L}$ seinerseits in $\mathbf{L}$ mit der Geschwindigkeit u_x in x-Richtung bewegt erscheint, bezeichnet man (2.4) als relativistisches Gesetz der ***Geschwindigkeitsaddition***.

[6] Diese Aussage erscheint nur dann widersinnig, wenn man z.B. in der Formulierung

$$L\text{-Länge von } M' < L\text{-Länge von } M\ , \quad L'\text{-Länge von } M < L'\text{-Länge von } M'$$

($M^{(')}$: in $L^{(')}$ ruhender Meterstab) die genaue Längenspezifizierung unterschlägt!

[7] Für den Spezialfall $v_x = -u_x$ läßt sich das sehr gut an dem Diagramm auf Seite **??** ablesen.

2.1.3 Vakuum-Lichtgeschwindigkeit als obere Schranke

Aus (2.4) folgt unmittelbar

$$\left|u_x \hat{+} v_x^2\right| = c^2\Big(1 - \underbrace{\frac{\left(c^2-(u_x)^2\right)\left(c^2-(v_x)^2\right)}{\left(c^2+u_x v_x\right)^2}}_{>0}\Big) \quad \text{für } \left|u_x\right|, \left|v_x\right| < c$$

und somit:[8]

$$\mathcal{V}_{u_x} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u_x \hat{+} v_x \,:\, v_x \in (-c,+c)\right\} = (-c,+c)$$

Zwei Unterlichtgeschwindigkeiten (gleicher Richtung) können sich also **physikalisch**, d.h. im Sinne von (2.4) nie zu einer Überlichtgeschwindigkeit aufaddieren![9]

Mithilfe einer genaueren Auswertung dieses Sachverhaltes läßt sich leicht der zu Beginn von 1.1.3 angesprochene Effekt scheinbarer partieller Äther-Mitführung erklären.

2.1.4 Partielle Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme

Aus der Tatsache, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Länge gleichförmig bewegter Maßstäbe sowie der Laufgeschwindigkeit gleichförmig bewegter Uhren in jedem Inertialsystem gleich erscheint,[10] folgt noch nicht, daß das für alle physikalischen Gesetze gilt. Jedoch folgt unter Voraussetzung der Kontinuumstheorie:

Satz 2.1.1 *Ein raumzeitlich homogenes physikalisches Gesetz, das sich in* **jedem** *Inertialsystem räumlich isotrop formulieren läßt, läßt sich in jedem Inertialsystem auf einunddieselbe Weise formulieren.*

Beweis: Seien L und L' Inertialsysteme, deren Koordinaten entspr. (2.1) korreliert sind. Nach (2.3) und (2.4) existieren dann ein $u_x \in (-c,+c)$ und Inertialsysteme L_1, L_2, L_3 mit

$$L = L_1\,,\ L' = L_3$$

und

$$\begin{pmatrix} ct_{j+1}(E) \\ \vdots \\ z_{j+1}(E) \end{pmatrix} = \Lambda_{u_x}^{\text{spez}} \begin{pmatrix} ct_j(E) \\ \vdots \\ z_j(E) \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 1,2 \text{ und beliebige Ereignisse } E\,,$$

wobei:

$$(ct_k(E), \ldots, z_k(E)) \stackrel{\text{def}}{=} L_k\text{-Koordinaten von } E \text{ für } k = 1,2,3\,.$$

[8] Man betrachte die Grenzfälle $v \to \pm c$ und $v \to -u$.

[9] Freilich kann die **mathematische** Relativgeschwindigkeit zweier Körper zueinander in einunddemselben Laborsystem die Lichtgeschwindigkeit durchaus überschreiten.

[10] In 2.4.4 werden wir sehen, daß dies für beliebige Bewegungsrichtungen gilt.

$$\begin{tikzcd}
 & L_2 \arrow[dr, "\Lambda^{\text{spez}}_{u_x}"] & \\
L = L_1 \arrow[ur, "\Lambda^{\text{spez}}_{u_x}"] \arrow[rr, "\Lambda^{\text{spez}}_{v_x} = \Lambda^{\text{spez}}_{u_x}\Lambda^{\text{spez}}_{u_x}"'] & & L' = L_3
\end{tikzcd}$$

Bezeichne $P_3^j(E)$ jeweils dasjenige mögliche Ereignis, das sich von E nur auf folgende Weise durch die Koordinaten unterscheidet:

$$\begin{pmatrix} ct_j\left(P_3^j(E)\right) \\ \vdots \\ z_j\left(P_3^j(E)\right) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} P_3 \begin{pmatrix} ct_j(E) \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}.$$

Dann folgt aus obigen Annahmen mit (2.1):

$$\begin{pmatrix} ct_3\left(P_3^3\left(P_3^2(E)\right)\right) \\ \vdots \\ z_3\left(P_3^3\left(P_3^2(E)\right)\right) \end{pmatrix} = P_3\Lambda^{\text{spez}}_{u_x}P_3\Lambda^{\text{spez}}_{u_x} \begin{pmatrix} ct_1(E) \\ \vdots \\ z_1(E) \end{pmatrix} \underset{(2.8)}{=} \begin{pmatrix} ct_1(E) \\ \vdots \\ z_1(E) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Seien nun G ein gegebenen Gesetz und V ein nach G erlaubter Vorgang. Wenn G isotrop ist, dann sind auch $\hat{\mathcal{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{P_3^2(E) : E \in \mathcal{V}\right\}$ und $\mathcal{V}' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{P_3^3(E) : E \in \hat{\mathcal{V}}\right\}$ nach G erlaubte Vorgänge. Nach (2.9) ist aber $\mathcal{V}' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{P_3^3\left(P_3^2(E)\right) : E \in \mathcal{V}\right\}$ bzgl. $L' = L_3$ genau so beschreibbar, wie V bzgl. $L = L_1$.

Wenn G homogen und isotrop ist, ist die für L, L' benutzte Voraussetzung in (2.1) unerheblich.[11] ∎

Anmerkung: Die Gesetze, denen die schwache Wechselwirkung (β-Zerfall) genügt, sind **nicht** P-invariant (siehe etwa (Ford, 1966, Kapitel VIII, Parität)). Auch scheinen physikalische Gesetzmäßigkeiten zu existieren, die nicht T-invariant sind (Fitch, 1981) (Cronin, 1981). Dagegen hat es bis zum heutigen Tage noch keinen ernsthaften Hinweis auf raumzeitlich inhomogene oder räumlich anisotrope Gesetzmäßigkeiten gegeben! Nach Satz 2.1.1 bedeutet das: Bzgl. der Beschreibung sämtlicher bislang von Physikern untersuchter Gesetzmäßigkeiten scheinen alle Inertialsysteme gleichberechtigt zu sein.[12]

2.2 EINSTEIN's Interpretation

2.2.1 Spezielles Relativitätsprinzip

Die Erfolglosigkeit aller Versuche, den Äther nachzuweisen, konnte EINSTEIN sich nur durch Nichtexistenz desselben erklären. Für ihn war das Raum-Zeit-Kontinuum

[11] Die speziellen Voraussetzungen für (2.1) an die Koordinatensysteme werden zu Beginn von 2.3.2 noch einmal ausführlich beschrieben.

[12] Daraus läßt sich z.B. die in 1.2.3 erwähnte Verdrillung rotierender Zylinder aufgrund ihrer Translationsbewegung ableiten.

'an sich' kein Gegenstand der Betrachtung, sondern seiner Ansicht nach waren einzig und allein die Relationen der materiellen Dinge zueinander für den Ablauf der physikalischen Vorgänge von Bedeutung. Das führte ihn als Vorstufe zur Allgemeinen Relativitätstheorie **direkt** auf folgende Hypothese:[13]

> ***Spezielles Relativitätsprinzip:***
> Naturgesetze lassen sich in allen **Inertialsystemen**[14] auf einunddieselbe Weise raumzeitlich homogen und räumlich isotrop formulieren.

Bei Gültigkeit des speziellen Relativitätsprinzips — woran entspr. 2.1.4 **kaum** noch zu zweifeln ist — wäre der 'Äther' **prinzipiell** unnachweisbar! Die Ätherhypothese reduzierte sich **dann** auf eine absolut gegenstandslose 'Erklärung' für das

> ***Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:***[15]
> Es existiert mindestens ein Inertialsystem, in dem die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit unabhängig sowohl von der Ausbreitungsrichtung als auch vom Erzeugungsvorgang stets den Betrag c hat.

Einstein zog es vor, dieses Prinzip direkt als physikalische Realität zu akzeptieren — etwa als Folge der Maxwell'schen Gleichungen.

Nach den Ausführungen von 1 sollte klar sein, daß sich allein aus den **beiden** hier genannten Prinzipien Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation ableiten lassen. Mit den Einsteinschen Synchronisationsverfahren ergeben sich dann die Lorentz-Transformationen wie in 1.3 (und für gedrehte Koordinatensysteme in 2.3.3).[16]

Will man die Existenz des Äthers nicht voraussetzen, muß man sich nun aber davon überzeugen, daß dieses Synchronisationsverfahren — aufgrund der Konstanz des mittleren Betrags der Lichtgeschwindigkeit über beliebige **geschlossene** Wege — wirklich in sich konsistent ist, d.h. daß die damit vollständig definierte Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation darstellt:[17]

1. Zunächst überzeugt man sich davon, daß von P_1 und P_2 ausgesandte Signale genau dann gleichzeitig am Mittelpunkt der Verbindungsstrecke ankommen,

Version vom 26. März 2009

[13] Man beachte allerdings, daß auch die klassische Newton'sche Theorie dem Relativitätsprinzip genügt, **wenn** man anstelle des Einstein'schen Synchronisationsverfahrens **absolute** Zeitsynchronisation (für die **dann** die in 1.2.2 und 1.2.3 angesprochenen Verfahren als geeignet anzusehen sind) verwendet!

[14] Man beachte, daß der Begriff 'Inertialsystem' verabredungsgemäß neben verschiedenen Idealisierungen ('absolut' gleichförmige Bewegung, Euklidische Geometrie usw.) die Verwendung der in 1.3.1 beschriebenen Meßvorschriften einschließt!

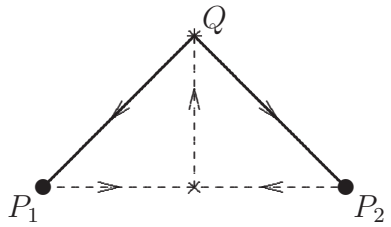
[15] Erst dieses Prinzip zusammen mit dem speziellen Relativitätsprinzip macht eine Abweichung von der Newton'schen Theorie für realisierbare Experimente notwendig.

[16] Vgl. (Einstein, 1905) und (Cook, 1979). Siehe auch Anhang A und (Peres, 1987).

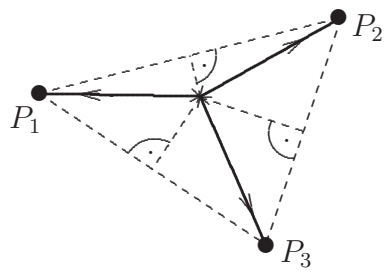
[17] Wir nehmen hier natürlich an, daß der mit 'starren' Maßstäben vermessene physikalische Raum euklidisch ist.

wenn sie im Sinne der EINSTEINschen Definition gleichzeitig von P_1 und P_2 ausgesandt werden.

2. Daraus erkennt man, daß ein Lichtblitz P_1 und P_2 gleichzeitig erreicht, wenn er von irgendeinem Punkt Q derjenigen Ebene ausgesandt wird, die senkrecht zur Verbindungsstrecke zwischen P_1 und P_2 steht und den Mittelpunkt dieser Strecke enthält:



3. Damit läßt sich schließlich zeigen, daß die EINSTEINsche Gleichzeitigkeitsdefinition transitiv ist:



2.2.2 Kausalitätsprinzip

Seien E_1 und E_2 Ereignisse mit den karthesischen L-Koordinaten (ct_1, x_1, y_1, z_1) und (ct_2, x_2, y_2, z_2). Dann schreiben wir $(ct_1, x_1, y_1, z_1) \times (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ bzw. $E_1 \times E_2$, falls die Ereignisse ***raumartig*** zueinander sind; d.h. falls sie in einem geeigneten Laborsystem gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden:[18]

$$\begin{aligned} &(ct_1, x_1, y_1, z_1) \times (ct_2, x_2, y_2, z_2) \\ &\Longleftrightarrow 0 > \underbrace{(ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}_{\text{unabhängig von } L} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Man beweist nun leicht den folgenden

Satz 2.2.1 *Jede der folgenden Bedingungen ist äquivalent zu $E_1 \times E_2$:*

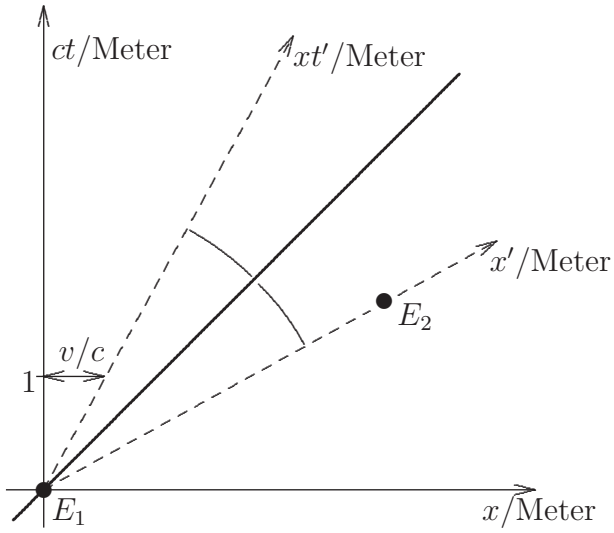
[18] Die Invarianz des Ausdruckes auf der rechten Seite von (2.10) unter räumlichen Drehungen und raumzeitlichen Translationen ist evident, diejenige unter spezieller LORENTZ-Transformation (1.6) folgt aus (A.6) (oder direkte elementare Rechnung). Daraus folgt die Unabhängigkeit von L und der darin gewählten karthesischen Basis.

(i) Es existieren ein Inertialsystem L', in dem E_1 **früher** *als E_2* **und** *ein Inertialsystem $\hat{L}'$, in dem E_1* **später** *als E_2 stattfindet: $t'_1 < t'_2$, $\hat{t}'_1 > \hat{t}'_2$.*

(ii) Es existiert ein Inertialsystem, in dem man sich mit **Überlichtgeschwindigkeit** *bewegen müßte, um an beiden Ereignissen teilzunehmen.*

(iii) In **jedem** *Inertialsystem müßte man sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, um an beiden Ereignissen teilzunehmen.*

Beweisskizze:



O.B.d.A. kann E_0 im Koordinatenursprung und $z_2 = 0$ vorausgesetzt werden. ∎

Nach Satz 2.2.1 stünde eine Wirkungsausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit **aufgrund des speziellen Relativitätsprinzips** im Widerspruch zum

> ***Kausalitätsprinzip:***
> Es existiert ein Inertialsystem, in dem jede Ursache ihrer Wirkung zeitlich vorausgeht.

Da wir natürlich auch das Kausalitätsprinzip als gültig ansehen wollen, müssen wir folgern:

> **Signale** mit Überlichtgeschwindigkeit lassen sich prinzipiell nicht herstellen!

Aufgrund von (2.4) (sowie der entspr. Verallgemeinerung auf Geschwindigkeiten unterschiedlicher Richtung) widerspricht das nicht dem speziellen Relativitätsprinzip und es genügt somit, die Transformationsformeln (1.6) für $v < c$ zu haben.

Warnung: Trotzdem können sich gewisse lokalisierte Effekte, wie z.B. der in 1.2.3 betrachtete Lichtfleck, mit Überlichtgeschwindigkeit 'fortplanzen'!

2.2.3 Zwillingsparadoxon

Obwohl man identifizierbare Objekte (zu denen z.B. der in 1.2.3 erwähnte Lichtfleck **nicht** zählt) nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann, läßt sich **im Prinzip** doch jede (Labor-feste) Stelle im Universum zu Lebzeiten erreichen:

Man muß sich ja 'nur' in ein hinreichend schnelles Raumfahrzeug begeben, um die Lebensabläufe während der Reise — vom ursprünglichen Bezugssystem aus betrachtet — entsprechend zu verkürzen, d.h. die Lebenserwartung entsprechend zu verlängern.[19]
Diese Überlegung führt auf das sog. ***Zwillingsparadoxon:***

> Wenn von einem Zwillingspaar im Kindesalter der eine — nennen wir ihn A — auf der Erde weiterlebt, der andere — nennen wir ihn B dagegen durch den Weltraum reist und erst nach Vergreisung von A zurückkehrt, so kann B bei hinreichend großer Reisegeschwindigkeit durchaus als Kind zurückkehren.

Diese Situation erscheint **nur beim sehr oberflächlicher Betrachtung** als **paradox**, wenn man etwa wie folgt argumentiert:

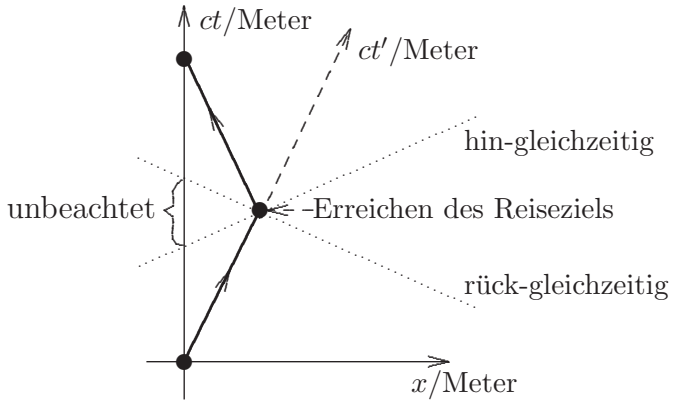
Im Ruhesystem[20] von B erscheinen die Lebensabläufe von A langsamer als die von B. Daher könnte B mit gleichem Recht erwarten, daß ihm A bei der Rückkehr als Kind entgegentritt.

Der Fehler dieser Betrachtung liegt natürlich — wie bei allen scheinbaren Paradoxa der Speziellen Relativitätstheorie — in der stillschweigenden Identifizierung

[19] Andere Betrachtungsweise: Im Ruhesystem L' des Reisenden erscheinen dessen Lebensabläufe wie gewohnt, aber die Entfernung des relativ zu L ruhenden Reiseziels hinreichend verkürzt.

[20] Die Reisegeschwindigkeit sei mit Ausnahme einer relativ kurzen Umkehrphase als konstant angenommen.

objektiv unterschiedlicher Gleichzeitigkeitsbegriffe:



2.3 Passive und Aktive Transformationen

2.3.1 Dreier- und Vierervektoren

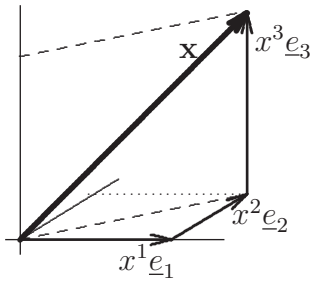
Vereinbarung: Statt (x, y, z) werde jetzt stets (x^1, x^2, x^3) geschrieben. Die den räumlichen Translationen $\mathbf{e}_j$ **in** L entsprechenden Translationen im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum seien mit $\underline{e}_j$ bezeichnet:

$$\underline{e}_j \text{Meter} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} L\text{-instantane Verschiebung um ein} \\ L\text{-Meter in Richtung der } x^j\text{-Achse von } L \end{cases}$$

Unter einem (physikalischen) ***Dreier-Vektor*** **in** L versteht man eine Linearkombination

$$\mathbf{x} = x^1\underline{e}_1 + x^2\underline{e}_2 + x^3\underline{e}_3$$

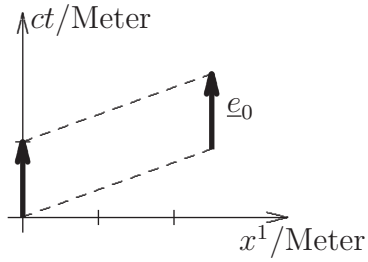
der $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_3$ (mit Koeffizienten $x^1, \ldots, x^3$ beliebiger — jedoch gleicher — physikalischer Dimension).



Natürlich können die karthesischen x^j-Achsen (gemeinsam) beliebig gedreht werden. Die Komponenten von $\mathbf{x}$ sind dann entsprechend zu ändern.

Analog zu den rein L-räumlichen Verschiebungen lassen sich rein L-zeitliche Verschiebungen definieren:

$$\underline{e}_0\text{Meter} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} L\text{-ortsfeste Verschiebung auf den} \\ \text{um } \frac{\text{Meter}}{c} \text{ späteren } L\text{-Zeitpunkt} \end{cases}$$



Unter einem ***Vierer-Vektor*** versteht man eine beliebige Translation im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum. Es ist klar, daß für jedes Inertialsystem L die zugeordneten $\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3$ eine Basis des linearen Raumes $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ aller Vierer-Vektoren bilden. Jeder Vierer-Vektor $\underline{x}$ läßt sich also als entspr. Linearkombination schreiben:

$$\underline{x} = x^0\underline{e}_0 + x^1\underline{e}_1 + x^2\underline{e}_2 + x^3\underline{e}_3$$

Die den Inertialsystemen L zugeordneten karthesischen Basen $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ wollen wir als LORENTZ-***Basen*** bezeichnen. Mit ihrer Hilfe führt man üblicherweise das **indefinite** MINKOWSKI-***Skalarprodukt*** [21]

$$\underline{x} \cdot \underline{y} \stackrel{\text{def}}{=} x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \tag{2.11}$$

ein, für das offensichtlich[22]

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x} \tag{2.12}$$

sowie

$$\underline{x} \cdot (\alpha\underline{y} + \beta\underline{z}) = \alpha(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \beta(\underline{x} \cdot \underline{z}) \tag{2.13}$$

und somit die ***Polarisations-Identität***

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \frac{1}{2}\left(\underline{x} \cdot \underline{x} + \underline{y} \cdot \underline{y} - (\underline{x} - \underline{y}) \cdot (\underline{x} - \underline{y})\right) \tag{2.14}$$

gilt. Außerdem beachte man[23]

$$\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\} \text{ LORENTZ-Basis} \Longrightarrow \underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 \text{ für } \mu = \nu = 0 \\ -1 \text{ für } \mu = \nu \in \{1,2,3\} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{2.15}$$

Version vom 26. März 2009

[21] Die x^ν resp. y^ν bezeichnen natürlich die Entwicklungskoeffizienten von $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$ bzgl. einundderselben LORENTZ-Basis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$. Daß die Definition nicht von der speziellen Wahl der LORENTZ-Basis abhängt, folgt gemäß (2.14) aus der in (2.10) angemerkten Invarianz.

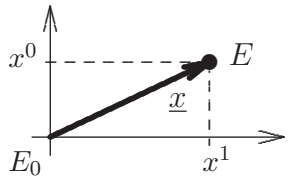
[22] Unter einem ***Skalarprodukt*** versteht man allgemein eine symmetrische Bilinearform. (2.12) beschreibt die Symmetrie und (2.13) die Bilinearität.

[23] Die umgekehrte Implikation gilt nur bei entsprechender Orientierung der Basis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$, da wir von einer LORENTZ-Basis (stillschweigend) verlangen, daß $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ rechtshändig ist.

Nach (beliebiger) Auswahl eines festen Raum-Zeitpunktes E_0 lassen sich die übrigen Raum-Zeit-Punkte (***Ereignisse***, ***Weltpunkte***) E gemäß

$$E = E_0 + \underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Raum-Zeit-Punkt, der durch} \\ \underline{x} \text{ aus } E_0 \text{ hervorgeht} \end{cases}$$

durch entsprechende Vierer-Vektoren $\underline{x}$ charakterisieren. Falls E_0 die L-Koordinaten $(0,0,0,0)$ hat, so stimmen die L-Koordinaten von $E_0 + \underline{x}$ mit den L-Komponenten von $\underline{x}$ überein:



Vereinbarung: Wenn E_0 festgelegt ist, so schreiben wir oft einfach $\underline{x}$ statt $E_0 + \underline{x}$.

Entsprechend (2.10) nennt man

$$\underline{x} \textbf{ ***raumartig***}, \text{ falls } \underline{x} \cdot \underline{x} < 0$$

und schreibt

$$\underline{x} \times \underline{y} \text{ falls } \underline{x} - \underline{y} \text{ raumartig.}$$

Weiterhin nennt man[24]

$$\underline{x} \textbf{ ***zeitartig***}, \text{ falls } \underline{x} \cdot \underline{x} > 0$$
$$\underline{x} \textbf{ ***lichtartig***}, \text{ falls } \underline{x} \cdot \underline{x} = 0$$

2.3.2 Lorentz-Boosts

Seien L und L' wieder zwei Inertialsysteme, deren x^j-Achsen zum Zeitpunkt Null zusammenfallen. Die L-Geschwindigkeit von L' sei $\mathbf{v} = v\,\underline{e}_1$. Die entspr. Lorentz-Basen seien mit $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ resp. $\{\underline{e}'_0, \ldots, \underline{e}'_3\}$ bezeichnet.

Unter diesen Umständen bezeichnet man die ***aktive* lineare** Transformation

$$\underline{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \underline{e}_\mu \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{akt}} \underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \underline{e}'_\mu$$

als Lorentz-***Boost*** zur L-Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Offensichtlich lassen Lorentz-Boosts das indefinite Skalarprodukt (2.11) invariant und deshalb gilt allgemein:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} L\text{-Geschwindigkeit von } L', \quad \{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\} \text{ Lorentz-Basis von } L \\ &\Longrightarrow \left\{\Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{akt}} \underline{e}_0, \ldots, \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{akt}} \underline{e}_3\right\} \text{ Lorentz-Basis von } L'. \end{aligned} \tag{2.16}$$

[24] Für eine LorentzBasis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ sind also $\underline{e}_0$ lichtartig und die $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ raumartig.

Es sei daran erinnert, daß die Schreibweise $\mathbf{x}$ (bzw. $\mathbf{v}$) nur dann benutzt wird, wenn klar ist, auf welchen Raum von Dreier-Vektoren (d.h. auf welches Laborsystem) man sich bezieht.[25] Dann ist auch klar, daß $\underline{e}_0$ in (2.16) **eindeutig** als derjenige Vierer-Vektor festgelegt ist, dessen MINKOWSKI-Skalarprodukt mit sämtlichen Dreier-Vektoren verschwindet. In diesem Sinne ist auch die vereinfachende Schreibweise

$$L'(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\mathbf{x}\,, \tag{2.17}$$

$$\text{wobei:} \quad \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} L\text{-Geschwindigkeit von } L'\,,$$

gemeint, die für Mehrfachboosts (siehe 2.4.1 und 2.4.3) zweckmäßig ist.

Aus (2.1) folgt unmittelbar[26]

$$\begin{aligned} &\underline{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \underline{e}_\mu,\ \hat{\underline{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{v\,\underline{e}_1}\underline{x} = \sum_{\mu=0}^{3} \hat{x}^\mu \underline{e}_\mu \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}^0 \\ \vdots \\ \hat{x}^3 \end{pmatrix} = (\Lambda^{\text{spez}}_v)^{-1} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda^{\text{spez}}_{-v} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Die entsprechende Definition des LORENTZ-Boosts von Raum-Zeit-Punkten

$$\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}} E \stackrel{\text{def}}{=} E_0 + \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\underline{x} \quad \text{für } E = E_0 + \underline{x}$$

hängt natürlich zusätzlich von der Wahl des Bezugspunktes E_0 ab. Wählt man für E_0 den Raum-Zeitpunkt mit den L-Koordinaten $(0,0,0,0)$ und verlegt man sämtliche Ereignisse eines physikalischen Vorganges V auf die entsprechend 'geboosteten' Raum-Zeit-Punkte, so erhält man einen physikalischen Vorgang $\mathcal{V}'$, dessen L'-Beschreibung (bei der oben beschriebenen Koordinatenwahl) mit der L-Beschreibung von V übereinstimmt.

2.3.3 Vektorielle Darstellung der speziellen LORENTZ-Transformationen

Im Gegensatz zu den aktiven LORENTZ-Boosts $\underline{x} \to \Lambda^{\text{akt}}_{v\underline{e}_1}\underline{x}$ bezeichnet man die Transformationen, durch die sich die L'-Komponenten aus den L-Komponenten **einunddesselben** Vierer-Vektors $\underline{x}$ ergeben, als ***passive*** LORENTZ-Transformationen.

[25] Das könnte deshalb zu Verwechslungen führen, weil es stets verschiedene L gibt, bzgl. derer einundderselbe Vierer-Vektor rein raumartig ist.

[26] Die L'-Koordinaten von $\hat{\underline{x}}$ stimmen gemäß Definition der LORENTZ-Boosts mit den L-Koordinaten von $\underline{x}$ überein.

Gemäß (2.1) gilt dafür:[27]

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = v\underline{e}_1,\ \underline{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \underline{e}_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x'^\mu \underbrace{\Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{akt}} \underline{e}_\mu}_{\stackrel{\text{def}}{=} \underline{e}'_\mu} \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ \vdots \\ x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda_v^{\text{spez}} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda_{-v}^{\text{spez}} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \vdots \\ x'^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nach (2.2) läßt sich das mithilfe von Dreier-Vektoren folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= L'\left(\gamma_v(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{v}t) + \mathbf{x}_\perp\right) \\ ct' &= \gamma_v\left(ct - \mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= L\left(\gamma_{v'}(\mathbf{x}'_\parallel - \mathbf{v}'t') + \mathbf{x}'_\perp\right) \\ ct &= \gamma_{v'}\left(ct' - \mathbf{x}'\cdot\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = -L(\mathbf{v}')\,,\ \mathbf{v}' = -L'(\mathbf{v}) \tag{2.21}$$

wobei:

$$\mathbf{x}_\parallel = \left(\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v}\right)\frac{\mathbf{v}}{v}\,,\quad \mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel \quad \text{(und entspr. für } \mathbf{x}'\text{)}\,. \tag{2.22}$$

Warnungen:

(i) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ meint das **euklidische** Skalarprodukt von L-Dreier-Vektoren, **nicht** das MINKOWSKI-Skalarprodukt (2.11); d.h.:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\left(x^1\underline{e}_1 + x^2\underline{e}_2 + x^3\underline{e}_3, y^1\underline{e}_1 + y^2\underline{e}_2 + y^3\underline{e}_3\right)$$

(ii) In der Literatur wird für $L'(\mathbf{u})$ i.a. einfach $\mathbf{u}$ geschrieben, in der stillschweigenden Annahme, daß stets aus dem Zusammenhang hervorgeht, ob wirklich $\mathbf{u}$ oder stattdessen $L'(\mathbf{u})$ gemeint ist.

Erinnerung: Falls $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ LORENTZ-Basis von L und $\mathbf{v}$ die L-Geschwindigkeit von L' ist, dann ist

$$\left\{\underline{e}'_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\mathbf{v}}^{\text{akt}} \underline{e}_\mu\right\} \text{ LORENTZ-Basis von } L'$$

und folgende drei Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbf{x} = L(\mathbf{x}')$

[27] Man beachte das gegenüber (2.10) geänderte Vorzeichen von v_x.

(ii) $\mathbf{x}' = L'(\mathbf{x})$

(iii) Die Komponenten von $\mathbf{x}$ bzgl. $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ stimmen mit den Komponenten von $\mathbf{x}'$ bzgl. $\{\underline{e}'_0, \ldots, \underline{e}'_3\}$ überein.

2.4 Weitere kinematische Effekte

2.4.1 Allgemeinere Überlagerung von Geschwindigkeiten

Seien L, L' Inertialsysteme und $\mathcal{E}$ eine mit konstanter Geschwindigkeit wandernde Folge punktförmiger Ereignisse[28] (z.B. wandernder Lichtfleck oder Massenpunkt) mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &\stackrel{\text{def}}{=} L\text{-Geschwindigkeit von } L' \\
\mathbf{v}' &\stackrel{\text{def}}{=} L'\text{-Geschwindigkeit von } L = -L'(\mathbf{v}) \\
\mathbf{x}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} L\text{-Ortsvektorfunktion von } \mathcal{E} \\
\mathbf{x}'(t') &\stackrel{\text{def}}{=} L'\text{-Ortsvektorfunktion von } \mathcal{E} \\
t(t') &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} L\text{-Zeitpunkt desjenigen Ergeignisses } E \in \mathcal{E}, \\ \text{das zum } L'\text{-Zeitpunkt } t' \text{ stattfindet} \end{cases}
\end{aligned}$$

Problem:[29]

$$\text{Man bestimme } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)_{|t=t(t')} \text{ in Abhängigkeit von } \mathbf{v} \text{ und } \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\mathbf{x}'(t')\right).$$

Lösung:

Nach (2.20) gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(t(t')\right) &= L\left(\gamma_v\left(\mathbf{x}'(t')\cdot\frac{\mathbf{v}'}{v'^2} - t'\right)\mathbf{v}' + \mathbf{x}'(t') - \left(\mathbf{x}'(t')\cdot\frac{\mathbf{v}'}{v'}\right)\frac{\mathbf{v}'}{v'}\right) \\
ct(t') &= \gamma_v\left(ct' - \mathbf{x}'(t')\cdot\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \\
L(\mathbf{v}') &= -\mathbf{v}
\end{aligned}$$

und daher gemäß Kettenregel:[30]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)_{|t=t(t')} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}t(t')\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\mathbf{x}\left(t(t')\right) = \frac{\gamma_v\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v^2}+1\right)\mathbf{v} + \mathbf{u} - \left(\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v^2}\right)\mathbf{v}}{\gamma_v\left(1+\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c^2}\right)}$$

[28] Sowohl in L als auch in L' finde zu jedem Zeitpunkt **genau ein** Punktereignis aus $\mathcal{E}$ statt und es sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}t(t') \neq 0$.

[29] Man beachte, daß auch $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\mathbf{x}(t')\right| > c$ zugelassen ist!

[30] Man beachte $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = L'(\mathbf{u})\cdot L'(\mathbf{v}) \quad \left(= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\mathbf{x}'(t')\cdot\mathbf{v}'\right)$.

Folgerung:

$$\boxed{\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}+(\gamma_v-1)\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2}\right)\mathbf{v}}{\gamma_v\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}} \tag{2.23}$$

ist die (konstante) L-Geschwindigkeit von $\mathcal{E}$, **falls** die L'-Geschwindigkeit von $\mathcal{E}$ konstant $L'(\mathbf{u})$ ist.

Zur Kontrolle von (ref1.2.14) seien zwei Spezialfälle betrachtet:

1. Fall:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\sim\mathbf{u} \underset{(2.23)}{\Longrightarrow} \mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}+(\gamma_v-1)(\mathbf{v}+\mathbf{u})}{\gamma_v\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} \quad \text{im Einklang mit (2.4)}\end{aligned}$$

2. Fall:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=0 \underset{(2.23)}{\Longrightarrow} \mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}=\mathbf{v}+\frac{\mathbf{u}}{\gamma_v} \quad \text{im Einklang mit der Zeitdilatation}$$

Die Zuordnung $\mathbf{v},\mathbf{u}\to\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}$ ist hiernach also **nicht kommutativ!**

Aus (2.23) folgt

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right)=\frac{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{u})}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}} \tag{2.24}$$

sowie

$$\boxed{\left|\mathbf{v}\times\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right)\right|=\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|}{\gamma_v\left|1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right|}} \tag{2.25}$$

und daraus wegen

$$\left|\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right|^2=\left|\frac{\mathbf{v}}{v}\cdot\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right)\right|^2+\left|\frac{\mathbf{v}}{v}\times\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right)\right|^2 \tag{2.26}$$

schließlich durch elementare Rechnung

$$\left|\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right|^2=\frac{|\mathbf{v}+\mathbf{u}|^2-c^{-2}|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|^2}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}=c^2\left(1-\frac{(c^2-v^2)(c^2-u^2)}{(c^2+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})^2}\right) \tag{2.27}$$

für beliebige $\mathbf{v},\mathbf{u}$ mit $v<c$ und[31] $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\neq -c^2$.

[31] Vgl. Fußnote 28.

Hinweis zu (2.27) Man berechne $\gamma_v^2 v^2 \left|\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right|^2$ und beachte dabei, daß aus $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|^2 = \mathbf{v}^2\mathbf{u}^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})^2$ (siehe Gl. 2.24 von (Lücke, ein)) die Gleichung $(v^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u})^2 = v^2\,|\mathbf{v}+\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}\times\mathbf{u}|^2$ folgt und daß $\gamma_v^2 - 1 = \dfrac{\gamma_v^2 v^2}{c^2}$.

Ob sich ein lokalisierter Effekt (etwa ein Lichtfleck) mit Lichtgeschwindigkeit, mit Überlichtgeschwindigkeit oder mit Unterlichtgeschwindigkeit fortplanzt, hängt also nicht vom Inertialsystem ab,[32] auf das sich diese Aussage bezieht! Aufgrund der Invarianz des MINKOWSKI-Skalarprodukts ist das allerdings ohnehin klar.

2.4.2 Aberration des Lichtes und 'Superschnappschüsse'

Im Falle $u = c$ folgen aus (2.24) und (2.25) mit[33]

$$\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right) = cv\cos\theta\,, \quad \left|\mathbf{v}\times\left(\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right)\right| = cv\,|\sin\theta|$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = L'(\mathbf{v})\cdot L'(\mathbf{u}) = cv\cos\theta'\,, \quad |\mathbf{v}\times\mathbf{u}| = |L'(\mathbf{v})\times L'(\mathbf{u})| = cv\,|\sin\theta'|$$

die Formeln für die sog. ***Aberration*** (scheinbare Richtungsänderung bei Inertialsystemwechsel) des Lichtes:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'} \tag{2.28}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma_v\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta'\right)} \tag{2.29}$$

Die Abweichung der relativistischen Größe

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

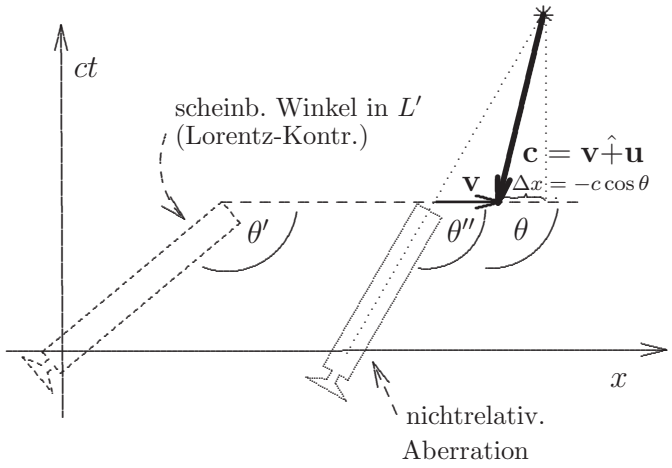
von der entsprechenden Größe der NEWTON'schen Theorie

$$\cos\theta'' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - 2\frac{v}{c}\cos\theta + \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

[32] Wegen $(c^2 - v^2)(c^2 - u^2) > 0$ (resp. < 0) für $u < c$ (resp. $u > c$).

[33] Man beachte: $|v| < c\,,\ |\mathbf{u}| = c \Longrightarrow \left|\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}\right| = c\,.$

ist ausschließlich auf die LORENTZ-Kontraktion zurückzuführen:[34]



Satz 2.4.1

Gegeben: (i) *Inertialsysteme* L, L'

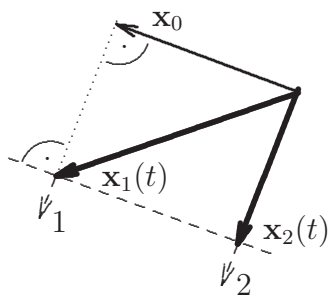
(ii) *L-Ortsvektorfunktionen* $\mathbf{x}_j(t)$, $j \in \{1,2\}$, *mit:*

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{c}\,t + \delta_{1j}\,\mathbf{x}_0\,, \quad \mathbf{x}_0 \perp \mathbf{c}\,, \quad |\mathbf{c}| = c$$

Behauptung: *Auch die entsprechenden L'-Ortsvektorfunktionen $\mathbf{x}'_j(t')$ sind von der Form*

$$\mathbf{x}'_j(t') = \mathbf{c}'\,t' + \delta_{1j}\,\mathbf{x}'_0\,, \quad \mathbf{x}'_0 \perp \mathbf{c}'\,, \quad |\mathbf{c}'| = c\,,$$

wobei außerdem $|\mathbf{x}'_0| = |\mathbf{x}_0|$ gilt.[35]



[34]Denn: $-\cos\theta'' = \dfrac{v - c\,\cos\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta + (v - c\,\cos\theta)^2}}\,, \quad -\cos\theta' = \dfrac{\gamma_v(v - c\,\cos\theta)}{\sqrt{c^2\sin^2\theta + (\gamma_v(v - \cos\theta))^2}}$

[35]Die Norm $|.|$ hängt natürlich jeweils vom Intertialsystem ab, auf das sich der 3-er Vektor bezieht.

Beweis: Natürlich existieren $\mathbf{c}', \mathbf{x}'_0$ mit

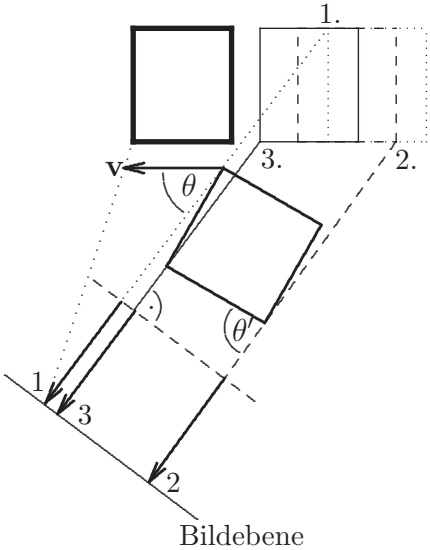
$$\mathbf{x}'_j(t') = \mathbf{c}'t' + \delta_{1j}\mathbf{x}'_0\,,$$

wobei nach (2.27) auch $\mathbf{c}'$ den Betrag c hat. Damit gilt für **beliebige** t'_1, t'_2:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'_0|^2 + 2\,(t'_1 - t'_2)\,\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{c}' &= |\mathbf{x}'_1\,(t'_1) - \mathbf{x}'_2\,(t'_2)|^2 - (ct'_1 - ct'_2)^2 \\ &\underset{(2.10)}{=} |\mathbf{x}_1\,(t_1) - \mathbf{x}_2\,(t_2)|^2 - (ct_1 - ct_2)^2 \\ &= |\mathbf{x}_0|^2 + 2\,(t_1 - t_2)\,\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{x}_0|^2\,. \end{aligned}$$

Für $t'_1 = t'_2$ folgt daraus zunächst $|\mathbf{x}'_0| = |\mathbf{x}_0|$ und damit für $t'_1 \neq t'_2$ schließlich auch $\mathbf{x}'_0 \perp \mathbf{c}'$. ∎

Nach diesem Satz ist die Gesamtheit aller sog. ***Superschnappschüsse***[36] einunddesselben 'starren' Objekts hinsichtlich ihrer Geometrie[37] vom Bewegungszustand der 'Kamera' unabhängig:



Superschnappschüsse sind näherungsweise durch normale Photographien hinreichend weit entfernter Objekte realisiert.

2.4.3 THOMAS-Präzession

Gegeben:
(i) Inertialsysteme L, L'
(ii) L-Geschwindigkeiten $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ mit $\mathbf{v} = L$-Geschwindigkeit von L'
(iii) LORENTZ-Basis $\{\underline{e}_\mu\}$ von L

[36] Vgl. (Terrel, 1959). Bzgl. einer anderen Aufnahmetechnik siehe (Penrose, 1959)

[37] Farb- und Intensitätsverteilung der Bilder hängen natürlich vom Bewegungszustand der Kamera ab.

Gesucht: Zusammenhang zwischen den LORENTZ-Basen

$$\left\{\underline{e}''_\mu \overset{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{L'(\mathbf{u})}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\,\underline{e}_\mu\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\hat{\underline{e}}_\mu \overset{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}}\,\underline{e}_\mu\right\}.$$

$$\begin{tikzcd}
\left\{\underline{e}'_\mu \overset{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\,\underline{e}_\mu\right\} \arrow[rr, "L'(\mathbf{u})"] & & \left\{\underline{e}''_\mu\right\} \arrow[d, leftrightarrow, "?"] \\
\left\{\underline{e}_\mu\right\} \arrow[u, "\mathbf{v}"] \arrow[rr, "\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}"'] & & \left\{\hat{\underline{e}}_\mu\right\}
\end{tikzcd}$$

Teillösung: Nach 2.4.1 sind $\left\{\underline{e}''_\mu\right\}$ und $\left\{\hat{\underline{e}}_\mu\right\}$ LORENTZ-Basen einunddesselben Inertialsystems L''; d.h. :

$$\hat{\underline{e}}_0 = \underline{e}''_0 \tag{2.30}$$

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[dr, "L'(\mathbf{u})"] & \\
L \arrow[ur, "\mathbf{v}"] \arrow[rr, "\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}"'] & & L''
\end{tikzcd}$$

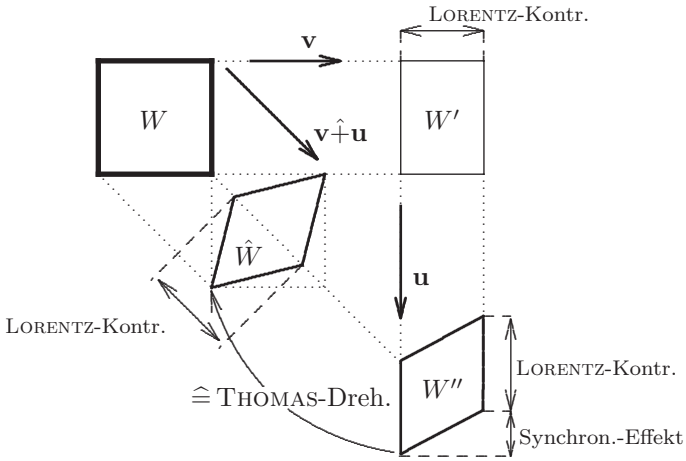
Dementsprechend gilt

$$\hat{\underline{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} D_{jk}\,\underline{e}''_k \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \tag{2.31}$$

mit einer geeigneten **Drehmatrix** (D_{jk}). **Tatsächlich:**

$$\hat{\underline{e}}_j \overset{\text{i.a.}}{\neq} \underline{e}''_j \tag{2.32}$$

Begründung: (2.32) erkennt man durch Betrachtung der entsprechenden L-**Momentan-**Positionen (in besonders einfachen Fällen):



W:	in	L	ruhender Einheitswürfel mit	$\underline{e}_j$-parallelen Kanten
W':	in	L'	ruhender Einheitswürfel mit	$\underline{e}'_j$-parallelen Kanten
W'':	in	L''	ruhender Einheitswürfel mit	$\underline{e}''_j$-parallelen Kanten
$\hat{W}$:	in	L''	ruhender Einheitswürfel mit	$\underline{\hat{e}}_j$-parallelen Kanten

Die (2.31) entsprechende L-räumliche Drehung bezeichnet man als THOMAS-***Drehung***:

$$D^{\text{akt}}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}\underline{e}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underline{e}_0 & \text{für } \mu = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} D_{\mu k}\,\underline{e}_k & \text{für } \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{2.33}$$

Aus (2.31) folgt

$$\begin{aligned} LL'\overbrace{L''\underline{e}_j}^{\underline{\hat{e}}_j} &= \sum_{k=1}^{3} D_{jk} \underbrace{L\,L'\overbrace{L''\underbrace{L'\underline{e}_k}_{\underline{e}'_k}}^{\underline{e}''_k}}_{\underline{e}'_k} \\ &= \sum_{k=1}^{3} D_{jk}\,\underline{e}_k \end{aligned}$$

und somit

$$D^{\text{akt}}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}\,(ct\,\underline{e}_0 + \mathbf{x}) = ct\,\underline{e}_0 + LL'L''\mathbf{x} \tag{2.34}$$

für beliebige L-Zeiten t und L-Ortsvektoren $\mathbf{x}$.

Wenn man ein Kreiselsystem kontinuierlich so boostet, daß es sich auf einer festen Umlaufbahn bewegt, so erfährt das System dadurch eine kontinuierliche THOMAS-Drehung, die man auch als THOMAS-***Präzession*** bezeichnet.[38]

2.4.4 Die eingeschränkte LORENTZ-Gruppe

Lemma 2.4.2

Gegeben: (i) *Inertialsysteme* L, L'; $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} L$ *-Geschwindigkeit von* L'
(ii) L*-Geschwindigkeit* $\mathbf{u}$

Behauptung: $\Lambda^{\text{akt}}_{L'(\mathbf{u})} = \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{u}}\left(\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\right)^{-1}$.

Beweis: Sei $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ eine LORENTZ-Basis von L. Dann ist definitionsgemäß

$$\left\{\underline{e}'_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\underline{e}_\mu\right\} \text{ LORENTZ-Basis von } L' \tag{2.35}$$

und es existiert eine Matrix $\left(\Lambda_\mu^{\cdot\,\nu}\right)$ mit

$$\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{u}}\underline{e}_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_\mu^{\cdot\,\nu}\underline{e}_\nu \tag{2.36}$$

[38] Die zugehörige kinetische Energie ist für die Feinstruktur der Atomspektren wesentlich.

Entsprechend der Definition von $L'(\mathbf{u})$ gilt somit

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\text{akt}}_{L'(\mathbf{u})}\,\underline{e}'_\mu &= \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_\mu^{\cdot\,\nu}\,\underline{e}'_\nu \\
&\underset{(2.35)}{=} \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_\mu^{\cdot\,\nu}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\,\underline{e}_\nu \\
&\underset{\text{Linearit.}}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}} \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_\mu^{\cdot\,\nu}\,\underline{e}_\nu \\
&\underset{(2.36)}{=} \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{u}}\,\underline{e}_\mu\,.
\end{aligned}$$

Mit (2.35) folgt daraus die Behauptung. ∎

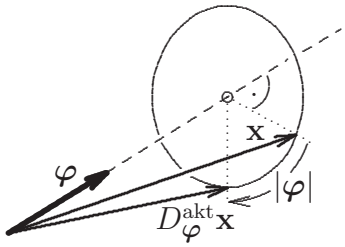
Da nach (2.31) und (2.33)

$$\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}} = \Lambda^{\text{akt}}_{L'(\mathbf{u})}\,\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\,D^{\text{akt}}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}$$

gilt, folgt aus Lemma 2.4.2:

$$\boxed{\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{u}} = \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}\hat{+}\mathbf{u}}\left(D^{\text{akt}}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}\right)^{-1}.} \tag{2.37}$$

Für L-Dreiervektoren $\boldsymbol{\varphi}$ (ohne phys. Dim.) sei mit $D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ stets die L-räumliche Drehung im Rechtsschraubensinn um die $\boldsymbol{\varphi}$-Achse um den Winkel $|\boldsymbol{\varphi}|$ bezeichnet:



$$\left(D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\,\underline{e}_0 = \underline{e}_0\right)$$

Analog zu Lemma 2.4.2 beweist man:

$$D^{\text{akt}}_{L'(\boldsymbol{\varphi})} = \Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}} D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\left(\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}\right)^{-1}, \tag{2.38}$$

$$\Lambda^{\text{akt}}_{D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{u}} = D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{u}}\left(D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\right)^{-1}. \tag{2.39}$$

Mit (2.39) folgt aus (2.37):

> Die Menge aller Transformationen der Form $D^{\text{akt}}_{\boldsymbol{\varphi}}\Lambda^{\text{akt}}_{\mathbf{v}}$ mit bel. L-Dreiervektoren $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}$ (entspr. phys. Dim.) bildet eine Gruppe, die sog. ***eingeschränkte*** LORENTZ-***Gruppe*** $L^{\uparrow}_{+}$.

Nach (2.38) und Lemma 2.4.2 ist klar, daß die Definition von $L_+^\uparrow$ **nicht** von der speziellen Wahl des Inertialsystems L abhängt!

Daraus folgt in Verallgemeinerung von 2.1.2 die Gleichberechtigung **aller** Inertialsysteme hinsichtlich der Beschreibung gleichförmig bewegter Maßstäbe und Uhren!

Teil II

Relativistische Dynamik

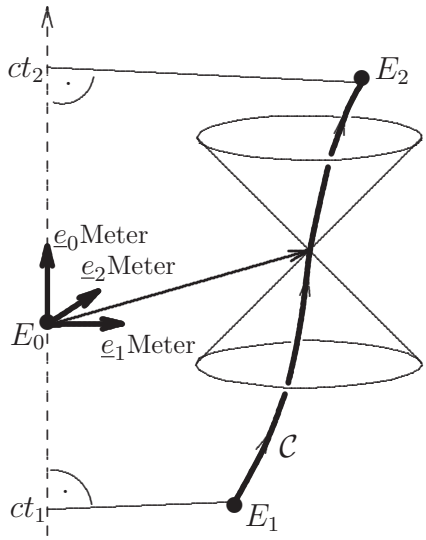
Kapitel 3

Dynamik der Massenpunkte

3.1 Beschleunigung eines Massenpunkten

3.1.1 Eigenzeit

Seien $\mathcal{C}$ ein glattes, orientiertes Kurvenstück in $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ und $\{\underline{x}(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$. Dann nennen wir $\mathcal{C}$ ***positiv zeitartig***, falls $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{x}(t) \in V_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathcal{T}_{\mathrm{M}} : \underline{x} \cdot \underline{x} > 0\}$ für alle $t \in [t_1, t_2]$:



Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Für ein positiv zeitartiges Kurvenstück $\mathcal{C}$ ist seine Minkowski-***Länge***

$$\boxed{s(\mathcal{C}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{x}(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{x}(t)\right)}\, dt} \tag{3.1}$$

wohldefiniert und von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängig.

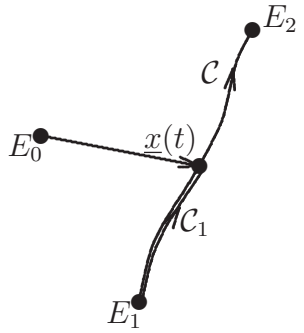
Um die Bedeutung des Skalars (Tensor 0. Stufe) $s(\mathcal{C})$ zu erkennen, ist es zweckmäßig, die Kurve entsprechend obiger Skizze durch die Laborzeit t eines Inertialsystems L zu parametrisieren, dem die LORENTZ-Basis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ entspreche, und mit dem Teil der Bahnkurve eines Massenpunktes M zu identifizieren. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\underline{x}(t) = c\,\underline{e}_0 + \mathbf{v}(t) = c\,\underline{e}_0 + \sum_{j=1}^{3} v^j(t)\,\underline{e}_j\,, \tag{3.2}$$

und aus (3.1),(3.2) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,s(\mathcal{C}_t) = \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}(t)|^2}\,, \tag{3.3}$$

wobei $\mathcal{C}_t$ jeweils das Kurventeilstück bezeichnet, das aus den Punkten $\underline{x}(t')$ mit $t' \in [t_1, t]$ besteht:



Mit

$$\tau(\mathcal{C}_t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c}\,s\,(\mathcal{C}_t) + \tau_0\,, \tag{3.4}$$

wobei τ_0 eine beliebige Normierungskonstante ist, folgt aus (3.3) und (1.2):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tau(\mathcal{C}_t) = \frac{1}{\gamma_v}\,.} \tag{3.5}$$

Bei geeigneter Wahl von τ_0 stimmt deshalb $\tau\,(\mathcal{C}_t)$ mit der Zeit überein, die eine mit M mitbewegte Idealuhr jeweils am Endpunkt von $\mathcal{C}_t$ anzeigt, und wird deshalb als ***Eigenzeit*** von M bezeichnet. Unter einer ***Idealuhr*** ist dabei eine punktförmige 'Uhr' zu verstehen, deren momentane Laufgeschwindigkeit stets mit der einer im momentanen Ruhesystem stationierten Standard-Uhr übereinstimmt.

3.1.2 Vierer-Geschwindigkeit und -Beschleunigung

Sei $\mathcal{C}$ die Weltlinie eines Massenpunktes M, also eine positiv zeitartige, glatte Kurve, mithilfe der Eigenzeit τ von M parametrisiert:

$$\mathcal{C} = \{\underline{x}(\tau)\ :\ \tau \text{ beliebig}\}\ ,\quad \tau = \frac{1}{c}\,s\,(\mathcal{C}_\tau - \mathcal{C}_{\tau_0}) + \tau_0 \tag{3.6}$$

Dann bezeichnet man den zu dieser Parametrisierung gehörigen **Tangentenvektor**

$$\dot{\underline{x}}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underline{x}(\tau) \tag{3.7}$$

als ***Vierer-Geschwindigkeit*** von M am Raum-Zeit-Punkt $\underline{x}(\tau)$. Aus (3.2) und (3.5) folgt[1]

$$\dot{\underline{x}}(\tau) = \gamma_{v(t)}\left(c\,\underline{e}_0 + \mathbf{v}(t)\right)\ , \quad t = L\text{-Zeitpunkt von } \underline{x}(\tau)\,. \tag{3.8}$$

Die

$$\dot{x}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \gamma_v c & \text{für } \mu = 0 \\ \gamma_v v^\mu & \text{für } \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.9}$$

transformieren sich also wie die Komponenten eines Vierer-Vektors (d.h. wie die Raum-Zeit-Koordinaten) bzgl. $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$!

Die MINKOWSKI-Norm der Vierer-Geschwindigkeit ist gemäß (3.8) und (1.2) konstant:

$$\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} = c^2 \tag{3.10}$$

Hieraus folgt unmittelbar die einzige generelle Einschränkung

$$\dot{\underline{x}} \cdot \ddot{\underline{x}} = 0 \tag{3.11}$$

an die sog. ***Vierer-Beschleunigung***

$$\ddot{\underline{x}}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \underline{x}(\tau)\,.$$

Aus (3.8) und (3.5) folgt:[2]

$$\ddot{\underline{x}}(\tau) = \gamma_v^4\left(\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{c}\cdot\mathbf{a}(t)\right)\underline{e}_0 + \mathbf{a}_\parallel(t)\right) + \gamma_v^2\,\mathbf{a}_\perp(t)\ , \quad \mathbf{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t)\,. \tag{3.12}$$

Beweis von (3.12): Aus (3.8) und (3.5) folgt nach der Kettenregel

$$\ddot{\underline{x}}(\tau) = \gamma_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\gamma_v\big(c\,\underline{e}_0 + \mathbf{v}(t)\big)\Big)$$

und daraus mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_v = \gamma_v^3\,\frac{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{c^2}$$

nach der Produktregel:

$$\ddot{\underline{x}} = \gamma_v^4\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\underline{e}_0 + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\mathbf{a}_\parallel\right) + \gamma_v^2\,\mathbf{a}\,.$$

Mit

$$\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 + \gamma_v^{-2} = 1$$

folgt hieraus die Behauptung. ∎

Version vom 26. März 2009

[1] Eine LORENTZ-Basis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ entspricht also genau dann dem momentanen Ruhesystem von M, wenn $\underline{e}_0 = \dot{\underline{x}}(\tau)/c$ ist.

[2] Im Gegensatz zu der Aussage „$\ddot{\underline{x}}(\tau)$ konstant“ ist die Aussage „$\mathbf{a}(t)$ konstant“ **nicht** vom Bezugssystem unabhängig!

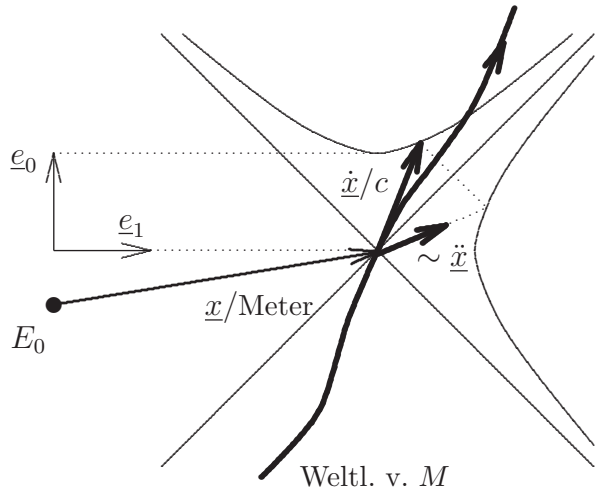
Nach (3.12) ist $\ddot{\underline{x}}(\tau)$ mit der sog. ***Eigenbeschleunigung*** $\mathbf{a}^{(0)}(\tau)$ von M, der Labor-Beschleunigung bzgl. des momentanen Ruhesystems, zu identifizieren:

$$\ddot{\underline{x}} = \mathbf{a}^{(0)}(\tau)\,. \tag{3.13}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\ddot{\underline{x}} \cdot \ddot{\underline{x}} = -\mathbf{a}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)} \leq 0\,. \tag{3.14}$$

Für den Spezialfall einer in der $\underline{e}_0$-$\underline{e}_1$-Ebene verlaufenden Weltlinie ergibt sich somit folgendes Bild:



Die $\ddot{x}^\mu$ transformieren sich natürlich ebenfalls wie die Komponenten eines Vierer-Vektors. Mit (3.13) und (2.20) folgt daraus

$$\ddot{\underline{x}} = \gamma_{v(t)} \left(\left(L\left(\mathbf{a}^{(0)}(\tau)\right) \cdot \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \right) \underline{e}_0 + L\left(\mathbf{a}^{(0)}(\tau)\right)_\parallel \right) + L\left(\mathbf{a}^{(0)}(\tau)\right)_\perp \tag{3.15}$$

Durch Vergleich mit (3.12) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\parallel(t) &= \gamma_{v(t)}^{-3}\, L\Big(\mathbf{a}^{(0)}(\tau)\Big)_\parallel\,, \\ \mathbf{a}_\perp(t) &= \gamma_{v(t)}^{-2}\, L\Big(\mathbf{a}^{(0)}(\tau)\Big)_\perp \end{aligned} \tag{3.16}$$

und somit schließlich

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \ddot{x}^j \underline{e}_j = L\left(\gamma_v\, \mathbf{a}_\parallel^{(0)} + \mathbf{a}_\perp^{(0)}\right) = \gamma_v^4\, \mathbf{a}_\parallel + \gamma_v^2\, \mathbf{a}_\perp\,.} \tag{3.17}$$

Der L-räumliche Anteil der Vierer-Beschleunigung ist i.a. also weder zu $\mathbf{a}$ noch zu $L\left(\mathbf{a}^{(0)}\right)$ parallel!

3.2 Der relativistische Impuls von Massenpunkten

3.2.1 Idealisierte Streuexperimente

Betrachtet sei der nicht notwendig elastische Streuprozeß zweier völlig gleichwertiger Massenkugeln U, V im leeren Raum.[3]

Beide Kugeln mögen einen makroskopisch kleinen Radius haben und als Punktteilchen behandelt werden. In weiter Vergangenheit ebenso wie in ferner Zukunft kann ihre Bewegung als gleichförmig betrachtet werden.

L	:	Ruhesystem von U in weiter Vergangenheit
L'	:	Ruhesystem von V in weiter Vergangenheit
$\mathbf{v}^{(')}_{\text{out(in)}}$	:	$L^{(')}$-Geschwindigkeit von V in ferner Zukunft (weiter Vergangenheit)
$\mathbf{u}_{\text{out(in)}}$	:	L-Geschwindigkeit von U in ferner Zukunft (weiter Vergangenheit)

Aus Symmetriegründen muß

$$|(\mathbf{u}_{\text{out}})_\perp| = |(\mathbf{v}'_{\text{out}})_\perp|$$

gelten, wenn wir die Orthogonalkomponenten wieder wie in 2.3.3 bzgl. der Relativbewegung von L und L' definieren. Da nach (2.25)

$$|(\mathbf{v}_{\text{out}})_\perp| = \frac{|(\mathbf{v}'_{\text{out}})_\perp|}{\gamma_{v_{\text{in}}}\left(1 + \frac{L'(\mathbf{v}_{\text{in}})\cdot\mathbf{v}'_{\text{out}}}{c^2}\right)}$$

gilt, ergibt sich daraus

$$|(\mathbf{u}_{\text{out}})_\perp| = \gamma_{v_{\text{in}}}\left(1 + \frac{L'(\mathbf{v}_{\text{in}})\cdot\mathbf{v}'_{\text{out}}}{c^2}\right)|(\mathbf{v}_{\text{out}})_\perp| \tag{3.18}$$

und somit

$$(\mathbf{u}_{\text{out}} + \mathbf{v}_{\text{out}})_\perp \overset{\text{i.a.}}{\neq} (\mathbf{u}_{\text{in}} + \mathbf{v}_{\text{in}})_\perp = 0\,. \tag{3.19}$$

Die Erfahrung zeigt, daß sich einem Punktteilchen eine träge (Labor-) Masse bzgl. seines momentanen Ruhesystems, auch ***Ruhemasse*** genannt, in der speziellen Relativitätstheorie genau so zuordnen läßt, wie in der NEWTON'schen Mechanik (siehe Abschn. 3.3.4 von (Lücke, ein)). Der relativistische (Labor-) ***Impuls*** wird ebenfalls als Produkt von träger (Labor-) Masse und (Labor-) Geschwindigkeit definiert. Aus (3.19) erkennt man aber, daß bei obigem Streuexperiment der Gesamtimpuls

[3] Vgl. z.B. (Rindler, 1969, Abschnitt 50).

in weiter Vergangenheit nur dann mit dem Gesamtimpuls in ferner Zukunft übereinstimmen kann, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} m(\mathbf{u}_{\text{out}}) \\ m(\mathbf{v}_{\text{out}}) \end{array}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \textbf{\textit{träge Masse}} \text{ von } \left\{\begin{array}{c} U \\ V \end{array}\right\} \text{ bzgl. } L \text{ in ferner Zukunft}$$

geeignet **geschwindigkeitsabhängig** definiert. Und zwar muß man nach (3.18) dafür sorgen, daß

$$m(\mathbf{v}_{\text{out}}) = \gamma_{v_{\text{in}}} \left(1 + \frac{L'(\mathbf{v}_{\text{in}}) \cdot \mathbf{v}'_{\text{out}}}{c^2}\right) m(\mathbf{u}_{\text{out}})$$

gilt.[4] Im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung (streifender Stoß), d.h. für

$$\mathbf{u}_{\text{out}} \to \mathbf{u}_{\text{in}} = 0 \ , \quad \mathbf{v}_{\text{out}} \to \mathbf{v}_{\text{in}} \ , \quad \mathbf{v}'_{\text{out}} \to \mathbf{v}'_{\text{in}} = 0$$

erkennt man daraus, daß allgemein

$$\boxed{m(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v \, m_0 \ , \quad m_0 : \text{ Ruhemasse}} \tag{3.20}$$

($\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{in}}$) zu definieren ist.

Aufgrund zahlloser Beschleunigerexperimente kann **heutzutage**[5] kein Zweifel mehr daran bestehen, daß mit dieser Definition tatsächlich die Erhaltung des Gesamtimpulses bei Streuprozessen garantiert ist.

> **Warnung:**[6] Die **Impulserhaltung** (ohne Berücksichtigung der Impulse der Felder) gilt i.a. **nur für Anfangs- und Endkonfiguration** in jedem Inertialsystem.

Auch aufgrund der Labor-Abhängigkeit der Uhrensynchronisation kann der gesamte Dreier-Impuls nicht in allen Inertialsystemen während eines nichttrivialen Streuprozesses erhalten bleiben. Diese Schwierigkeit läßt sich nur in einer **Nahewirkungstheorie** überwinden, in der die Kraftübertragung durch Felder vermittelt wird, denen ebenfalls eine Impulsverteilung zuzuordnen ist.

Version vom 26. März 2009

[4] Man multipliziere beide Seiten mit $|(\mathbf{v}_{\text{out}})_\perp|$ und verwende auf der rechten Seite (3.18).

[5] Vor Entdeckung des Neutrinos sah die Situation beim Beta-Zerfall ganz anders aus.

[6] Daß die Gesamtmasse beim frontalen Zusammenstoß im Umkehrpunkt kleiner ist als im asymptotischen Bereich, ist evident. Nach Satz 3.2.1 des folgenden Abschnitts kann dann auch der gesamte Dreier-Impuls im Umkehrpunkt nicht bzgl. aller Inertialsysteme mit dem gesamten Dreier-Impuls im asymptotischen Bereich übereinstimmen.

3.2.2 Vierer-Impuls

Nach (3.20) und (3.8) läßt sich der relativistische (Labor-) Dreier-Impuls auch in der Form[7]

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m(\mathbf{v})\,\mathbf{v} = m_0 \sum_{j=1}^{3} \dot{x}^j \underline{e}_j \,, \tag{3.21}$$

also als L-räumlicher Anteil des sog. ***Vierer-Impuls***es

$$\boxed{\underline{p} \stackrel{\text{def}}{=} m_0\, \underline{\dot{x}}} \tag{3.22}$$

schreiben — womit das Transformationsverhalten bereits geklärt ist.

Aus (3.21), (3.22) und (3.8) folgt

$$\mathbf{v} = \frac{c\,\mathbf{p}}{p^0} \,, \tag{3.23}$$

wobei

$$p^0 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{e}_0 \cdot \underline{p} = m(\mathbf{v})\, c \,. \tag{3.24}$$

Aus (3.22), (3.10) und (3.24) folgt

$$m(\mathbf{v})^2\, c^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \underline{p} \cdot \underline{p} = (m_0\, c)^2 \,. \tag{3.25}$$

Satz 3.2.1

Gegeben: $\underline{p}_1, \underline{p}_2 \in \mathcal{T}_{\mathrm{M}}$

Behauptung: *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ *für jede* LORENTZ-*Basis* $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$
2. $p_1^0 = p_2^0$ *für jede* LORENTZ-*Basis* $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$

Beweis: Übungsvorschlag. ∎

Nach Satz 3.2.1 ist die Erhaltung der gesamten trägen Masse ebensowenig anzuzweifeln, wie die Erhaltung des Gesamtimpulses!

[7] Man beachte, daß der Punkt die Ableitung nach der **Eigen**zeit bezeichnet!

3.2.3 Relativistische Massenpunkt-Modelle

Vom umstrittenen Fall gewisser 'Elementarteilchen' abgesehen, dient das Punktteilchenmodell in aller Regel dazu, **zusammengesetzte Systeme** makroskopisch vernachlässigbarer Ausdehnung idealisiert zu beschreiben. Es erhebt sich sofort die Frage, wie sich Masse, Geschwindigkeit und Impuls aus den entsprechenden Größen der Einzelteile ergeben.

Die Betrachtungen von 3.2.1 führen uns diesbezüglich auf folgende

Vermutung: Der Vierer-Impuls eines physikalischen Körpers M makroskopisch vernachlässigbarer Ausdehnung ist die Vektorsumme (in $\mathcal{T}_{\mathrm{M}} \cdot$ entspr. phys. Einheit) der Feldimpulse und der (Vierer-)Impulse der 'nackten' Einzelteilchen, aus denen sich der Körper zusammensetzt.

Anmerkungen:

(i) Wenn die Vermutung in einem Inertialsystem richtig ist, so aufgrund des linearen Transformationsverhaltens der Vierer-Impulse in jedem Inertialsystem.

(ii) Da Ruhemasse und Geschwindigkeit von M makroskopisch wohldefiniert sind, gilt dasselbe nach (3.7) und (3.22) auch für den Vierer-Impuls von M.

(iii) Prinzipiell sind die Impulse der 'nackten' Einzelteilchen nicht feststellbar, da sie auch isoliert stets entsprechende Wechselwirkungsfelder mit sich führen, mit denen zusammen sie die sog. 'physikalischen' Teilchen entsprechend 'renormierter' Masse bilden.

In den meisten Fällen wird die Veränderung der Feldimpulse durch die Bindung der Einzelteilchen M_ν in M vernachlässigbar sein.[8] In einem solchen Falle wollen wir M als ***schwach zusammengesetzt*** bezeichnen. Für schwach zusammengesetzte Massenpunkte kann man also den Vierer-Impuls mit der Summe der (renormierten) Vierer-Impulse der Einzelteile gleichsetzen. Daraus läßt sich folgendes schließen:

1. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Massen ist genau so definiert, daß die träge Masse eines schwach zusammengesetzten Massenpunktes M mit der Summe der (renormierten) trägen Massen seiner Einzelteile übereinstimmt.

2. Die Ruhemasse, nach dem Äquivalenzprinzip also auch das Gewicht,[9] eines schwach zusammengesetzten Massenpunktes M wächst bereits bei Erhöhung der Relativgeschwindigkeiten der M_ν ('Erwärmung' von M) und ist dadurch größer als die Summe der (renormierten) Ruhemassen der M_ν.

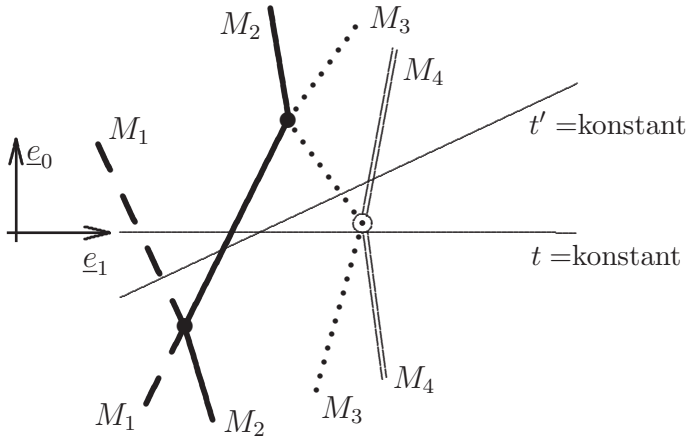
[8] Gegenbeispiel: Atomkerne!

[9] Bzgl. der Gravitation bei relativistischen Geschwindigkeiten vgl. (Melissinos, 1980).

3. Die Ruhemasse eines schwach zusammengesetzten Massenpunktes läßt sich mindestens teilweise in Energie umwandeln ('Abkühlung' von M).

3.2.4 Schwerpunktsystem

Gegeben sei eine Gesamtheit von Massenpunkten M_ν, die zwar untereinander kollidieren können, sich aber zwischen den Kollisionen **frei** bewegen:



Es seien ein Inertialsystem L und ein L-Zeitpunkt t gewählt, zu dem sich alle M_ν frei bewegen. Die Summe $\underline{P}_{\text{ges}}$ der Vierer-Impulse aller M_ν ist dann (von der phys. Dim. abgesehen) ein Vektor aus V_+, der entspr. 3.1.1/3.1.2 nicht von der speziellen Wahl von L und t abhängt. Das Inertialsystem L_{s}, in dem der L_{s}-räumliche Anteil von $\underline{P}_{\text{ges}}$ verschwindet, ist somit eindeutig und wird gewöhnlich als ***Schwerpunktsystem*** der Gesamtheit $\{M_\nu\}$ bezeichnet.

> **Warnung:** Die Weltlinie eines 'Schwerpunktes' von $\{M_\nu\}$ läßt sich **nicht** unabhängig von der Wahl eines Inertialsystems definieren![10]

In Übereinstimmung mit der Vermutung von 3.2.3 gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)\mathbf{x}_\nu(t)}{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)} = \frac{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)\mathbf{v}_\nu(t)}{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)} \tag{3.26}$$

abschnittsweise. Aufgrund der Erhaltung des Gesamtimpulses ist deshalb die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, dessen Ortsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{s}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)\mathbf{x}_\nu(t)}{\sum\limits_\nu m_\nu\left(\mathbf{v}_\nu(t)\right)}$$

[10] Man betrachte die Bahnkurve des Schwerpunktes zweier gleich schwerer Massenpunkte mit parallelen Bahkurven und entgegengesetzter Geschwindigkeit. Bzgl. der Schwerpunktsbewegung ausgedehnter Körper vgl. (Schattner, 1978).

ist, zeitlich konstant.

3.3 Kraft und Leistung

Vorbemerkung: Wir werden Massenpunkte nur in solchen Situationen betrachten, in denen sich Ihre Ruhemasse nicht ändert.[11] Für schwach zusammengesetzte Massenpunkte setzen wir also stets

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\nu m_\nu\Big(\mathbf{v}_\nu(t)\Big) = 0 \text{ im momentanen Ruhesystem von } M} \tag{3.27}$$

voraus.

3.3.1 Additivität der Dreier-Kraft

Die Labor-Kraft auf einen **ruhenden** Massenpunkt ist (in Verbindung mit der Ruhemasse) in natürlicher Weise genau so definiert wie in der NEWTONschen Mechanik. Damit die Definition der Kraft auf einen **bewegten** Massenpunkt ebenfalls physikalisch sinnvoll ist, verlangen wir

> ***Additivität der Kraft:*** Die Labor-Kraft $\mathbf{F}$ auf einen schwach zusammengesetzten Massenpunkt M stimmt mit der Vektorsumme der Kräfte $\mathbf{F}_\nu$ auf seine Einzelteile M_ν überein.

Aufgrund der Additivität der trägen Masse bedeutet die Additivität der Kraft für das momentane **Ruhesystem** von M:[12]

$$\begin{aligned}\sum_\nu \mathbf{F}_\nu(t) &= \left(\sum_\nu m_\nu(\mathbf{v}_\nu(t))\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathbf{x}_\mathrm{s}(t)\\ &\underset{(3.26)}{=} \sum_\nu m_\nu(\mathbf{v}_\nu(t))\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{v}_\nu(t))\,\mathbf{v}_\nu(t)}{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{v}_\nu(t))}\\ &\underset{(3.27)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\nu m_\nu(\mathbf{v}_\nu(t))\,\mathbf{v}_\nu(t)\,.\end{aligned}$$

Daher muß man die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Kraft sicherlich so definieren, daß in **jedem** Inertialsystem die relativistische **Bewegungsgleichung**

$$\boxed{\mathbf{F}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\left(\mathbf{v}(t)\right)\mathbf{v}(t)\right)} \tag{3.28}$$

[11] In der Quantentheorie ist die Massenänderung nur sprunghaft möglich: aus einem Elementarteilchen entsteht ein neues, das als Anregungszustand des ursprünglichen angesehen werden kann.

[12] Beachte (3.27) und $\mathbf{p}_\mathrm{s} = m_\mathrm{ges}(v_\mathrm{s})\mathbf{v}_\mathrm{s}$.

gilt,[13] die sich aufgrund der angenommenen **Konstanz der Ruhemassen** nach (3.20), (3.8) und (3.5) auch in der Form

$$\gamma_v \mathbf{F} = m_0 \sum_{j=1}^{3} \ddot{x}^j \underline{e}_j \tag{3.29}$$

schreiben läßt.

Übungsvorschlag: Man zeige, daß zu jeder stetigen L-Dreier-Vektor-Funktion $\mathbf{F}(t)$ und jeder Anfangsbedingung genau eine Lösung von (3.28) existiert und daß für diese Lösung $|\mathbf{v}(t)| < c$ gilt.

Um die Additivität zu erhalten, muß man also entsprechend (3.17) in Kauf nehmen, daß der relativistische (Labor-) Kraftvektor, auch ***Dreier-Kraft*** genannt, i.a. **nicht** in Richtung des (Labor-) Beschleunigungsvektors zeigt!

Früher hatte man (3.29) entspr. (3.17) in der Form

$$\mathbf{F}_\parallel = \gamma_v^3 \, m_0 \, \mathbf{a}_\parallel \ , \quad \mathbf{F}_\perp = \gamma_v \, m_0 \, \mathbf{a}_\perp \tag{3.30}$$

geschrieben und dementsprechend $\gamma_v^3 \, m_0$ als ***longitudinale***, $\gamma_v \, m_0$ dagegen als ***transversale Masse*** bezeichnet.

Aus (3.29) und (3.17) folgt sofort der Zusammenhang von $\mathbf{F}$ mit der sogenannten ***Eigenkraft*** $\mathbf{F}^{(0)}$:

$$\mathbf{F}_\parallel \stackrel{\text{def}}{=} L \left(\mathbf{F}^{(0)}\right)_\parallel \ , \quad \mathbf{F}_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma_v} L \left(\mathbf{F}^{(0)}\right)_\perp \tag{3.31}$$

Eine triviale Folgerung aus (3.31) ist, daß die Kraftwirkung von Feldern nicht bzgl. jedes Inertialsystems geschwindigkeitsunabhängig sein kann. Daher ist zu erwarten, daß elektrische und magnetische Felder in der Elektrodynamik lediglich verschiedene Aspekte einunddesselben Feldes sind, das man dementsprechend als ***elektromagnetisches Feld*** bezeichnet.

Übungsvorschlag: Gegeben sei ein Stromfaden in L, der nur aus negativen Ladungen bestehe, die in L' ruhen. Aus dem **Coulomb**schen Gesetz bzgl. L' leite man entspr. (3.31) die L-Kraft ab, die der Stromfaden auf eine beliebig bewegte Probeladung ausübt.

[13] (3.28) garantiert nach (3.22) und (3.28) auch die Additivität der in 3.3.3 noch zu besprechenden Vierer-Kraftdichten (nicht Vierer-Kraft-Dichten)!

3.3.2 Leistung

Die Größe

$$\underline{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_v \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{F} \right) \underline{e}_0 + \mathbf{F} \right) \tag{3.32}$$

bezeichnet man als ***Vierer-Kraft***. Sie ist **nur**[14] deshalb interessant, weil sie nach (3.31), (3.15) und wegen $\mathbf{F}^{(0)} = m_0\, \mathbf{a}^{(0)}$ die Gleichung

$$m_0\, \ddot{\underline{x}} = \mathcal{K} \tag{3.33}$$

erfüllt, deren $\underline{e}_0$-Komponente sich (bis auf den Faktor γ_v/c) nach (3.32), (3.5), (3.8) und (3.20) in der Form

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\left(\mathbf{v}(t)\right) c^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}(t)} \tag{3.34}$$

schreiben läßt.

Die **Zusammenhänge** zwischen den Begriffen ***Leistung***, ***Arbeit*** und ***Energie*** behält man in der relativistischen Theorie natürlich genau so bei, wie in der NEWTONschen Mechanik. (3.34) zeigt daher, daß die physikalisch wohl einzig sinnvolle Definition der (Labor-) Leistung, die eine Dreier-Kraft $\mathbf{F}(t)$ an einem Massenpunkt M der (Labor-) Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ erbringt, diejenige der NEWTONschen Mechanik — allerdings auf den **neuen Kraftbegriff** bezogen — ist:

$$\boxed{\textbf{\textit{Leistung:}} \qquad \mathcal{L}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}(t)} \tag{3.35}$$

Dann läßt sich (3.34) **nämlich** folgendermaßen formulieren:

> Die Leistung, die die Gesamtheit aller auf einen Massenpunkt M wirkenden Kräfte erbringt, ist gleich dem c^2-fachen der zeitlichen Änderung der trägen (=schweren) Masse von M.

Die Energie, die ein Medium dadurch aufnimmt,[15] daß es einen Massenpunkt M bis zur Ruhe abbremst, ohne ihn sonst zu verändern, ist **somit** unabhängig vom Abbremsvorgang! Diesen Energieanteil bezeichnet man naheliegenderweise als ***kinetische Energie*** von M:

$$\boxed{E_{\text{kin}} \stackrel{\text{def}}{=} m(\mathbf{v})\, c^2 - m_0\, c^2} \tag{3.36}$$

Mit den Definitionen der ***Ruheenergie***

$$\boxed{E_0 \stackrel{\text{def}}{=} m_0\, c^2} \tag{3.37}$$

und der Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} E_{\text{kin}} + E_0 \tag{3.38}$$

[14] Addition von Vierer-Kräften ist i.a. physikalisch sinnlos.

[15] Man beachte die Massenerhaltung des Gesamtsystems.

ergibt sich somit **Einstein**s berühmte Formel

$$\boxed{E_{\text{ges}} = m(\mathbf{v})\, c^2\,,} \tag{3.39}$$

die bekanntlich die Grundlage für den Bau von Atombomben und Kernkraftwerken darstellt.

Heutzutage ist es eine Erfahrungstatsache, daß sich auch die gesamte Ruheenergie von Elementarteilchen (in Form von Vernichtungsstrahlung) freisetzen läßt.

Nach (3.39) ist die Erhaltung der Gesamtmasse bei Streuprozessen mit der Erhaltung der Gesamtenergie gleichbedeutend.

3.3.3 Vierer-Kraftdichte

Betrachtet man anstelle von Massenpunkten ausgedehnte Körper, so tritt an die Stelle der Kraft die ***Kraftdichte***:[16]

$$\mathbf{k}(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon\to+0} \frac{\mathbf{F}_\epsilon(\underline{x})}{|U_\epsilon(\mathbf{x})|}$$

$$\text{wobei:}\quad \mathbf{F}_\epsilon(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Summe aller betr. Kräfte zur } L\text{-Zeit } \frac{x^0}{c} \\ \text{auf Körperteile in } U_\epsilon(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Folgende Aussage ist dann makroskopisch gültig:

> Die L-Kraftdichte $\mathbf{k}(\underline{x})$ ist die L-räumliche Komponente eines Vierervektorfeldes $\underline{k}(\underline{x})$, das man dementsprechend als ***Vierer-Kraftdichte*** bezeichnet. Die L-zeitliche Komponente $k^0(\underline{x})$ von $\underline{k}(\underline{x})$ ist das $\frac{1}{c}$-fache der $\mathbf{k}(\underline{x})$ entsprechenden L-Leistungsdichte.

Beweisskizze: Es genügt, den Spezialfall einer räumlich homogenenGesamtheit von Massenpunkten einheitlicher Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, auf die alle die gleiche Kraft $\mathbf{F}$ wirkt, zu betrachten. Wenn n_0 die Teilchenzahldichte im Ruhesystem bezeichnet, ist dann also aufgrund der LORENTZ-Kontraktion

$$n = n_0\,\gamma_v = \text{Teilchenzahldichte in } L$$

und somit:

$$\mathbf{k} = n_0\,\gamma_v\,\mathbf{F} \underset{(3.32)}{=} n_0\,\mathcal{K}\,.$$

Mit

$$\underline{k} \stackrel{\text{def}}{=} n_0\,\underline{\mathcal{K}}$$

folgt daraus entspr. (3.32)/(3.33) die Behauptung. ∎

Version vom 26. März 2009

[16] Physikalisch ist der Grenzübergang $\epsilon \to +0$ aufgrund der diskreten Struktur aller Makromaterie natürlich sinnlos. Man muß stattdessen ϵ mikroskopisch hinreichend groß, makroskopisch dagegen hinreichend klein wählen.

Kapitel 4

Elektrodynamik

4.1 Der elektromagnetische Feldtensor

4.1.1 Makroskopische Strom-Ladungs-Verteilungen

Die Strom-Ladungs-Verteilung $\rho, \boldsymbol{\jmath}$, charakterisiert durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \rho(\underline{x})\, \mathrm{d}V_{\underline{x}} &\approx \text{Gesamtladung in G zur Labor-Zeit } \frac{x^0}{c} \\ \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\jmath}(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{\underline{x}} &\approx \text{Gesamtstron durch S zur Labor-Zeit } \frac{x^0}{c} \end{aligned}$$

sei in der Umgebung von $\mathbf{x}$ zur Labor-Zeit x^0/c nur aus Ladungen gleicher Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ aufgebaut. Dann gilt[1]

$$\rho = \gamma_v\, \rho_0 \ , \quad \boldsymbol{\jmath} = \rho\, \mathbf{v}$$

und somit nach (3.8)

$$\underline{\jmath} = \rho_0\, \dot{\underline{x}}_{\text{mitt}} \tag{4.1}$$

für

$$\underline{\jmath}\,(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} c\, \rho(\underline{x})\, \underline{e}_0 + \boldsymbol{\jmath}\,(\underline{x}) \ , \tag{4.2}$$

wobei ρ_0 die Ladungsdichte im momentanen Ruhesystem der Einzelladungen bezeichnet. (4.2) ist also von der speziellen Wahl des Inertialsystems unabhängig.

Aufgrund der **Additivität** von Strom- und Ladungsdichte gilt dann dasselbe für

Version vom 26. März 2009

[1] Hier geht die Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Einzelladungen ein, aufgrund derer auch die Kontinuitätsgleichung (4.3) gilt. Daher finden die folgenden Überlegungen auf Gravitationskräfte, die ja auf die geschwindigkeitsabhängigen Einzelmassen wirken, keine Anwendung!

jede Strom-Ladungs-Verteilung:

> Die $\jmath^\mu(\underline{x})$, bzgl. L definiert durch
>
> $$\jmath^0(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} c\,\rho(\underline{x})\,, \quad \sum_{k=1}^{3} \jmath^k(\underline{x})\,\underline{e}_k \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\jmath}(\underline{x})\,,$$
>
> sind die Komponenten bzgl. $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ eines von L unabhängigen Vierer-Vektorfeldes $\underline{\jmath}(\underline{x})$, das man als ***Vierer-Stromdichte*** bezeichnet.

Da erfahrungsgemäß die Gesamtladung erhalten ist, d.h.

$$c\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^0}\int_{\mathcal{G}} \rho(\underline{x})\,\mathrm{d}V_{\underline{x}} + \int_{\partial\mathcal{G}} \boldsymbol{\jmath}(\underline{x})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{\underline{x}} = 0$$

gilt, müssen die $\jmath^\mu(\underline{x})$ nach dem GAUSSschen Satz die **Kontinuitätsgleichung**[2]

$$\boxed{\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\jmath^\mu = 0} \tag{4.3}$$

erfüllen.

4.1.2 Kraftwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes

Aufgrund der **Additivität** von Vierer-Stromdichte und Vierer-Kraftdichte hängt die Vierer-Kraftdichte $\underline{k}(\underline{x})$, die der Wirkung eines **festen äußeren** Feldes entspricht, **linear** von der Vierer-Stromdichte der Testladungen am gleichen Raum-Zeit-Punkt ab. Das **äußere** Feld läßt sich also durch eine $\underline{x}$-abhängige lineare Abbildung beschreiben; d.h. es existiert ein Tensor 2. Stufe mit den Komponenten $F^\mu{}_\nu(\underline{x})$ bzgl. $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$, für den

$$f^\mu(\underline{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{3} F^\mu{}_\nu(\underline{x})\,\jmath^\nu(\underline{x}) \quad \text{bzgl. } \{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\} \tag{4.4}$$

gilt.[3]

Sei nun eine spezielle Vierer-Stromdichte gleichen Typs wie zu Beginn von 4.1.1 betrachtet. Unter der durch Erfahrung bestätigten Voraussetzung, daß die Wirkung

[2] Tatsächlich folgt die Kontinuitätsgleichung für physikalisch realistische (raum-zeitlich hinreichend gut lokalisierte) Vierer-Stromdichten direkt aus dem Transformationsverhalten.

[3] Der Vorfaktor von $F^\mu{}_\nu(\underline{x})$, insbesondere das Vorzeichen davon, ist reine Konventionssache.

des äußeren Feldes **keinen direkten Einfluß auf die Ruhemassen** der geladenen Einzelteilchen hat, folgt dann

$$\begin{aligned} 0 = \underline{\jmath}(\underline{x}) \cdot \underline{k}(\underline{x}) &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \jmath_\mu(\underline{x})\, F^\mu{}_\nu(\underline{x})\, \jmath^\nu(\underline{x}) \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \jmath_\mu(\underline{x})\, \jmath_\nu(\underline{x})\, F^{\mu\nu}(\underline{x})\,, \end{aligned}$$

wie man im Ruhesystem der speziellen Testladungsgesamtheit sieht, wobei:

$$\jmath_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\lambda}\, \jmath^\lambda\,,\quad F^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda=0}^{3} \eta^{\nu\lambda} F^\mu{}_\lambda\,,\quad \eta_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{für } \mu=\nu=0 \\ -1 & \text{für } \mu=\nu\in\{1,2,3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zunächst im Ruhesystem der Ladungen[4] am Raum-Zeit-Punkt $\underline{x}$ und somit bzgl. jedes Inertialsystems. Da selbst unter den angenommenen speziellen Voraussetzungen die $\jmath_\mu(\underline{x})$ in einem bel. Inertialsystem für gegebenes $\underline{x}$ jeden zeitartigen Vektor approximieren können, folgt somit

$$\boxed{F^{\mu\nu}(\underline{x}) = -F^{\nu\mu}(\underline{x})\,.} \tag{4.5}$$

4.1.3 E- und B-Feld

Entsprechend (4.5) besitzt die Matrix der $F^{\mu\nu}$ nur sechs unabhängige Komponenten, die (im Gaussschen Maßsystem) mit E^j, B^j bezeichnet seien:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -E^1(\underline{x}) & -E^2(\underline{x}) & -E^3(\underline{x}) \\ +E^1(\underline{x}) & 0 & -B^3(\underline{x}) & +B^2(\underline{x}) \\ +E^2(\underline{x}) & +B^3(\underline{x}) & 0 & -B^1(\underline{x}) \\ +E^3(\underline{x}) & -B^2(\underline{x}) & +B^1(\underline{x}) & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (F^{\mu\nu}(\underline{x}))} \tag{4.6}$$

Mit der Definition

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\underline{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{3} E^j(\underline{x})\, \underline{e}_j \quad \textbf{\textit{elektrisches Feld}} \text{ bzgl. } L\,, \\ \mathbf{B}(\underline{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{3} B^j(\underline{x})\, \underline{e}_j \quad \textbf{\textit{magnetisches Feld}} \text{ bzgl. } L \end{aligned} \tag{4.7}$$

[4] Im Ruhesystem gilt nämlich $f^0 = \jmath^1 = \jmath^2 = \jmath^3 = 0$.

läßt sich dann (4.4) in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} f^0(\underline{x}) &= \frac{1}{c}\,\boldsymbol{\jmath}(\underline{x})\cdot\mathbf{E}(\underline{x})\,, \\ \mathbf{f}(\underline{x}) &= \rho(\underline{x})\,\mathbf{E}(\underline{x}) + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{\jmath}(\underline{x})\times\mathbf{B}(\underline{x}) \quad \text{LORENTZ-}\boldsymbol{Kraftdichte} \end{aligned}} \tag{4.8}$$

schreiben.

Aus (4.6), dem Tensor-Charakter[5] von F und der Gestalt (2.2) der speziellen LORENTZ-Transformations-Matrizen folgt für elektrisches und magnetisches Feld bzgl. Laborsystemwechsel:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel}(\underline{x}) = L'\left(\mathbf{E}_{\parallel}(\underline{x})\right) \quad &, \quad \mathbf{B}'_{\parallel}(\underline{x}) = L'\left(\mathbf{B}_{\parallel}(\underline{x})\right) \\ \mathbf{E}'_{\perp}(\underline{x}) = \gamma_v\, L'\left(\mathbf{E}_{\perp}(\underline{x}) + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}(\underline{x})\right) \quad &, \quad \mathbf{B}'_{\perp}(\underline{x}) = \gamma_v\, L'\left(\mathbf{B}_{\perp}(\underline{x}) - \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}(\underline{x})\right) \end{aligned}} \tag{4.9}$$

(Beweis als Übungsvorschlag).
Hieraus erkennt man deutlich die am Ende von 3.2.1 angesprochene wesensmäßige Verwandtschaft von **E**- und **B**-Feld.

4.2 Die mikroskopischen Feldgleichungen

Aus (4.6) folgt

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c}\jmath^0\,. \tag{4.10}$$

Mit

$$(G_{\mu\nu}(\underline{x})) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -B^1(\underline{x}) & -B^2(\underline{x}) & -B^3(\underline{x}) \\ +B^1(\underline{x}) & 0 & +E^3(\underline{x}) & -E^2(\underline{x}) \\ +B^2(\underline{x}) & -E^3(\underline{x}) & 0 & +E^1(\underline{x}) \\ +B^3(\underline{x}) & +E^2(\underline{x}) & -E^1(\underline{x}) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

gilt entsprechend

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \partial^\mu G_{\mu 0} = 0\,, \tag{4.12}$$

$$\text{wobei:} \quad \partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda=0}^{3}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda\,,\ \partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,.$$

[5] Siehe (B.3) im Anhang.

Da sich die $a^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu F^{\mu\nu}$ und wegen

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,,$$
$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu,\nu,\alpha,\beta) \text{ gerade Permut. v. } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (\mu,\nu,\alpha,\beta) \text{ ungerade Permut. v. } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.13}$$

auch die $\hat{a} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=0}^{3} \partial^\mu \sum_{\lambda=0}^{3} \eta^{\nu\lambda} G_{\mu\lambda}$ wie (kontravariante) Komponenten von Vierer-Vektoren transformieren, ist entspr. (4.10), (4.12) und Satz 3.2.1 die Gültigkeit der Gleichungen[6]

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

in **jedem** Laborsystem äquivalent zur Gültigkeit der MAXWELL-LORENTZ***schen Gleichungen***[7]

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \jmath^\nu \tag{4.14}$$
$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial^\mu G_{\mu\nu} = 0 \tag{4.15}$$

in jedem Inertialsystem.

Zum Vergleich mit der üblichen Darstellung sei zusätzlich zu (4.10)/(4.12) darauf hingewiesen, daß aus (4.6)

$$\left(\partial_\mu F^{\mu k} = \frac{4\pi}{c}\jmath^k \quad \forall\, k \in \{1,2,3\}\right) \iff \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + 4\pi\boldsymbol{\jmath}\right) \tag{4.16}$$

und aus (4.11)

$$(\partial^\mu G_{\mu k} \quad \forall\, k \in \{1,2,3\}) \iff \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{4.17}$$

folgt.

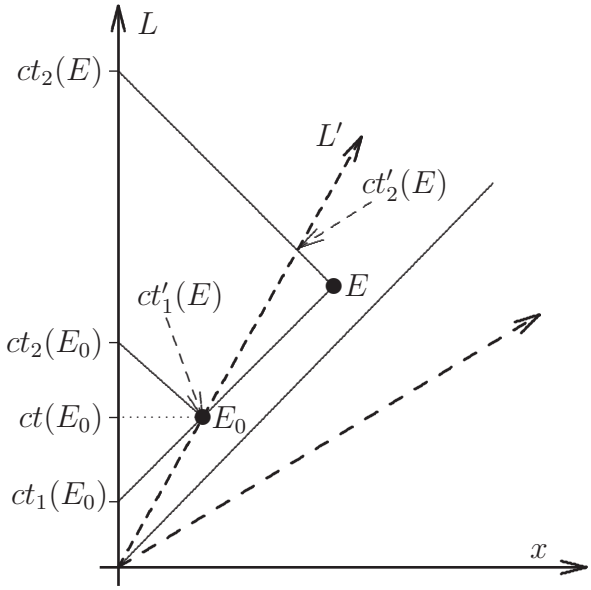
[6]Die erste Gleichung ist im momentanen Ruhesystem der Ladungen bekanntlich aus dem COULOMB-Gesetz ableitbar, wenn ρ zur felderzeugenden Strom-Ladungs-Dichte $\underline{\jmath}$ gehört.

[7]Daß bereits aus (4.3) die Existenz eines antisymmetrischen Tensors $F^{\mu\nu}$ folgt, für den (4.14) gilt, ist aus der Differentialgeometrie hinlänglich bekannt. Der entscheidende Punkt ist aber natürlich, daß (4.14) für den durch (4.4) charakterisierten **Feld**tensor gilt.

Anhang A

Bondi's K-Kalkül (Bondi, 1977)

Zur Ableitung der Transformationsformeln aus dem Relativitätsprinzip können wir uns o.B.d.A. auf Ereignisse folgender Art beschränken:



Nach dem speziellen Relativitätsprinzip und dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (sowie aufgrund der Homogenität der Raum-Zeit) muß dann

$$K_{L,L'} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\frac{t'(E_0)}{t_1(E_0)}}_{=\frac{t'_1(E)}{t_1(E)}} = K_{L',L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t_2(E_0)}{t'(E_0)} \underset{(\text{A.3})}{=} \frac{t_2(E)}{t'_2(E)} \tag{A.1}$$

gelten.[1] Daraus folgt zunächst

$$K_{L,L'}^2 = \frac{t_2(E_0)}{t_1(E_0)} \tag{A.2}$$

sowie

$$\boxed{\begin{aligned} t_1'(E) &= K_{L,L'} t_1(E)\,, \\ t_2'(E) &= \frac{1}{K_{L,L'}} t_2(E)\,. \end{aligned}} \tag{A.3}$$

Mit

$$\boxed{\begin{aligned} ct_1^{(')}(E) &= ct^{(')}(E) - x^{(')}(E)\,, \\ ct_2^{(')}(E) &= ct^{(')}(E) + x^{(')}(E)\,, \end{aligned}} \tag{A.4}$$

(angewandt auf $E = E_0$) ergibt sich für $K_{L,L'}$ gemäß (A.2)

$$\boxed{K_{L,L'} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\,.} \tag{A.5}$$

Explizit lauten die Transformationsformeln (A.3) gemäß (A.4) somit

$$\begin{aligned} ct' - x' &= \underbrace{(1+v_x/c)\gamma_v}_{=K_{L,L'}}(ct - x)\,, \\ ct' + x' &= \underbrace{(1-v_x/c)\gamma_v}_{=K_{L,L'}^{-1}}(ct + x)\,, \end{aligned}$$

sind also offensichtlich äquivalent zu den Formeln (1.6) der speziellen Lorentz-Transformation.

Anmerkung: Aus (A.3) folgt auch unmittelbar[2]

$$t_2' t_1' = t_2 t_1\,;$$

d.h. nach (A.4):

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2\,. \tag{A.6}$$

[1] $K_{L,L'}$ bezeichnet den **Doppler**-Faktor, mit dem die L-Sendezeitintervalle einer in L ruhenden **Licht**impulsquelle zu multipliziern sind, um die zugehörigen L'-Empfangszeitintervalle eines in L' ruhenden Beobachters zu erhalten, der sich von der Impulsquelle **weg**bewegt. Die genannten Prinzipien verlange daher $K_{L,L'} = K_{L',L}$.

[2] Entsprechend einfach läßt sich die Formel (2.4) der relativistischen Geschwindigkeitsaddition aus der Beziehung $K_{L,\hat{L}'} = K_{\hat{L},\hat{L}'} K_{L,\hat{L}}$ ablesen. Vgl. dazu auch (Peres, 1987).

Anhang B

Tensoren über $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$

Die zu einer Basis $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ von $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ ***duale Basis*** des ***Dualraumes*** $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}^*$ aller **Linearformen** über $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ ist definiert durch

$$\theta^\mu(\underline{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{B.1}$$

Als ***p-stufig kontravarianten und q-stufig kovarianten*** Tensor über $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ bezeichnet man eine Multilinearform T über $V_1, \ldots, V_p + q$, falls genau p Stück der Vektorräume $V_1, \ldots, V_p + q$ mit $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}^*$, die übrigen mit $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ übereinstimmen. Die ***Komponenten*** eines Tensors ***bzgl. der Basis*** $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ sind z.B.

$$T^\mu{}_{\nu\lambda}{}^\rho \stackrel{\text{def}}{=} T\left(\theta^\mu, \underline{e}_\nu, \underline{e}_\lambda, \theta^\rho\right) \quad \text{für Multilinearformen } T \text{ über } \mathcal{T}_{\mathrm{M}}^* \times \mathcal{T}_{\mathrm{M}} \times \mathcal{T}_{\mathrm{M}} \times \mathcal{T}_{\mathrm{M}}^* \tag{B.2}$$

Das Transformationsverhalten der Tensorkomponenten bzgl. Basiswechsel ist von der Form

$$\begin{aligned} &\underline{e}'_\mu = \textstyle\sum_\nu \Lambda_\mu{}^\nu \underline{e}_\nu\,, \ \sum_\lambda \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda_\nu{}^\lambda = \delta^\mu_\nu \\ &\Longrightarrow T'^{\mu_1}{}_{\mu_2}{}^{\mu_3}{}_{\mu_4} = \textstyle\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_4} \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda_{\mu_2}{}^{\nu_2} \Lambda^{\mu_3}{}_{\nu_3} \Lambda_{\mu_4}{}^{\nu_4} T^{\nu_1}{}_{\nu_2}{}^{\nu_3}{}_{\nu_4} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Bei Beschränkung auf LORENTZ-Basen $\{\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_3\}$ erkennt man leicht:

$$T_{\mu_1\mu_2}{}^{\mu_3}{}_{\mu_4} = \sum_{\nu_1\nu_3\nu_4} \eta_{\mu_1\nu_1}\, \eta^{\mu_3\nu_3}\, \eta_{\mu_4\nu_4}\, T^{\nu_1}{}_{\mu_2\nu_3}{}^{\nu_4} \quad \textbf{usw.} \tag{B.4}$$

Literaturverzeichnis

Arzeliês, H. (1966a). *Relativistic Kinematics*. Pergamon Press, Oxford.

Arzeliês, H. (1966b). *Relativistic Point Dynamics*. Pergamon Press, Oxford.

Baylis und Jones (1989). The Pauli algebra approach to special relativity. *J. Phys.*, A 22:1–15.

Bondi, H. (1977). *Relativity and Common Sense*. Dover Publ., Dover. 69

Born, M. (2001). *Die Relativitätstheorie Einsteins*. Springer-Verlag, 6. Auflage. Kommentiert und erweitert von Jürgen Ehlers und Markus Pössel. 3, 11, 12

Cook, R. J. (1979). . *Am. J. Phys.*, 47:117. 28

Cronin (1981). . *Rev. Mod. Phys.*, 53:373. 27

de A. Martins, R. (1982). . *Am. J. Phys.*, 50:799. 17

Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. d. Phys.*, 17:891–921. 28

Einstein, A. (1956). *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Vieweg, Braunschweig. 3, 12

Eisele (1987). On the behaviour of an accelerated clock. *Helv. Phys. Acta*, Seiten 1024–1037.

Fitch (1981). . *Rev. Mod. Phys.*, 53:367. 27

Fock, V. (1960). *Theorie von Raum-Zeit und Gravitation*. Akademie-Verlag, Berlin.

Ford, K. W. (1966). *Die Welt der Elementarteilchen*. Springer-Verlag, Berlin usw. 27

French, A. (1971). *Die spezielle Relativitätstheorie M.I.T. Einführungskurs Physik*. Vieweg, Braunschweig. 3, 10, 11, 12, 14

Gerthsen (1963). *Physik*. Springer, Berlin usw. 13

Kennedy, R. J. und Thorndike, E. M. (1932). . *Phys. Rev.*, 42:400. 14

Lorentz, H. A. (1904). . *Proc. Acad. Sc. Amsterdam*, 6:809. 12

Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik. http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf. 39, 53

Marinov, S. (1980). . *Gen. Rel. Grav.*, 12:57–66. 16

Melissinos, A. C. (1980). *Experimental Tests of Newtonian Gravity at Relativistic Velocities*. Rochester. 56

Penrose, R. (1959). . *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 55:137. 41

Peres, A. (1987). Relativistic telemetry. *Am. J. Phys.*, 55:516–519. 28, 70

Rindler, W. (1969). *Essential Relativity*. Van Nostrand Reinhold Company, New York. 3, 53

Schattner (1978). . *Gen. Rel. Grav.*, 10:377. 57

T. E. Phipps, J. (1980). . *Found. Phys.*, 10:811–817. 12

Terrel, J. (1959). . *Phys. Rev.*, 116:1041. 41